

加速器の基本概念
III : 高エネルギービームの力学 (2)

高田耕治

KEK

koji.takata@kek.jp

<http://research.kek.jp/people/takata/home.html>

総研大加速器科学専攻
2015年度「加速器概論I」講義

2015年4月16日

- §1 粒子加速器のあけぼの
- §2 高エネルギービームの力学 (1)
- §3 高エネルギービームの力学 (2)
 - ビーム・ビーム衝突型加速器
 - 高周波加速空洞とビーム
 - シンクロトロン放射
- §4 高周波加速技術
- §5 これからの高エネルギー加速器
- §6 参考文献

[1] ビーム・ビーム衝突型加速器 (コライダー)

- 高エネルギー実験はもっぱら加速ビームを加速器に固定された標的に照射する**固定標的実験**であった
- しかし素粒子反応は入射粒子の実験室系エネルギーではなく、標的となる粒子との**重心系でのエネルギー**で決まる
- コライダー方式は 1956 年に Kerst や O'Neill らによって提案された^{*1}
- はじめてのコライダー : AdA (Frascati, 1961): ^{*2}
 $200 \text{ MeV } e^- \Rightarrow \Leftarrow 200 \text{ MeV } e^+$
- 以降、コライダー方式は高エネルギー加速器の規範となる

^{*1}Kerst et al, Phys. Rev. **102** (1956) 1418; O'Neill, Phys. Rev. **102** (1956) 1418

^{*2}"AdA: The first Electron-Positron Collider", Phys. perspect. 6 (2004) 156 - 183, Birkhäuser Verlag, Basel.

- 同じ静止質量 m をもつ2つの粒子の系を考える
- 一方が実験室系に固定されている場合:
 - ビーム中の粒子エネルギーは γmc^2 であるが、
標的粒子のエネルギーは mc^2 .
 - 2粒子系の全エネルギーは $E_T = (1 + \gamma)mc^2$.
 - また、系の全運動量 : $p_T = \beta\gamma mc = \sqrt{\gamma^2 - 1} mc$.
- $E^2 - c^2 p_T^2$ は Lorentz 不変量であるので、重心系の全エネルギーは

$$E_{CM}(\text{fixed target}) = \sqrt{2\gamma + 2} mc^2 \approx \sqrt{2\gamma} mc^2$$

- ところがコライダー方式にすれば

$$E_{CM}(\text{collider}) = 2\gamma mc^2 \gg E_{CM}(\text{fixed target}).$$

- コライダーで粒子・粒子衝突の頻度を上げるには衝突点においてビーム断面寸法を極細にする必要がある

- ビーム断面の面積を S 、反応断面積を σ とすれば
1回の粒子・粒子衝突で反応がおこる確率は

$$\sigma/S$$

- それぞれのビーム中に含まれる粒子数を N_+ および N_- とし、
毎秒 f 回ビーム・ビーム衝突をさせると毎秒の素粒子反応数は

$$f \times \frac{N_+ \times N_-}{S} \sigma$$

- この式で σ にかかる係数をルミノシティ (luminosity) \mathcal{L} とする

$$\mathcal{L} = f \times \frac{N_+ \times N_-}{S}$$

- いかなるコライダーでも設計段階、運転段階を問わず
ルミノシティの極大化をはかる努力が日夜続けられる

[II] 高周波加速空洞とビーム (1)

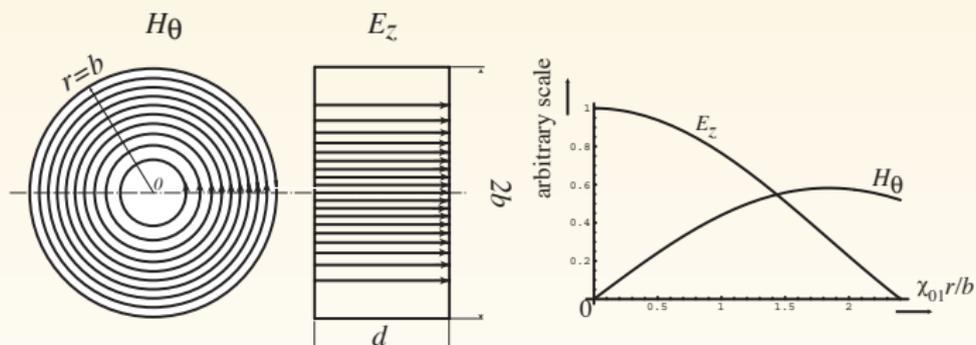
- Rolf Wideröe の高周波加速は広い空間に置かれた2つのドリフト管の間の電場を使った
- しかしこの方式では周波数が高くなるほど放射損失が増加する問題がある
- ドリフト管の間の電場は、 q をドリフト管表面に現れた電荷、 d を間隙の長さとして、電気双極子 $p = qd e^{j\omega t}$ のアンテナと見なせる
- その高周波放射電力は

$$\frac{\omega^4}{12\pi} \mu_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} |p|^2$$

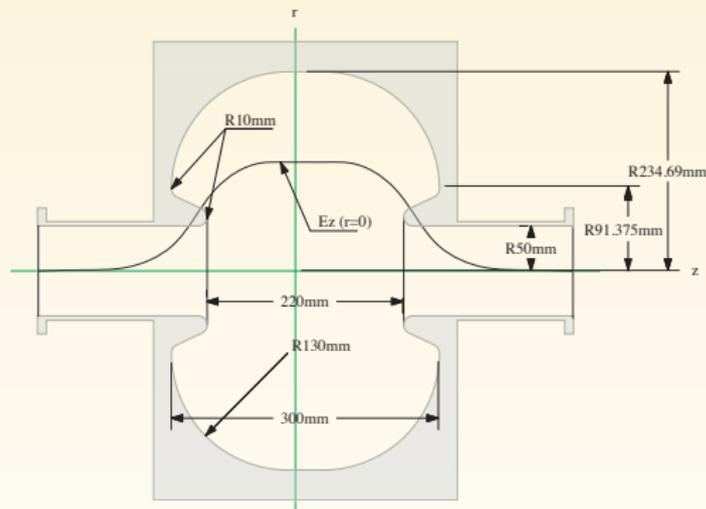
- 従って電場をより大きく、周波数をより高くしようとするれば間隙を金属板で囲む必要がある

→ 共振空洞を使った高周波加速

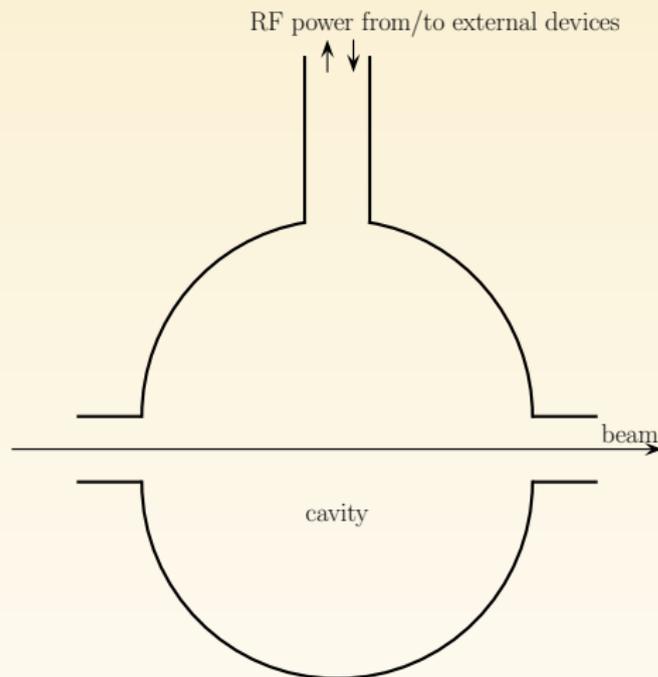
- 高周波加速空洞には多様な型がある。しかしそれらの原点は最低次の共振モード TM_{010} で働く円筒空洞である。
 - この型はしばしば "ピルボックス (pillbox) 空洞" とも呼ばれる
 - TM_{010} モードの電磁場は下図のように $E_z(r) \propto J_0(\xi_{01}r/b)$ と $H_\theta(r) \propto J_1(\xi_{01}r/b)$ の2成分のみである。
ここで b は空洞半径、 J_n は n 次のベッセル関数、 $\xi_{01} = 2.40483$ は J_0 の最も小さい零点である。
 - 共振 (角) 周波数は $\omega_{01} = \xi_{01}b/c$



- 具体例：KEK Photon Factory の 2.5 GeV 電子貯蔵リングで使われている純銅空洞
 - ピルボックスから変形された断面形状に注意
 - 仕様： $f_{RF} = 500 \text{ MHz}$, $V_{peak} = 0.7 \text{ MV}$



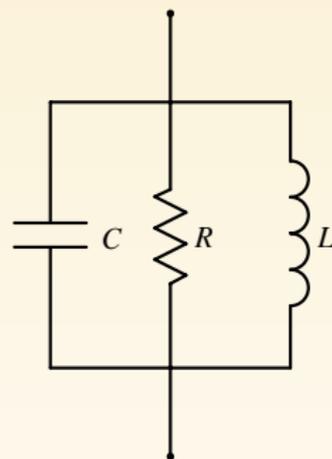
- 外部高周波源で励振されている空洞とビームの系の模式図



- 空洞の大局的な振舞いは3個のパラメーター L 、 C 、 R からなる等価回路で表現できる
- 次の2つの関係式は共振周波数と Q 値の観測値あるいはシミュレーション値をつかって直ちに導ける

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ and } Q = \omega_0 RC.$$

- しかし3個のパラメーターを同定するにはもう1個独立な式が必要である
- **そのためには空洞という立体回路の電圧を一義的に定義しなければならない**



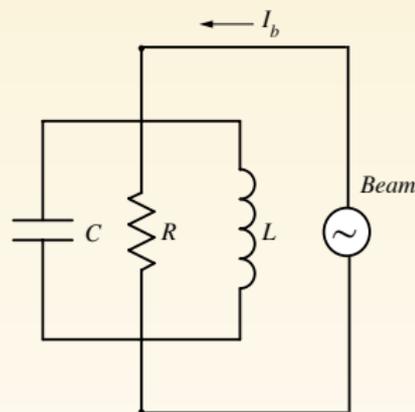
高周波加速空洞とビーム (6)

- 等価回路の電圧を定義するためにビーム $I_b = |I_b| e^{j\omega t}$ を右図のように外部回路として追加する
- 定常状態にあるビームと空洞の系では次のエネルギー保存則が成立する

$$\iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

ここで \mathbf{J} はビームの電流密度、 \mathbf{E} と \mathbf{H} はビームによって励起された電磁場^a

- 上の保存則の意味するところは、ビーム軌道にある電場によりビームが失う電力は空洞表面 S で生じるオーム損（壁損）に等しいということである

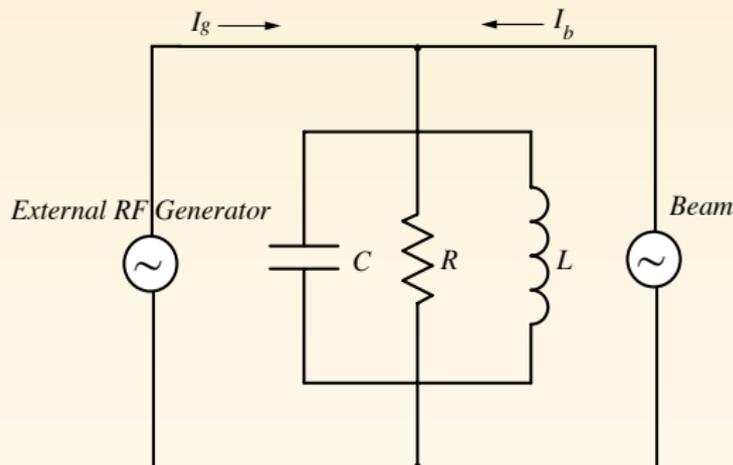


^a

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$$

- p.?? の式の第1項はビームに働く減速電圧 $-V_b$ とビーム電流 I_b の積と解釈される
- すなわち常にビームは電力 $I_b V_b / 2$ を空洞へ供給している
- 定常状態ではこの電力は壁でのオーム損失 $RI_b^2 / 2$ に等しくなければならない
- したがって $R = V_b / I_b$ というオーム式から回路の抵抗 R を定義することができる
- この抵抗 R を空洞のシャント・インピーダンスという

- 実際の加速空洞システムでは外部回路として導波管でつながる高周波源も下図のように追加しなければならない



- すべての電流、電圧は固有の振幅と位相をもつので、空洞の電圧は I_b と I_g のフェーザー (phasor) 和と R のかけ算となる

- シンクロトロン放射 [Synchrotron radiation (SR)] は偏向磁場により点電荷が横方向に加速されるときに発生する **電気双極子放射** である
- 座標系原点に留まっている電荷の微小振動から出る電気双極子放射の電力は次の **ラーマー (Larmor)** の公式で与えられる

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2$$

- とくに電子の場合は

$$P = \frac{2r_e m_e}{3c} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2$$

ただし r_e は電子の古典半径:

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{m}$$

電気双極子放射 (1)

- 原点において z 方向に角周波数 ω で微小振動する電気双極子の放射パターン:

- z 軸にかんして回転対称
- $\lambda = 2\pi c/\omega$

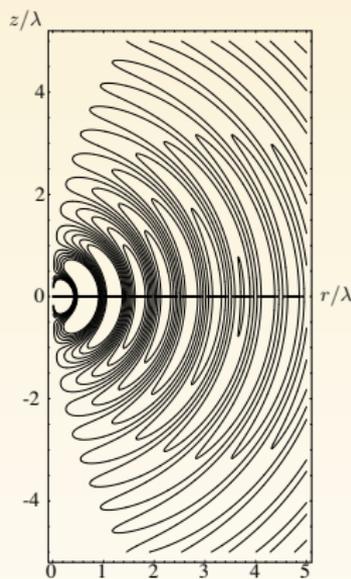


Fig: 電場の等高線

実験室系にたいして運動する電子からの双極子放射へ上の結果を応用する

- 電子の系でのラーマー公式

$$P = \frac{2r_e m_e}{3c} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 = \frac{2r_e}{3m_e c} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2$$

の実験室系への変換が課題

- さて P はある時間の幅 Δt に放出されるエネルギー ΔE であるが、エネルギーと時間は同様のローレンツ変換を受ける
- したがって P はローレンツ不変形をとらなければならない
- これは上式右辺をローレンツ不変形に書きなおすこと
- すなわち $(d\mathbf{p}/dt)^2$ を $(d\mathbf{p}/d\tau)^2 - (dE/d\tau)^2/c^2$ のようにローレンツ不変形へ拡張すること *³
- こうしてローレンツ不変でありかつ電子速度が0の極限でラーマー公式に一致する式がえられる

³ $d\tau$ は固有時間: $d\tau = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2} = dt/\gamma$

■ 前ページの結果をまとめると実験室系では:

- 1 個の電子の放射電力:

$$P = \frac{2r_e m_e}{3c} \gamma^2 \left\{ \left[\frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} \right]^2 - \left[\frac{d(\gamma c)}{dt} \right]^2 \right\}.$$

- 半径 ρ の円軌道を周回するときの 1 周あたりの放射エネルギー:

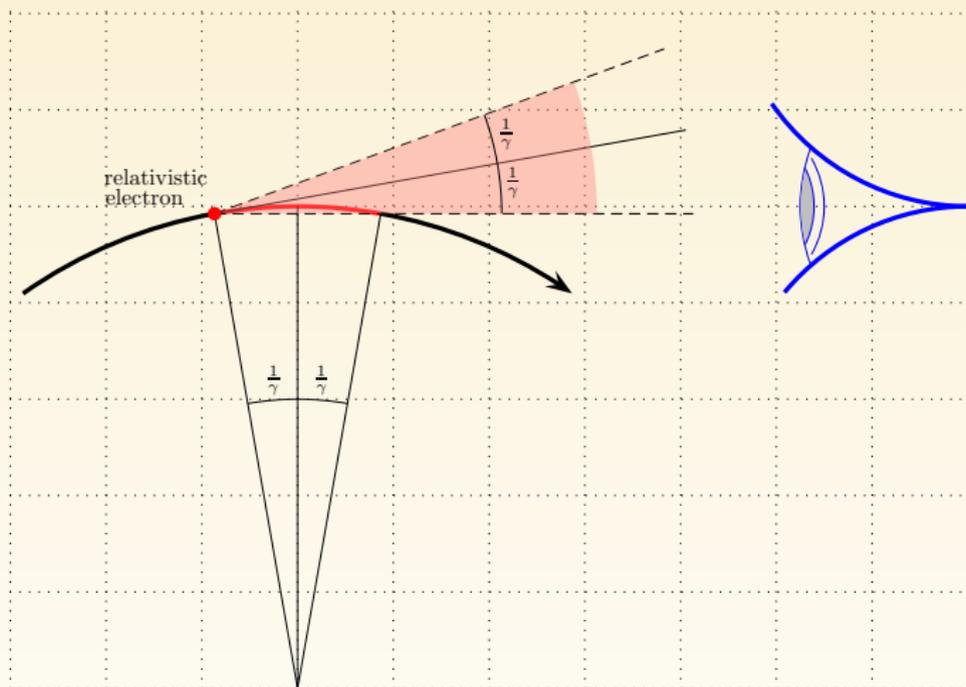
$$\frac{\Delta E}{m_e c^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{\rho} \beta^3 \gamma^4$$

- 電子のエネルギーが E_e (GeV) の場合の実用式:

$$\Delta E(\text{keV}) \approx 88.5 [E_e(\text{GeV})]^4 / \rho(m).$$

- E_e の 4 乗に注意!

■ 円軌道上の相対論的電子からの放射パターン



■ 実験室系で観測されるパターンの特徴

- 電子の静止系 (x', y', z', ct') でみると

$$dP/d\Omega \propto \cos^2 \theta$$

ここで Ω は立体角、 θ は z' 軸との角度

- 実験室系座標との関係:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - vt), \quad ct' = \gamma(ct - vz/c)$$

- x' 軸 と y' 軸は z 軸にたいして $\sim 1/\gamma$ の角度をもつ
- したがって放射電力は全角度 $\sim 2/\gamma$ の円錐に集中
- 実験室系の観測者は $\sim 2\rho/\gamma$ の円弧からの光が見えるだけ
- 光の波長はドップラー効果により $(1 - v/c) \sim \frac{1}{2\gamma^2}$ のように短縮される

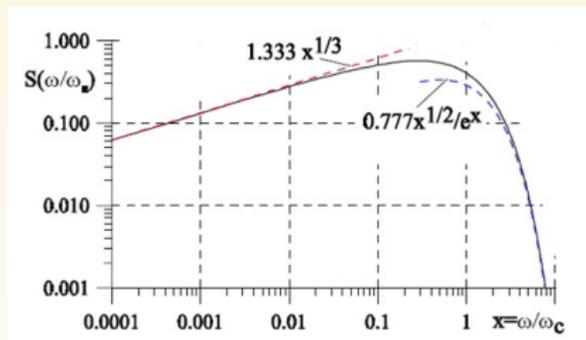
電気双極子放射 (6)

■ 臨界角周波数 ω_c と その波長 $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$:

- ω が大きくなるに従い、放射電力スペクトルは ω_c 辺りまでは増加するが、そこを境に急激に減少
- 臨界角周波数の式 (Schwinger-Jackson による定義):

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma^3}{\rho}$$

- ω_c 辺りまでは放射は古典的電磁波、それ以上では光子的振舞い (量子論的領域)



(from wikipedia: synchrotron radiation)