

# Chaos using a Double Pendulum

Kenji Masuda and Mitsuo Suzuki<sup>1</sup>

Faculty of Engineering, Shizuoka University

<sup>1</sup>Fukushima National College of Technology

## 二重振り子によるカオス

### 1. はじめに

最近、若者の理科離れが学会やマスコミ等でも問題視されている。理科が、中・高校生から敬遠されているということである。その実体は何であろうか。以前のように子供の中に「科学する心」が失われたとは思われなく、演示実験などを通じて多少なりとも理科への興味楽しさを広める取り組みを行っている。

具体的には、前回（核融合研）の技術研究会で報告<sup>1)</sup>したように、小中高校生向けの科学実験をテーマとした静岡大学テクノフェスタ in 浜松において、「超伝導の謎」と題した演示実験を行った。今回取り上げる「二重振り子」もテクノフェスタや科学の祭典さらに大学の講義等で演示実験されている教材である。

### 2. 二重振り子の運動の測定

図1に二重振り子の概略図を示す。二重振り子は、厚さ3mm幅30mm長さ200mmと165mmの2枚の真鍮板による2つの剛体振り子からなっている。振り子の回転部分にベアリングを用いれば、振動が減衰しないうちに十分に不規則な運動の様子が観察できる。二重振り子は黒色に塗った。これはLEDの光を見やすくするためと、色の分解能が悪いというVTRの特性を補うためである。

測定およびデータ処理の手順は次のようになる。

二重振り子の運動をビデオカメラで撮影する。

ビデオ制御ソフトCuteyJoy2.0で、ビデオテープの画像をパソコンに取り込む。

ビデオ画像をQuickTime, MoviePlayerで1枚1枚の静止画像にする。

静止画像をイラストフォト編集ソフトCanvasで取り込み、カーソルの位置情報から各LEDの位置を取り込む。

位置のデータを表計算ソフトに入力してグラフを描く。二重振り子の初期値 $\theta_1, \theta_2$ は各々 $140^\circ, 160^\circ$ とした。

緑のLEDの軌跡を図2に、赤のLEDの軌跡を図3に示す。第一の振り子(LED緑)は、同一ライン上を繰り返す運動である。これに対してLED(赤)の図3の二重振り子の軌跡は、不規則に乱れた複雑な運動をする。

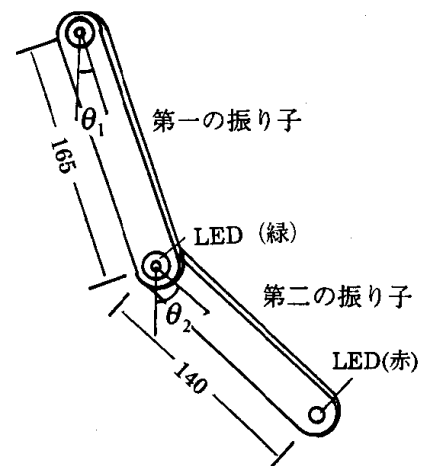


図1 二重振り子の概略図

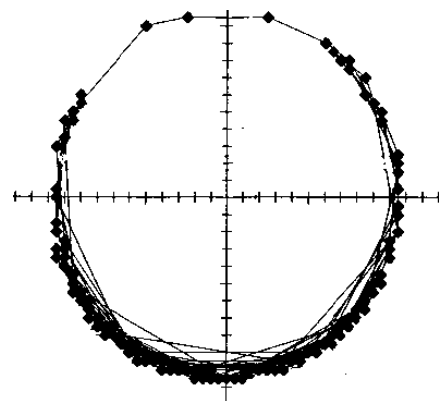


図2 第一の振り子(LED緑)の軌跡

### 3. 二重振り子の仕組み

不規則な運動をする仕組みとしては、振り子が2つあることと共に大振幅振り子の周期が大きく影響する。重力の作用で振れる剛体を実体振り子といい 図4により、運動方程式は(1)式になる。

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh \sin\theta = 0 \quad (1)$$

質量  $m$ , 重力加速度  $g$ , 固定軸  $O$  から重心  $G$  までの長さを  $h$  とし、回転軸  $O$  のまわりの慣性モーメントを  $I$  とする。単振り子の振幅が小さい場合は、周期  $T_0 = 2\pi\sqrt{h/g}$  であるから実体振り子の微小振動の周期は (2) 式で求まる。

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{hg}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (2)$$

(1) 式で記述される実体振り子の周期は最大の振れ角  $\alpha$  として

$$T_\alpha = 4\sqrt{\frac{I}{mgh}} K(k) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $K(k)$  は  $k = \sin(\alpha/2)$  を母数とする第1種の完全楕円積分で、この値は便法を用いて求める。便法としては、相加平均と相乗平均の極限值  $M$  を求め算出する<sup>2,3)</sup>。

$$a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1-k^2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad (4)$$

$a_n, b_n$  は同じ極限值  $M$  を有し、

$$\frac{1}{M(a_n, b_n)} = \frac{2}{\pi} K(k) = \frac{T_\alpha}{T_0} \quad (5)$$

最大振れの角  $\alpha = 120^\circ$  の場合

$$k = \sin \frac{120^\circ}{2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 0.75, b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = 0.707107$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.728554, b_2 = \sqrt{a_1 b_1} = 0.728238$$

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 0.728396, b_3 = \sqrt{a_2 b_2} = 0.728396$$

$$(T_0 = 0.7333[s])$$

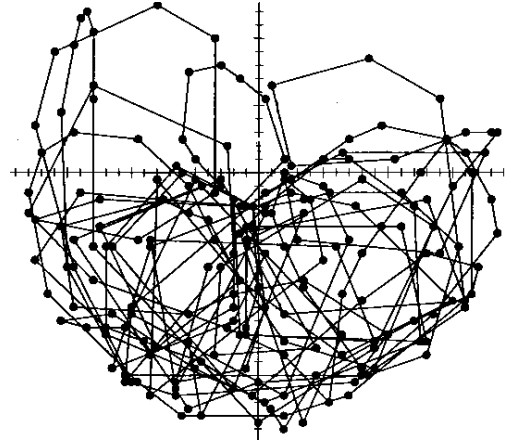


図3 二重振り子 (LED 赤) の軌跡

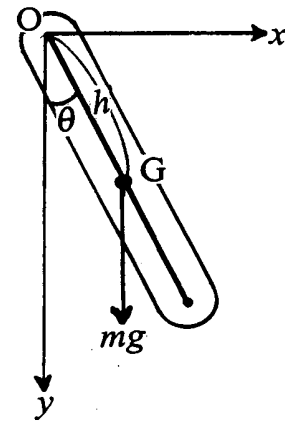


図4 実体 (剛体) 振り子

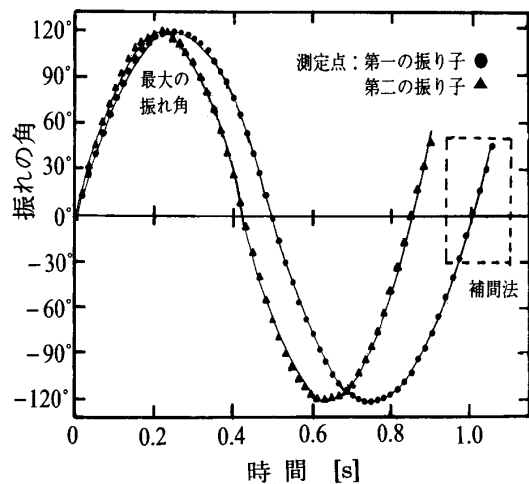


図5 最大振れ角  $120^\circ$  の1周期分の変位

$$T_\alpha = \frac{T_0}{M(a_3, b_3)} = \frac{0.7333}{0.728396} = 1.007[\text{s}]$$

図5に最大振れ角 120° の1周期分のグラフを示す。大振幅振り子の（非線形振り子）の周期の測定はビデオカメラを用いて行った。グラフのX軸と交わる時間は、補間法を用いて測定する。測定より求まる周期は0.997[s]になった。同様の方法で最大の振れ角と周期の関係をグラフにしたのが図6である。100°以下の角度では測定値と理論曲線はよく一致する。最大の振れ角が130°を越えると周期も急激に大きくなり、回転部分の摩擦の影響から測定値は理論曲線からずれる。

二重振り子の初期値  $\theta_1, \theta_2$  が大きいほど、より不規則な運動をすることは、周期の変化（非線形）が大きくなるのが大きな要因と考えられる。

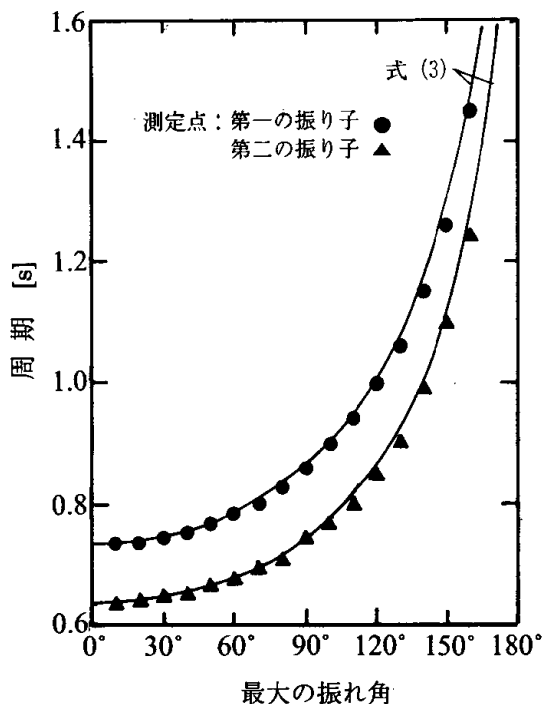


図6 最大の振れ角と周期の関係

#### 4. カオスの評価

比較的簡単な力学系から複雑な運動が生じることを学生に示すのに二重振り子は格好な教材である。実際に試してみると系の簡単さと相まってデモンストレーションの効果は十分にあると思われる。現実の系は前述のように摩擦がかなりあり比較的早く運動が停止してしまうのが難点である。摩擦がゼロの仮想的な状態における二重振り子運動をパソコンでシミュレーションした結果を図8に示す。

式を用いて説明すると次のようになる。

図7により、系の位置エネルギー  $P$  は

$$P = -h_1 \cos \theta_1 m_1 g - (\ell_1 \cos \theta_1 + h_2 \cos \theta_2) m_2 g$$

$$= -\{(m_1 h_1 + m_2 \ell_1) \cos \theta_1 + m_2 h_2 \cos \theta_2\} g$$

となる。また運動エネルギー  $K$  は

$$K = \frac{1}{2} m_1 h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \{ \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \ell_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \}$$

となる。ラグランジュ関数  $L=K-P$  をつくりラグランジュ運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i=1,2)$$

を具体的に求めると二重振り子の運動方程式は次の様になる。

$$\ddot{\theta}_1 + \mu \ell \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \mu \ell \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_1^2 \sin \theta_1 = 0$$

$$\ell \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin \theta_2 = 0$$

$$\left( \ell = \frac{h_2}{\ell_1}, \mu = \frac{m_2 \ell_1^2}{m_1 h_1^2 + m_2 \ell_1^2}, \omega_1^2 = \frac{m_1 h_1 + m_2 \ell_1}{m_1 h_1^2 + m_2 \ell_1^2} g, \omega_2^2 = \frac{g}{\ell_1} \right)$$

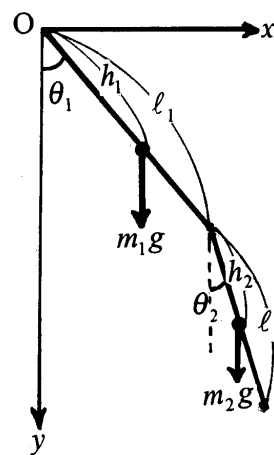


図7 二重振り子のパラメータと変数

この方程式をパソコンにより、ルンゲ・クッタ法でプログラム<sup>4)</sup>し、その結果を図8に示す。カオスの計算シミュレーション<sup>5)</sup>と図3の二重振り子の軌跡(LED赤)の測定結果はほぼ同様な奇妙な形状を示している。カオスは、時間が進んでも位相空間内の同じ点を二度と通らないという特徴も似通っている。また、シミュレーションと測定の軌跡が微妙にずれるのも、初期値の僅かな違いにより将来がらっと変わってしまう(予想不可能な)こともカオスの特徴として上げられる。

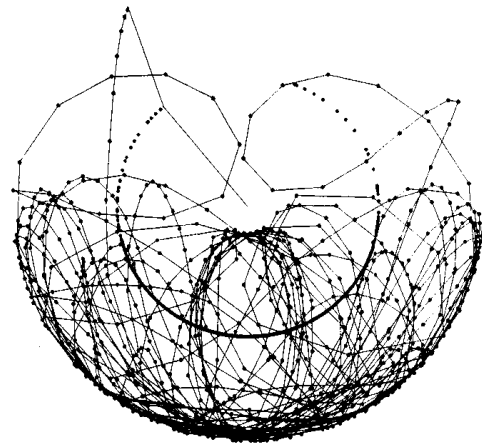


図8 二重振り子のシミュレーション

## 5. 技術実習で製作した二重振り子

技術研修の一環として、平成8年度(9/16~18)に基礎技術の習得を目的とした、インターネット利用法、機械工作法、電気測定法の3つの実習を静岡キャンパス技術部職員全員(21名)を対象に行った。

この二重振り子は、機械工作実習の課題として製作したもので、今までは真鍮板をボール盤で穴あけしてベアリングをハンダ付けしていたが、実習ということなので、図9の写真のように、ベアリングを固定

するホルダーを2個アルミ丸棒を穴ぐりして作り、それを真鍮板にねじ止めするという工程で製作した。使用した工作機械・工具としてはボール盤・旋盤・ジグソー・タップ・ダイスと多岐にわたり、15名の実習者を3名の実習講師で指導したためスタッフ不足の感があった。

実習参加者からは、  
 ・二重振り子の動きはなんと奇妙で面白い。  
 ・機械工作は久しぶりなので楽しかったが疲れた。  
 ・作るものは決まっていたが工作手順や操作方法の説明が足りなく混乱した。  
 ・旋盤を使うのは初めてだったが馴れて来ると結構楽しい。などの感想が寄せられた。

<機械実習講師：大倉宏之(教育)，池谷隆司(理)，増田健二(工)>

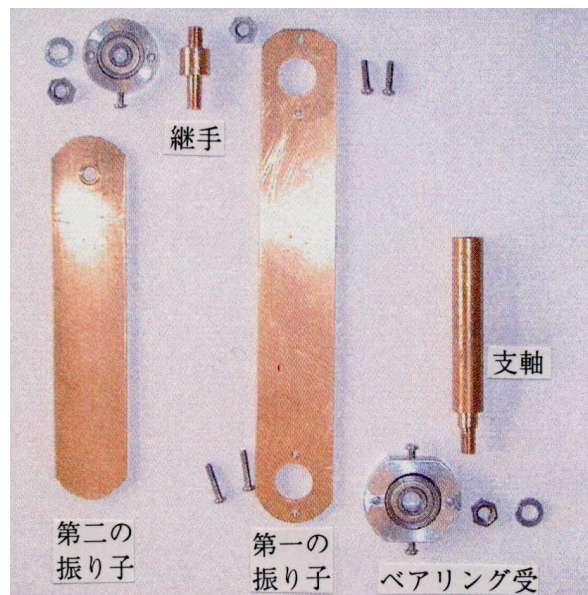


図9 工作実習で製作した二重振り子の部品の写真

謝辞：数値計算に際して貴重な助言を頂きました理学部の佐藤信一助教授に感謝いたします。

文献：1) 増田健二：技術報告(平成9年度核融合科学研究所技術研究会，1998.2) pp.13 - 16

2) 増田健二，長島弘幸：日本物理学会予稿集4(1991春) p.251

3) 長島弘幸：大学の物理教育(日本物理学会，1998.3) pp.42-43

4) 長島弘幸，馬場良和：カオス入門(培風館，1992) pp.144-148

5) 長島弘幸，増田健二：日本物理学会予稿集4(1991秋) p.252