

# 実施報告書（大型 12-13）

## クォーク閉じ込めの双対超電導描像と閉じ込め・非閉じ込め 相転移

柴田章博

高エネルギー加速器研究機構計算科学センター

### 1 研究組織

- 柴田章博 [研究代表] :  
高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・研究機関講師
- 近藤慶一：千葉大学・理学部物理学科・教授
- 加藤清考：福井工業高等専門学校・一般教育科・准教授

### 2 研究の概要

双対超伝導描像はクォーク閉じ込めを説明する最も魅力的かつ有力なシナリオである [2]。双対超伝導描像では、磁気的モノポールが閉じ込め機構に中心的な役割を果たすことを示すことが必要である。これまでも数多くの双対超伝導描像を支持する研究・報告がなされてきた。SU(2)Yang-Mills (YM) 理論において、アーベリアン射影の方法 [3] によって、弦張力のアーベリアンドミノナンスやアーベリアン磁気的モノポール (Abelian magnetic monopole) ドミノナンスが数値シミュレーションによる研究によって示された。しかしながら、最大可換ゲージ (MA ゲージ) などの特別なゲージにゲージ固定することによって抽出されたもので、ゲージ不変性やカラー対称性を破ってしまうため、真に物理的な対象なのかという批判は免れない。これまでも、この問題点を克服するための研究がなされてきたが満足のいくものではなかった。我々は、Cho-Duan-Ge-Faddeev-Niemi-Chabanov 分解 [6] に基づく定式化 [7][8] を提唱し、閉じ込めに中心的な役割を果たすモードを明示的にゲージに依存しない形で抽出し、“アーベリアン”ドミノナンス及び、磁気的モノポールドミノナンスを示した。[13][9][10][11][12]

SU(N)YM 理論においては、SU(2) の定式化を拡張し、クォーク閉じ込めに効くゲージ不変な位相的配位を特別なゲージ固定に依らずに抽出できる新しい定式化を行った。[14][18][12][20] ノンアーベリアンストークスの定理に基づく考察によって [16][17]、基本表現に属するクォークは、従来のアーベリアン射影のナイーブな拡張として得られる可換磁気モノポールではなく、ノンアーベリアン磁気モノポールがクォーク閉じ込めの弦張力において支配的に寄与することの発見し、数値シミュレーションによって検証した。この発見は、我々の方法によって世界に先駆けて行われた。

本研究では、我々が提唱するノンアーベリアン双対超伝導描像について検証を進める。グルーオン場及び、新しい定式化によって得られた場の相関関数やフラックスを、数値シミュレーションで得られたグルーオン場の配位において計測し、双対マイスナー効果を直接的に検証する。また、有限温度相転移を用いて、ノンアーベリアン双対超伝導の特性を数値的に解明する。

今期は、ゼロ温度におけるシミュレーションを集中的に行った。

### 3 格子上の定式化

YM 場のゲージポテンシャルを分解  $U_{x,\mu} = V_{x,\mu} X_\mu$  を、連続極限でゲージポテンシャルの分解  $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$  [?] を与えるものを考える。リンク上の中点で定義された場  $\mathbb{A}_{x',\mu}, \mathbb{V}_{x',\mu}$  及び、格子上场  $\mathbb{X}_{x,\mu}$  とを用いて次のように対応付けられる。

$$U_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu A_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon \mathbb{A}_{x',\mu}), \quad (1a)$$

$$V_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu V_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon \mathbb{V}_{x',\mu}), \quad (1b)$$

$$X_{x,\mu} = V_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon \mathbb{X}_{x,\mu}). \quad (1c)$$

これらの場は、ゲージ変換  $\Omega_x$  に対して、次のような変換性を持つ。

$$U_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (2)$$

$$V_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x V_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad X_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x X_{x,\mu} \Omega_x^\dagger. \quad (3)$$

ゲージ場の分解は、ゲージ群  $G$  の stability group 部分群  $H \subset G$  とその商空間  $G/H$  に対応して与えられる [?][?].  $G = SU(3)$  の minimal option ( $\tilde{H} = U(2)$ ) の場合は、変数分解  $U_{x,\mu} = X_{x,\mu} V_{x,\mu}$  は導入した随伴変換するカラー場  $\mathbf{h}_x = \Theta_x (\lambda_8/2) \Theta_x^\dagger$ , ( $\in G/H$ ) を用いて次の定義方程式で与えられる。

$$D_\mu^\epsilon[V] \mathbf{h}_x = \frac{1}{\epsilon} (V_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} - \mathbf{h}_x V_{x,\mu}) = 0, \quad (4a)$$

この厳密解は次で与えられる。

$$X_{x,\mu} = \hat{L}_{x,\mu}^\dagger (\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{1/N} g_x^{-1}, \quad V_{x,\mu} = X_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = g_x \hat{L}_{x,\mu} U_{x,\mu} (\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{-1/N}, \quad (5a)$$

$$L_{x,\mu} = \sqrt{L_{x,\mu} L_{x,\mu}^\dagger \hat{L}_{x,\mu} q} \iff \hat{L}_{x,\mu} = \left( \sqrt{L_{x,\mu} L_{x,\mu}^\dagger} \right)^{-1} L_{x,\mu}, \quad (5b)$$

$$L_{x,\mu} = \frac{N^2 - 2N + 2}{N} \mathbf{1} + (N - 2) \sqrt{\frac{2(N - 1)}{N}} (\mathbf{h}_x + U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}) + 4(N - 1) \mathbf{h}_x U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}, \quad (5c)$$

ここで注意すべきは、任意の YM 場カラー場が与えられると、定義方程式 (5a) で決定できないパラメーター  $g$  を除き、一意に分解が決定される。ここで、

$$g_x = 1$$

を置くと、連続極限 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) を取ると、連続理論における定義方程式  $D_\mu[\mathbf{V}_\mu] \mathbf{h}(x) = 0$ ,  $\text{tr}(\mathbf{X}_\mu(x) \mathbf{h}(x))$  の方程式の解を再現する：

$$\mathbf{A}_\mu(x) = \mathbf{V}_\mu(x) + \mathbf{X}_\mu(x), \quad (6a)$$

$$\mathbf{V}_\mu(x) = \mathbf{A}_\mu(x) - \frac{2(N - 1)}{N} [\mathbf{h}(x), [\mathbf{h}(x), \mathbf{A}_\mu(x)]] - ig^{-1} \frac{2(N - 1)}{N} [\partial_\mu \mathbf{h}(x), \mathbf{h}(x)], \quad (6b)$$

$$\mathbf{X}_\mu(x) = \frac{2(N - 1)}{N} [\mathbf{h}(x), [\mathbf{h}(x), \mathbf{A}_\mu(x)]] + ig^{-1} \frac{2(N - 1)}{N} [\partial_\mu \mathbf{h}(x), \mathbf{h}(x)]. \quad (6c)$$

このリンク変数分解は、カラー場を導入してゲージ対称性を拡大しているため、とももとの YM 理論と等価な理論を得るためには、カラー reduction 条件を課す。本研究では、 $SU(2)$  の CFNS 分解で導入された reduction 条件を拡張したものをを用いる：与えられたゲージ場  $U_{x,\mu}$  に対して、次の汎関数を最小にするようにカラー場  $\mathbf{h}_x$  を定める。

$$F_{\text{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}] = \sum_{x,\mu,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left( (D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x)^\dagger D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x \right). \quad (7)$$

磁気的モノポール (磁気的カレント) は、ノンアーベリアンストークスの定理 [16, 17] 及び場の強さ  $\mathcal{F}_{\mu\nu}[\mathbf{V}]$  のホッジ分解によってゲージ不変に定義される。格子上でのゲージ不変な磁気的モノポールカレントは  $k$  は次で与えられる。

$$V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^\dagger V_{x,\nu}^\dagger = \exp(-ig\epsilon^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}[\mathbf{V}](x)), \quad (8a)$$

$$\epsilon^2 \Theta_{\mu\nu}(x) := -\arg \operatorname{Tr} \left[ \left( \frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{h}_x \right) V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^\dagger V_{x,\nu}^\dagger \right], \quad (8b)$$

$$k_\mu(x) = 2\pi n_\mu(x) = \partial_\nu^* \Theta_{\mu\nu}(x) := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Theta_{\alpha\beta}(x). \quad (8c)$$

ここで、 $k_\mu$  は、分解によって得られた制限された場  $V$  により定義されており、ノンアーベリアン磁気的モノポールである。

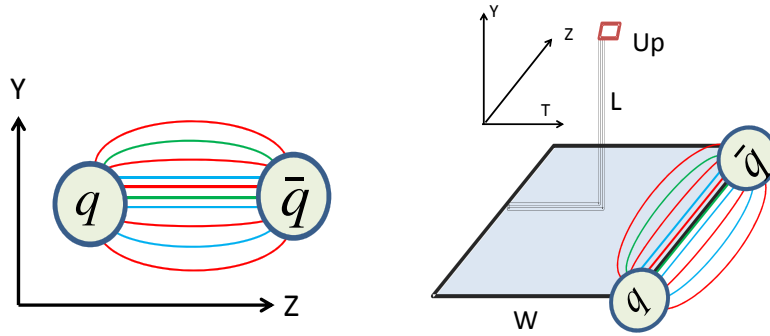


図 1: 量子色フラックスの計測: (右図) ゲージ不変なプラケット  $U_p$  とWilsonループ  $W$  の相関関数 ( $U_p L W L^\dagger$ ).

## 4 シミュレーションと結果

ノンアーベリアン双対超伝導描像を検証するため、シミュレーションによってゲージ配位を生成し、クォーク・反クォークの生成する量子色フラックスを計測する。この時、YM場  $U_{x,\mu}$  及び、クォークの閉じ込めに主要な役割を働きをする場  $V_{x,\mu}$  を抽出し、両者についてフラックスの計測結果を対比して、双対マイスナー効果を直接検証する解析を置きなした。

量子色フラックス (グルーオン場の強さ) の計測には、Wilsonループ  $W$  をクォーク・反クォークのソースとしプラケット  $U_p$  (グルーオン場の強さ) のゲージ普遍的相関関数 (図.1):

$$\rho_W := \frac{\langle \operatorname{tr}(U_P L^\dagger W L) \rangle}{\langle \operatorname{tr}(W) \rangle} - \frac{1}{N} \frac{\langle \operatorname{tr}(U_P) \operatorname{tr}(W) \rangle}{\langle \operatorname{tr}(W) \rangle}, \quad (9)$$

を用いる。このオペレータは、ナイーブな連続極限によって、場の強さに比例するオペレータを得る:

$$\rho_W \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} g\epsilon^2 \langle \mathcal{F}_{\mu\nu} \rangle_{q\bar{q}} := \frac{\langle \operatorname{tr}(ig\epsilon^2 L \mathcal{F}_{\mu\nu} L^\dagger W) \rangle}{\langle \operatorname{tr}(W) \rangle} + O(\epsilon^4), \quad (10)$$

おこで、 $U_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon A_\mu(x))$ 、 $U_P = \exp(-ig\epsilon^2 \mathcal{F}_{\mu\nu})$  である。したがって、場の強さ  $F_{\mu\nu}[U]$  は、格子上のゲージ結合定数  $\beta := 2N/g^2$  を用いて次で与えられる。

$$F_{\mu\nu}[U] := \epsilon^{-2} \sqrt{\frac{\beta}{2N}} \rho_W. \quad (11)$$

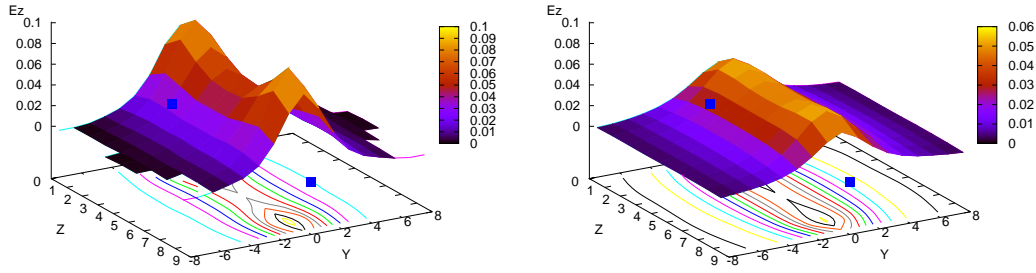


図 2: The distribution in  $Y$ - $Z$  plane of the chromoelectric field  $E_z$  connecting a pair of quark and antiquark: (Left panel) chromoelectric field produced from the original YM field, (Right panel) chromoelectric field produced from the restricted  $U(2)$  field.

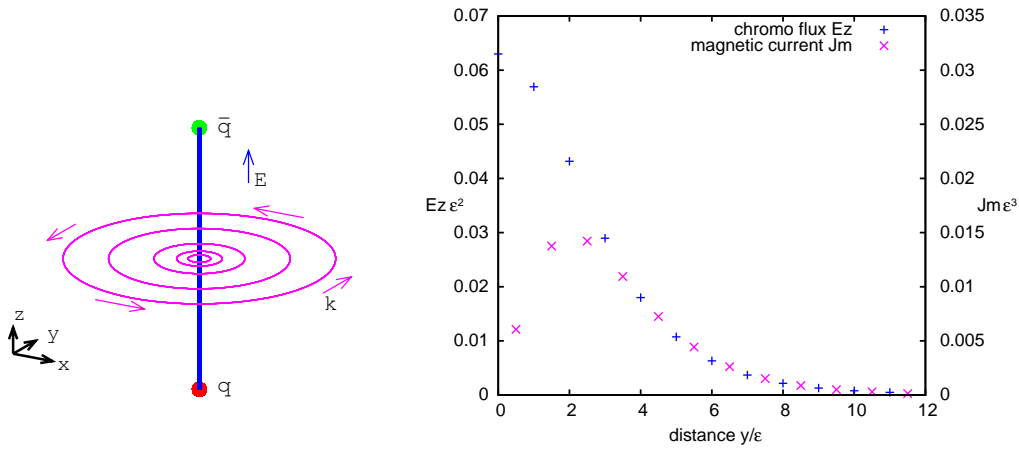


図 3: The magnetic-monopole current  $\mathbf{k}$  induced around the flux along the  $z$  axis connecting a quark-antiquark pair. (Left panel) The positional relationship between the chromoelectric field  $E_z$  and the magnetic current  $\mathbf{k}$ . (Right panel) The magnitude of the chromo-electronic current  $E_z$  and the magnetic current  $J_m = |\mathbf{k}|$  as functions of the distance  $y$  from the  $z$  axis.

双対超伝導描像における量子色フラックスの計測は、YM 場  $U_\mu$  を分解により抽出した場  $V_\mu$  で行う。

YM 場、および、分解で得た  $V$  場に対する計測ではともに、クォーク・反クォークの作る量子色フラックスの電気的パート ( $E_x, E_y, E_z$ ) = ( $F_{10}, F_{20}, F_{30}$ ) の  $E_z$  成分のみゼロでない値を持ち、 $E_z$  は  $T$ - $Z$  平面から離れるにしたがって指数関数的に減衰する。また、磁氣的パート ( $B_x, B_y, B_z$ ) = ( $F_{23}, F_{31}, F_{12}$ ) はゼロであり、クォーク・反クォークをつなぐフラックスがあることを示唆する。図 2 は、 $Y$ - $X$  平面で計測したフラックスの分布を示していた。クォーク・反クォークを繋ぐフラックスチューブが構成されていることを示している。

双対マイスナー効果を検証する。量子色フラックスと磁氣的モノポールカレントの関係を見る。図 3 は、クォーク・反クォーク間のフラックスと磁氣的カレントの関係 (左) とその計測結果 (右) を示している。磁氣的カレントは、制限された  $V$  場を用いて、次のように計算される：

$$\mathbf{k} = *dF[V], \quad (12)$$

ここで、 $F[V]$  は  $V$  場 (1-form) の場の強さ (2-form) であり、 $d$  は外微分、 $*$  は Hodge の双対変換を示す。非ゼロの磁氣的カレントは、Bianchi 恒等式の破れを示しており、磁氣的モノポール凝縮を起こしたことを示唆している。

## 参考文献

- [1] A. Shibata, K.-I. Kondo, S. Kato and T. Shinohara, arXiv:1212.2835 [hep-lat], KEK-PREPRINT-2012-35, CHIBA-EP-198, talk given at 30th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2012)
- [2] Y. Nambu, Phys. Rev. D10, 4262 (1974); G. 't Hooft, in: High Energy Physics, edited by A.; Zichichi (Editorice Compositori, Bologna, 1975); S. Mandelstam, Phys. Report 23, 245 (1976); A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B120, 429 (1977).
- [3] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B190, 455 (1981).
- [4] K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, T. Murakami, S. Kato and S. Ito, Phys. Lett. B669, 107 (2008).
- [5] A. Shibata, K.-I. Kondo and T. Shinohara, arXiv:0911.5294[hep-lat], Phys. Lett. B691, 91-98 (2010).
- [6] Y.M. Cho, Phys. Rev. D 21, 1080 (1980). Phys. Rev. D 23, 2415 (1981); Y.S. Duan and M.L. Ge, Sinica Sci. 11, 1072 (1979); L. Faddeev and A.J. Niemi, Phys. Rev. Lett. 82, 1624 (1999); S.V. Shabanov, Phys. Lett. B 458, 322 (1999). Phys. Lett. B 463, 263 (1999).
- [7] K.-I. Kondo, T. Murakami and T. Shinohara, Eur. Phys. J. C 42, 475 (2005); K.-I. Kondo, T. Murakami and T. Shinohara, Prog. Theor. Phys. 115, 201 (2006).
- [8] K.-I. Kondo, T. Shinohara and T. Murakami, Prog. Theor. Phys. 120, 1 (2008).
- [9] S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara, and S. Ito, e-Print: hep-lat/0509069, Phys. Lett. B632, 326-332 (2006).
- [10] S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata, and T. Shinohara, Phys. Lett. B645, 67-74 (2007).
- [11] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, Phys. Lett. B653 101-108 (2007).
- [12] S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata and T. Shinohara, PoS(LAT2009) 228.
- [13] K.-I. Kondo and Y. Taira, e-Print: hep-th/9911242, Prog. Theor. Phys. 104, 1189-1265 (2000). e-Print: hep-th/9906129, Mod. Phys. Lett. 15, 367-377 (2000). Nucl. Phys. Proc. Suppl. 83, 497-499 (2000).
- [14] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Shinohara and S. Ito, arXiv:0710.3221 [hep-lat], POS(LATTICE2007) 331.
- [15] S. Gongyo, T. Iritani and H. Suganuma, Phys. Rev. D86, 094018 (2012). H. Suganuma, K. Amemiya, H. Ichie, N. Ishii, H. Matsufuru, T.T. Takahashi, hep-lat/0407016, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 106, 679-681 (2002).
- [16] K.-I. Kondo, Phys. Rev. D77, 085029 (2008).
- [17] K.-I. Kondo and A. Shibata, arXiv:0801.4203[hep-th].
- [18] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Shinohara and S. Ito, e-Print: arXiv:0810.0956 [hep-lat], PoS(LATTICE 2008) 268.
- [19] A. Shibata, K.-I. Kondo, S. Kato, S. Ito, T. Shinohara and N. Fukui, PoS LAT2009 (2009) 232, arXiv:0911.4533 [hep-lat].

- [20] A. Shibata, K-I. Kondo, S. Kato and T. Shinohara, PoS(Lattice 2010)286.
- [21] K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, and S. Kato, Phys. Rev. D83, 114016 (2011).
- [22] A. Di Giacomo, M. Maggiore and S. Olejnik, Nucl. Phys. B **347**, 441 (1990).; ; A. Di Giacomo, M. Maggiore and S. Olejnik, Phys. Lett. B **236**, 199 (1990).