

# 高周波加速の基礎

–改訂版–

## Fundamentals of RF Acceleration

–Revised Edition–

高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設

高田 耕治  
Koji TAKATA

## はじめに

筆者は総合研究大学院大学加速器科学専攻の新生にたいして、「高エネルギー加速器の基本概念」および「高周波加速の基礎」という題目で講義を行ってきた。このたび前者については [1] として、後者については本書としてまとめ、ともに KEK Report として出版するに至った。

本書の主題は高周波加速系の中心である空洞の基本的性質を等価回路モデルを軸にして理解しようとするところにある。具体的には、空洞やその周辺装置をインダクタンス  $L$ 、キャパシタンス  $C$ 、抵抗  $R$  などからなる回路素子でモデル化し、加速空洞を充満している電磁場を等価回路に励起される電圧や電流として大局的に把握することである。

一般に、加速空洞や磁石など加速器を構成する装置の電磁場の厳密な 3 次元解を知ることができれば、そこを通過する荷電粒子ビームの振舞いを完全に予測でき、よりよいビーム性能への道がひらけるであろう。事実、現在達成されている各種加速器のすぐれた性能は、日進月歩で発展する計算機環境のもとで、かつてない精度の電磁場計算が可能になったことにも大きく因っていると言えよう。

しかしいかなる加速装置であれ、それにはじめて取組もうとするとき、まず問題の大局的な把握、理解から始めなければならない。加速空洞でいえば、その複雑な電磁場の厳密な 3 次元解にこだわると、木を見て森を見ないことになる。そこで  $L$ 、 $C$ 、 $R$  からなる集中定数回路でモデル化し、問題点を整理することが大変重要になる。等価回路は 3 次元電磁場の細かい情報を電流、電圧の複素振幅で代表させたものである。超高周波技術の基礎となるマイクロ波電子工学の先駆的な名著を残したシュルクノフによれば、このモデル化は「不必要な次元を隠す」[2] ということである。集中定数回路論は 3 次元を全部「隠した」ものであり、伝送線路論は伝送線断面の 2 次元情報を「隠した」ものである。

このようにして加速空洞の開発には等価回路モデルが不可欠の道具として広く使われてきた。しかし空洞共振モードの 3 次元電磁場と等価回路がどのように対応しているかを明らかにした教科書は少ない。そこで本書では、先ず空洞の個々の共振モードについて、その対応関係を明らかにし、ついであらゆる高次共振モードが併存する場合を表現する等価回路を導く。さらには、この等価回路モデルを用いて、高周波加速に使われる単一セル空洞、多数のセルからなる連結空洞の基本的性質を解析する。また外部の高周波源から励振される空洞やビーム自身も励振源となっている（いわゆるビーム・ローディング）場合の等価回路を導き、解析を行う。

もちろん等価回路モデルの限界も考慮しなければならない。集中定数回路による取扱いは、空洞を通過する際にビームが受ける電磁場の作用が空洞中の軌道全体にわたる積分で代表できるとして理解することである。光速に近い速度で走る超相対論的な「硬い」ビームにとっては、軌道に沿って位置や速度がずれてゆく様子は無視でき、この近似は有効で

ある。しかしエネルギーの低い「柔らかな」ビームの場合では3次元空間各点で電磁場による変動を逐次追跡しなければ正確な答えがえられない。プラズマが典型的な例であるが、加速器においても大電力高周波を発生する特殊な真空管、例えばクライストロンなど非相対論的な大電流ビームを扱うものについては、この局所的解析が不可欠である。

さてこのように本書では、等価回路モデルを使って高周波加速空洞の基本的な性質を明らかにすることに重点を置き、関連する数多の重要な技術については殆どふれなかった。またマイクロ波電子工学固有の電磁気一般理論についても一からの説明や証明を割愛した。これらについて読者は Slater [3]、Collin [4]、その他のすぐれた教科書 [5]、[6]、[7]などで勉強されることを願っている。そして空洞や導波管などいわゆる立体回路に限れば、基本概念を大変明解にまとめた MIT Radiation Laboratory Series 第8巻『Principles of Microwave Circuits』[8]を薦めたい。筆者はこの分野の研究を始めて40年あまりになるが、未だに新しさを保っている本として活用している。

#### [改訂版について]

本稿を KEK Report として出版してからほぼ1年が経過した。その間、かなりは TeX で原稿を作成する過程で生じたところの、少なくない誤りを見出しては修正を施してきた。特に赤井和憲氏は丹念に閲読をされ、数式と図面を中心に貴重な指摘を多数頂いた。それらを取入れるとともに、幾つかの個所で分かりにくかった文章表現の改善も試みた結果がこの改訂版である。

(2005年1月12日)



# 目次

第 1 章	高周波加速系の概要	7
第 2 章	加速空洞の基本	11
2.1	ピルボックス空洞	11
2.2	シャント・インピーダンスを上げる	18
2.3	ビームパイプの取付け	19
第 3 章	多セル空洞	27
3.1	2 セル結合空洞	28
3.2	無限に長い周期構造の理論	34
3.3	$\pi$ モード定在波加速管	40
3.4	有限セル数の加速管理論	42
3.5	陪周期構造 (APS 加速管)	51
第 4 章	導波管との結合	59
4.1	結合の電磁場理論	61
4.2	導波管から見た空洞の入力インピーダンス	64
4.3	等価回路のもつ意味	67
第 5 章	ビーム・ローディング	73
5.1	ビーム・ローディングの等価回路表現	74
5.2	外部結合回路とビームも含む等価回路	78
5.3	加速電場のフェーザーベクトル図	82
5.4	進行波型リニアック加速管におけるビーム・ローディング	84
	参考文献	89



# 第 1 章

## 高周波加速系の概要

本稿の目的は加速空洞の基本的な性質を論じることであって、高周波加速系そのものは取扱わない。しかし空洞が高周波加速系全体のなかでどのような位置を占めるか予め知っておくと以降の議論の理解の助けになろう。そこでトリスタン AR (Accumulation Ring) [9] で使われた高周波系を典型的な例として図 1.1 に示す。地上にはクライストロンと呼ばれる、加速用高周波電力発生のための特殊な電子管とその電源が置かれている。そこで発生される大電力高周波は地下のトンネルに設置された 508.6 MHz ( $\lambda = 58.9$  cm) で動く加速空洞 4 台に供給される。それぞれの空洞は、半波長の加速セル 9 個からなる全長約 2.7 m の APS (Alternating Periodic Structure) と呼ばれる多セル構造の加速管である。1 台につき約 150 kW の高周波入力で 1.1 MV/m の加速電界 (1 台当たりの加速電圧 3 MV) を発生する。

クライストロンから空洞への高周波電力伝送には、導波管を用いる。この伝送系の途中にはサーキュレーターと呼ばれる装置がある。それは磁化されたフェライトを内蔵し、空洞からの反射電力をクライストロンがつながった口とは別の、電力を吸収する水負荷がつながった口へ廻す。これは、クライストロン出力波と空洞反射波が合成して生じるかもしれない大振幅の定在波からクライストロンを保護するためである。サーキュレーターを出たあと、高周波電力は 2 度にわたって、2 分岐され 4 台の空洞に入る。導波管は横幅 15 インチ (38.1 cm)、高さ 7.5 インチの寸法をもつ矩形断面 (WR1500 規格と呼ばれる) のアルミニウムパイプである。導波管内の波は、標準的な  $TE_{10}$  と呼ばれるモードで伝搬させる。

空洞への入力は 9 セルのうち、中央にあるセルで行われる。導波管は空洞の直前で入力結合器と呼ばれる円筒同軸構造に変換される。同軸構造の先端はループ状になっており、それが作る磁場が空洞を励振する。入力結合器にはセラミック隔壁が組み込まれていて、空洞との高周波結合以外に空洞の真空を外部と仕切る役割も果たす。

クライストロンは直進型速度変調管とも呼ばれる電子管であって、微弱な入力高周波を

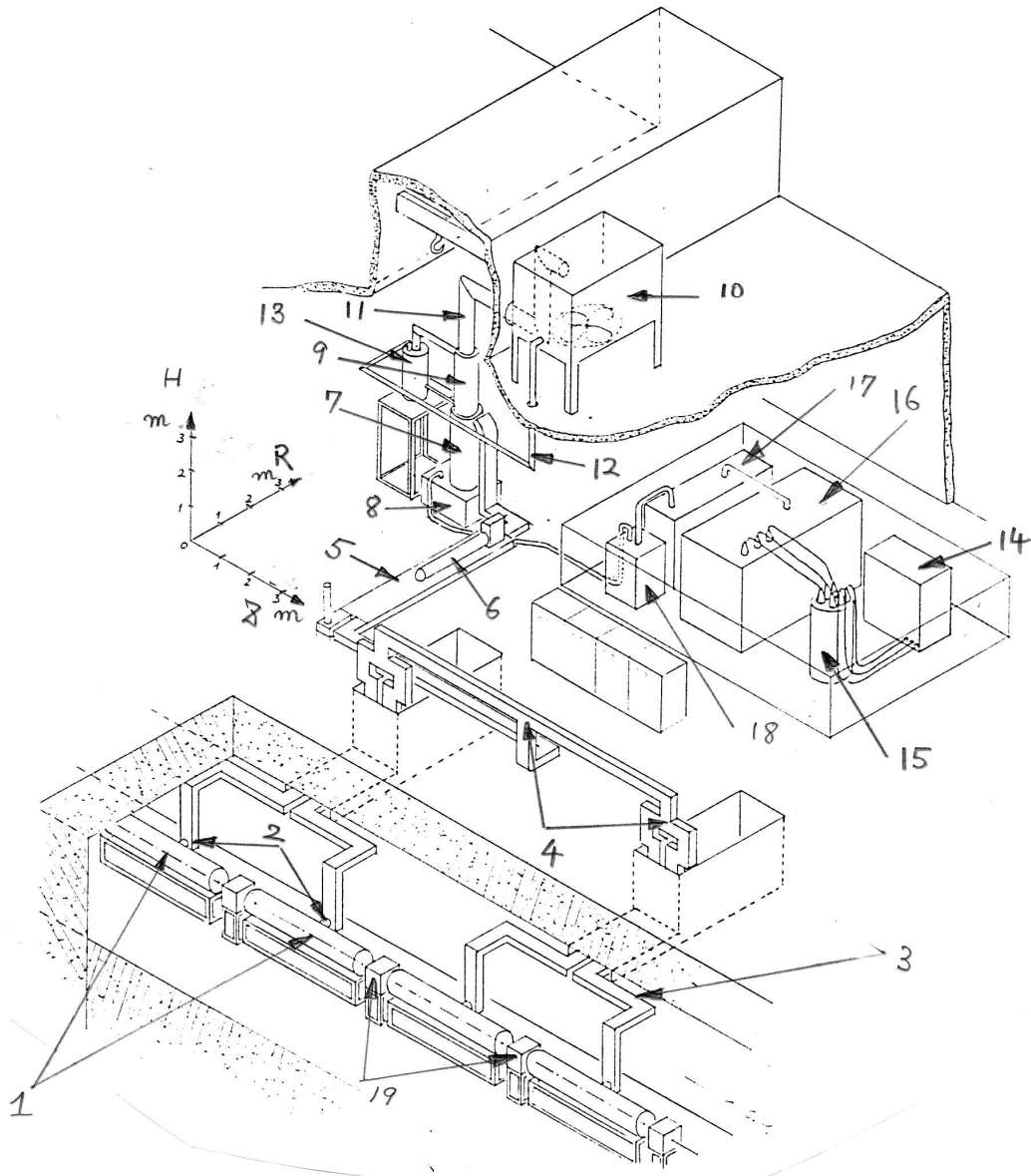


図 1.1 トリスタン AR の高周波系：1. APS 空洞、2. 入力結合器、3. 導波管、4. 電力分岐用導波管、5. サーキュレーター、6. 水負荷、7. クライストロン、8. 電子銃ソケット油タンク、9. コレクター、10. 水蒸気冷却塔、11. 蒸気排出管、12. 冷却水戻り管、13. 水タンク、14. 6.6kV 交流受電盤、15. 誘導電圧調整器、16. 高電圧整流器、17. クローバー回路、18. カソード、アノード用電源、19. Q 磁石



数段の内蔵空洞を介して大電力に増幅する。ここで使われたクライストロンでは、電子銃で発生する 90 kV、20 A の直流ビーム電力を約 1.2 MW の高周波電力に変換する (効率は約 65%)。管内の第 1 空洞に入るわずか数 W の高周波電力で速度変調を受けたビームは、数段の空洞が並んだ約 1 m のパイプを走るうちに十分に密度変調したビームに変わる。それが出力空洞を通過する際に高周波電力を放出し、自身のもつ直進運動エネルギーを減らす。ビームはさらに先にあるコレクターと呼ばれる部分で止まり、残りの運動エネルギーは熱に変わる。大電力管のコレクターは通常水冷されているが、とくにトリスタンのクライストロンの場合、沸騰蒸発時の潜熱を利用して冷却効率を上げている。なお、このクライストロンの電子銃は単純な 2 極管ではなく、第 3 の変調用アノードと呼ばれる電極も持っている。ビーム電圧を一定に保ちながら、変調用アノードに与える電圧でビーム電流量、従って高周波出力の制御が比較的容易にできる。

クライストロンへ供給する直流高電圧は商用交流電力を整流して作る。電圧変動はクライストロン出力高周波の位相変動を引き起こすので、多相整流と大容量コンデンサーを併用して出来るだけ滑らかな直流出力を作らなければならない。なお、クライストロン管内で放電が起きる場合、このコンデンサーに貯まっているエネルギーが流入してクライストロンを破壊する恐れがある。そこで電源とクライストロンの間にクローバーと呼ばれる回路を挿入する。ここでの主要部品はサイラトロンという水素ガスのグロー放電を利用したスイッチ管である。異常信号でトリガーされるとサイラトロンはショート状態になり、クライストロンを保護する。

基準高周波は周波数、位相の安定度が極めて高いものでなければならない。それはシンセサイザーと呼ばれる、水晶発振器、周波数逡倍回路、位相ロック回路から構成される装置で発生される。クライストロン出力はつねにこの基準高周波と比較され、ずれがあればフィードバック回路で修正される。

空洞内加速電磁場の振幅の制御はクライストロン出力を調整して行われる。ゆっくりではあるが、大きな出力変更は直流全電圧あるいは変調アノード電圧を動かし、ビーム電力を変えて行う。一方、速い微調整は入力高周波の位相変調による。空洞電磁場の位相を加速されるビームに対して最適の値に固定することは、ビームの安定な加速、貯蔵にとって極めて重要である。空洞は主に熱膨張により、その共振周波数が加速周波数に対してずれ、結果として位相変動が生じる。そのため加速空洞はチューナーと呼ばれる空洞体積を調整する装置をもち、共振周波数のずれを補正する。



## 第 2 章

# 加速空洞の基本

加速器、特にシンクロトロン加速空洞の基本は単セル空洞であって、最低の共振周波数を持つモードを加速に使う。空洞には加速モードよりも高い共振周波数の様々なモードが無限に存在し、一括して高次モードと呼ばれる。それらの共振周波数のどれかが貯蔵ビームのリング周回周波数の整数倍に合致すると、ビームによって強く励振される。そうして発生したモードはビームの運動に影響を与え、その不安定性をもたらす要因となる。空洞の共振モードの数は、その内部で電磁氣的に結合しているセルの数に比例するので、共振モードの分布が最もまばらで、それらの特性がよく把握できる単セル加速空洞が最も使いやすい。実際多くのリングで、独立な単セル加速空洞を複数台配置する高周波加速系を採用している。しかし出来るだけ高い加速電圧が必要であり、従って出来るだけ多くの加速セルが必要な高エネルギー加速器では、空間と費用を節約するために電磁的に結合した複数のセルからなる一体構造の空洞が採用される。その場合にはビームに有害なモードも集積されるので、その対策が重要な課題となる。

### 2.1 ピルボックス空洞

単セル加速空洞の基本形は、図 2.1 のように円筒の両端を平面で塞いだ直角円筒空洞で、ピルボックス空洞 (pillbox cavity) と呼ばれる。そこで先ずこの基本形の性質を調べ、その結果をもとに実際の空洞へと議論を進めよう。

#### 2.1.1 加速モードの電磁場

以下では円筒の軸方向を  $z$ 、動径方向を  $r$ 、軸のまわりの回転角を  $\theta$  とする円筒座標系を採用し、また円筒の半径を  $b$ 、長さを  $d$  としよう。ピルボックス空洞は、両端がシャート面である断面一定の円筒導波管の一部と考えられる。従って、空洞のモードは円筒導波

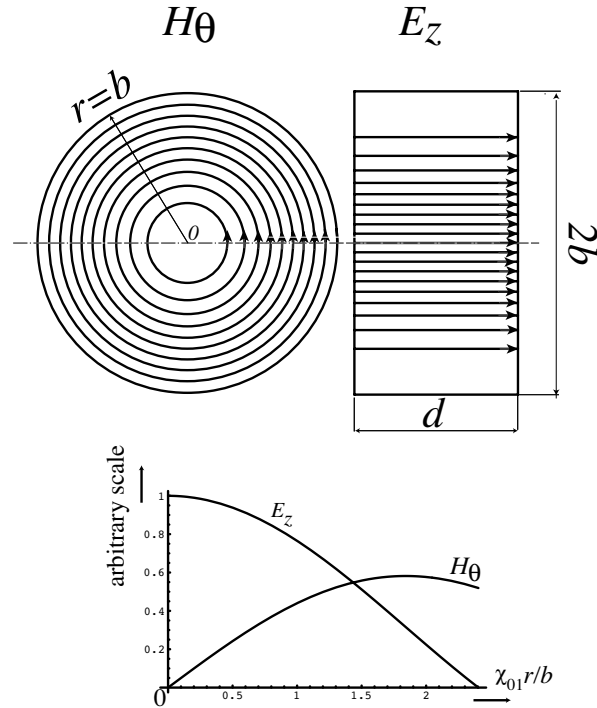


図 2.1 半径  $b$ 、長さ  $d$  のpillボックス空洞の基本モードである  $TM_{010}$  モードの電場  $E_z$  および磁場  $H_\theta$  の力線の様子、中心軸を  $z$  軸とする。前者は 0 次のベッセル関数  $J_0(\chi_{01}r/b)$ 、後者は 1 次のベッセル関数  $J_1(\chi_{01}r/b)$  に比例するが、 $z$  には依存しない。なお  $\chi_{01} = 2.4048$  は 0 次ベッセル関数の 1 番目の根である。

のものから組み立てられる。

円筒導波管のモードは、軸方向の磁場が無く、軸方向電場  $E_z$  から残りの場の成分が導かれる Transverse Magnetic Mode (TM モードまたは E モードという) と、軸方向の電場が無く、軸方向磁場  $H_z$  から残りの場の成分が導かれる Transverse Electric Mode (TE モードまたは H モードという) に分類される。

しかし加速に使われるものは、 $TM_{010}$  という最低次のモードである。その場は円筒対称で、電場  $E_z$  と回転方向磁場  $H_\theta$  の 2 成分だけである。いずれも円筒軸 ( $z$ ) 方向には一定である。なお  $TM_{010}$  の 1 番目の添字は  $E_z$  が円筒対称であること、すなわち  $\theta$  にかんする 1 回転で変化のないこと、2 番目の添字は  $E_z$  が  $r$  方向に 1 個の節をもつこと、3 番目の添字は  $E_z$  が  $z$  方向に変化しないことを示す。

図 2.1 のグラフは  $E_z$ 、 $H_\theta$  の振幅を示す。電場は中心軸上で最も大きく、動径が増大するにつれ減少し、円筒壁面で 0 になる。磁場は中心軸上では 0 であるが、動径が増大するにつれ増大し、円筒壁面ではやや減少する。通常は、電場が最大である中心軸上 ( $r = 0$ ) に粒子を走らせて加速を行う。マクスウェル方程式を円筒座標系で解けば、電場は 0 次の、磁場は 1 次のベッセル関数  $J_0$ 、 $J_1$  で次のように表される。

$$\begin{aligned}
E_z &= \hat{E}_z \cos(\omega_{010}t) \\
H_\theta &= \hat{H}_\theta \sin(\omega_{010}t + \pi) = -\hat{H}_\theta \sin(\omega_{010}t) \\
E_r &= E_\theta = H_z = H_r = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ただし、中心軸上での電場の振幅を  $E_0$  として

$$\begin{aligned}
\hat{E}_z &= E_0 J_0(\chi_{01}r/b) \\
\hat{H}_\theta &= \frac{E_0}{\zeta_0} J_1(\chi_{01}r/b)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

である。ここで共振角周波数は

$$\omega_{010} = \frac{\chi_{01}c}{b} \tag{2.3}$$

であって、空洞長さ  $d$  に依らない。また

$$\chi_{01} = 2.40483$$

は  $J_0$  の第 1 番目の根、

$$\zeta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73 \Omega$$

は真空の固有インピーダンスである。なお  $c$  は真空中の光速 ( $= 2.9979 \times 10^8$  m/s)、 $\mu_0 = 1.2566 \times 10^{-6}$  H/m と  $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$  F/m はそれぞれ真空中の透磁率と誘電率である。なお式 (2.2) から、磁場の最大は  $r/b = 0.765$  にあることが分かる。共振周波数が 500MHz (角共振周波数はこの  $2\pi$  倍) の場合を例にとると半径  $b$  は 22.95 cm になる。

### 2.1.2 $Q$ 値

次に  $Q$  値という空洞にとり大変重要な量を考える。 $Q$  値は共振時の電磁場エネルギー  $W$  と角周波数  $\omega$  の積を電力損失  $P$  で割った量に等しい。すなわち

$$Q = \frac{\omega W}{P} \tag{2.4}$$

電力損失は空洞壁での表皮電流のジュール損失と外部結合回路への流失からなるが、とくに空洞壁損  $P_{wall}$  だけを考えてときの  $Q$  値を内部  $Q$  値といい、 $Q_0$  で表す。電磁場エネルギーは場の振幅の絶対値の 2 乗を空洞体積中で積分して

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V |\hat{\mathbf{H}}|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\hat{\mathbf{E}}|^2 dV \tag{2.5}$$

と表される。また  $P_{wall}$  の一般式は

$$P_{wall} = \frac{\zeta_m}{2} \int_S |\hat{\mathbf{H}}|^2 dS \quad (2.6)$$

という空洞表面での面積分で与えられる。ただし  $\zeta_m$  は、金属の電気伝導度  $\sigma$ 、透磁率  $\mu$  を使って

$$\zeta_m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2.7)$$

として表される高周波表皮抵抗である。銅では、その物性値として

$$\sigma = 5.88 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$$

および

$$\mu = \mu_0 = 1.25664 \times 10^{-6} \text{ H/m} \quad (\text{真空の透磁率})$$

を採用すれば、周波数 500 MHz で  $\zeta_m = 5.83 \times 10^{-3} \Omega$  となる。なお高周波表皮抵抗を使えば表皮深さ  $\delta$  は

$$\delta = \frac{1}{\sigma\zeta_m} \quad (2.8)$$

と表される。

これらの関係から  $\text{TM}_{010}$  モードの内部  $Q$  値は

$$Q_0 = \frac{\zeta_0}{2\zeta_m} \cdot \frac{\chi_{01}d}{d+b} \quad (2.9)$$

で与えられる。式 (2.9) の形は、 $d$  が小さいと端板での壁損が相対的に大きくなって  $Q$  値が低下し、 $d$  が大きいと円筒単位長さ当りの壁損で決まる一定の  $Q$  値に近づくことを示している。

### 2.1.3 等価回路

あるモードの共振点付近の周波数特性は、 $L$ 、 $C$ 、 $R$  を使った等価回路で考えると便利である。ただし加速空洞の場合、シャント・インピーダンス  $R$  の定義については注意が必要である。標準的な回路論での電圧は時間平均の実効 (r.m.s.) 値を考えるが、加速器ではピーク値を標準にするので (以降では  $R$  と区別して  $R_a$  と表わす)、両者ではシャント・インピーダンスの大きさに 2 倍の違いが生じるからである。

このことに注意しながら、空洞を  $\text{TM}_{010}$  共振を図 2.2 のような  $L$ 、 $C$ 、 $R$  からなる並列共振の等価回路で表してみよう。共振周波数および  $Q_0$  値についての 2 つの関係式

$$\omega_{010} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.10)$$

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_{010}L} \quad (2.11)$$

だけでは  $L$ 、 $C$ 、 $R$  のすべては決まらない。そこで、もう 1 個の関係式として、空洞加速電圧を定義しよう。幸いに式 (2.1)、(2.2) のように電場は一定値  $E_0$  をもつ  $z$  成分のみであり、ビームが走る中心軸 ( $r = 0$ ) にそって電場を単純に線積分したものがとりあえず電圧として考えやすい量である。すなわち長さ  $d$  の空洞では

$$V(t) = E_0 d \cos(\omega_{010}t) \equiv V_0 \cos(\omega_{010}t) \quad (2.12)$$

である。

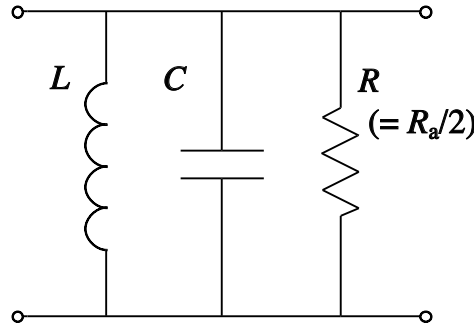


図 2.2 空洞共振の並列共振回路による表現

しかし粒子は正弦変化している電場を感じながら空洞を通過するので、粒子の受ける本当の加速電圧は式 (2.12) で与えたものより小さくなるはずである。そこで電場の時間変化も入れて  $z = -d/2$  から  $z = d/2$  まで  $z$  について積分しよう。粒子の位置を、 $t_0$  を任意の定数として  $z = v(t - t_0)$  で与えれば

$$\begin{aligned} V_a(t_0) &= E_0 \int_{-d/2}^{d/2} \cos\left(\frac{\omega_{010}z}{v} + \omega_{010}t_0\right) dz \\ &= V_0 T \cos(\omega_{010}t_0) \\ &\equiv V_a \cos(\omega_{010}t_0) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ただし

$$T = \frac{\sin\left(\frac{\omega_{010}d}{2v}\right)}{\left(\frac{\omega_{010}d}{2v}\right)} \leq 1 \quad (2.14)$$

という結果がえられる。すなわち加速電圧の振幅  $V_a$  は式 (2.12) の振幅  $V_0$  に補正係数  $T$  が掛かったもので表される ( $T$  は走行時間係数 (Transit Time Factor) と呼ばれる)。一方、振幅  $V_0$  は走行時間効果を見捨ててもよい場合の電圧であるので瞬時全電圧と呼ばれる。

加速空洞で意味をもつ電圧とは、このようにビームが実際に受ける電圧である。同じ加速空洞であっても故意に異なる軌道で「加速」するような使い方をすれば、電圧も定義しなおさなければならない。

さて交流回路理論では実効電圧振幅の2乗を損失で割ったものがシャント・インピーダンス  $R$  である。すなわち上で得られた電圧  $V_a = V_0 T = E_0 T d$  を使って

$$R = \frac{V_a^2}{2P} \quad (2.15)$$

と表わす。しかし加速器では伝統的に電圧のピーク値そのものを使ってきた。従って

$$R_a = 2R \quad (2.16)$$

となる訳である。<sup>\*1</sup>

ここで式 (2.15) に式 (2.1)、(2.2)、(2.6) を代入すると

$$R = \frac{R_a}{2} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_0^2}{\zeta_m} \frac{d^2}{\pi J_1^2(\chi_{01}) b(b+d)} T^2 \quad (2.17)$$

となって回路定数のひとつ  $R$  (または  $R_a$ ) が電磁場に関わる量で表現された。残りの2個の定数  $L$ 、 $C$  はこの式と式 (2.3)、(2.9) を式 (2.11) に代入し

$$\begin{aligned} L &= \frac{R}{\omega_{010} Q_0} \\ C &= \frac{Q_0^2}{R \omega_{010}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

のように決められる。

#### 2.1.4 シャント・インピーダンス極大のパラメーター

さてシャント・インピーダンスはある消費電力にたいする加速電圧の大きさの目安となる量である。加速周波数一定のもとで、それを極大にする  $d$  が式 (2.15)、(2.17) から簡単に求められる。特に粒子速度が光速に等しい場合は

<sup>\*1</sup> これは交流理論と違って、加速器では電圧のピーク値が大事な量であるからである。加速周波数でバンチしている加速器のビームでは、第5章で示すように、加速周波数におけるそのフーリエ成分は平均電流  $I_0$  の2倍になるので、 $R_a$  を使えば、加速電圧が単に  $R_a I_0$  と書いて便利である。



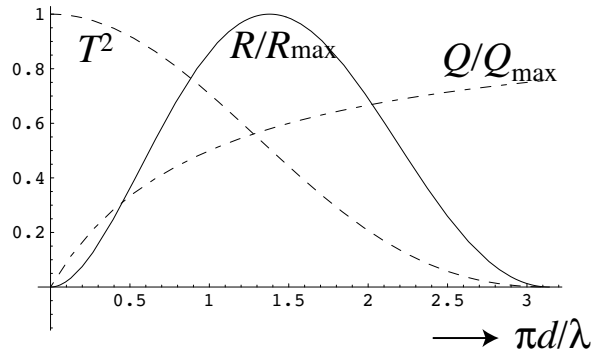


図 2.3 シャント・インピーダンスのピルボックス空洞長依存性

表 2.1  $f_{010} = \omega_{010}/2\pi = 500\text{MHz}$  における銅製最適化ピルボックス空洞の諸数値、ただし、銅の導電率は  $\sigma = 5.88 \times 10^7 \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$ 、粒子速度は光速  $c$ 、軸上電場  $E_0$  の単位は  $\text{V/m}$ 、周波数スケールでは  $E_0$  一定とする。

項目	記号		単位	周波数依存性
半径	$b$	0.2295	m	$\omega^{-1}$
長さ	$d$	0.2633	m	$\omega^{-1}$
貯蔵エネルギー	$U$	$5.9184 \times 10^{-14} E_0^2$	J	$\omega^{-3}$
壁損	$P_{wall}$	$3.91 \times 10^{-9} E_0^2$	W	$\omega^{-3/2}$
無負荷 Q 値	$Q_0$	$4.18 \times 10^4$		$\omega^{-1/2}$
シャント・インピーダンス	$R_a$	$8.98 \times 10^6$	$\Omega$	$\omega^{-1/2}$
走行時間係数	$T$	0.712		$\omega^0$

$$d = 0.44\lambda$$

で極大になる。<sup>\*2</sup> 一般には  $d$  の増加に伴う  $Q$  値の上昇と  $T$  の低下が折り合うかたちで  $R_a$  は極大値を取る。図 2.3 にはその様子を示した。表 2.1 には 500MHz で動作する最適なピルボックス空洞の諸数値をまとめておく。またそれぞれの量について周波数依存性も

<sup>\*2</sup> リニアックのように長い加速管の場合には単位長さ当たりの (加速) シャント・インピーダンス  $r_a$  も使う。加速管を多数のピルボックス空洞の連続体とみなせば、

$$r_a = \frac{R_a}{d} = \frac{(E_0 T)^2}{P_{wall}/d}$$

で与えられる。この極大値は  $d/\lambda = 0.29$  にある。これは波長の約 1/3 である。リニアック加速管で最も使われる  $2\pi/3$  構造はここに由来する [10] [11]。

付けておいたので異なる動作周波数でも容易に数値が求まるであろう。

## 2.2 シャント・インピーダンスを上げる

ピルボックス空洞についての上の結果を実用空洞の設計へと発展させるには、先ず共振周波数を一定に保ちながら直円筒形状を変形し、シャント・インピーダンスの向上をはかる。また両側面の中心にはある程度大口径のビームパイプを取付なければならないが、それによる加速電場分布への影響を調べる必要がある。そこで、

- 直角円筒断面に丸みをつけて表面積、従って壁損を減らす、
- 中心軸付近に突起（ノーズコーン）をつけ、電場を集中させる、
- ビームパイプによる開口がもたらす電磁場の乱れ具合

などについて考えてゆこう。

### 2.2.1 断面に丸みをつける

よく知られているように空洞形状の微小変形  $\delta V$  に伴う共振周波数の変化は断熱定理を使って求められる。一般の振動系において、あるパラメーターのゆっくりした変化に伴う  $n$  番目のモード固有振動数  $\omega_n$  の変化は、そのモードの振動エネルギー  $W_n$  との比が一定となる、すなわち

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\delta W_n}{W_n} \quad (2.19)$$

という関係で表される [12]。ここで  $n$  番目のモードのエネルギー変化  $\delta W_n$  は壁面での電磁場の圧力に変形量を乗じたものである。時間平均を取った圧力は次のようなマクスウェルのストレステンソル  $\bar{\mathbf{F}}_n$  で表わされる。

$$\bar{\mathbf{F}}_n = \frac{1}{4} \left( \mu_0 |\hat{\mathbf{H}}_n|^2 - \epsilon_0 |\hat{\mathbf{E}}_n|^2 \right) \mathbf{n} \equiv F_n \mathbf{n} \quad (2.20)$$

ここで電場、磁場は壁面での値であり、 $\mathbf{n}$  は壁面での外向きの単位法線ベクトルである。これを用いてエネルギーの増分  $\delta W_n$  は

$$\delta W_n = \int_{\delta V} F_n dV \quad (2.21)$$

これらの式から変形  $\delta V$  に伴う共振周波数変化は

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{4} \frac{\int_{\delta V} (\mu_0 |\hat{\mathbf{H}}_n|^2 - \epsilon_0 |\hat{\mathbf{E}}_n|^2) dV}{\frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\hat{\mathbf{E}}_n|^2 dV} \quad (2.22)$$

となる。すなわち変形により生ずる電場エネルギー  $W_{n,E}$  および磁場エネルギー  $W_{n,H}$  の変化分と

$$\delta\omega_n \propto \delta W_{n,E} - \delta W_{n,H} \quad (2.23)$$

という比例関係にある。ところで、第 2.1 節で調べた結果によれば、ピルボックス空洞の外周に近い領域では磁場エネルギーが大勢を占めると考えてよい。さらに磁場の強さもおよそ一定と考えれば、その部分の体積を一定に保つ変形で  $\delta\omega_n \simeq 0$  とすることができる。そうすると図 2.4 のように、ピルボックス空洞のコの字状断面形から同面積の円に移ることにより表面積およびそれにほぼ比例する壁損が極小に出来ることが予想される。

## 2.2.2 ノーズコーン

次は電場についてであるが、ビームが通る中心軸付近により効果的に集中できないであろうか。ピルボックス空洞の中心付近は電場エネルギーが大勢を占める。式 (2.1)、(2.2) で与えられる電場の持つエネルギーはその 75% が円筒半径の 56% までのところに集中している。これは間隔  $d$ 、半径  $\sim 0.6b$  の平行円板コンデンサーであると近似的にみなせる。

さて容量  $C$  に貯まる電場エネルギーは  $CV^2/2$  である。ここで  $C$  を変えないように中心軸付近の間隙を縮めてみる。その前後で、外周部に集中している磁場の分布はあまり変わらないと考えてよいであろう。そうすると磁束変化率に比例する起電圧  $V$  も変わらず、従って空洞の電場エネルギー  $\delta W_E$  も変わらないとしてよい。すなわち、この変形で共振周波数が変わらず、また間隙電圧も変わらない。もしこのような変形が実現されれば、走行時間係数  $T$ 、従ってシャント・インピーダンスが改善されるわけである。

ピルボックス空洞にたいし、先に述べた丸い外周部とここでの短い加速間隙という二つの変形を施した後の空洞形状の模式図が図 2.4 である。とに加速間隙が内部へ突起した形状はノーズコーン (nose cone) と呼ばれる。

## 2.3 ビームパイプの取付け

加速空洞とするには図 2.4 の中心軸にビームパイプを取付けなければならない。加速器にビームを入射する際の中心軌道からのずれに対し十分余裕があること、バンチの粒子分布の広がりより十分大きいこと、バンチがパイプ断面形状の不連続な場所を通過するとき

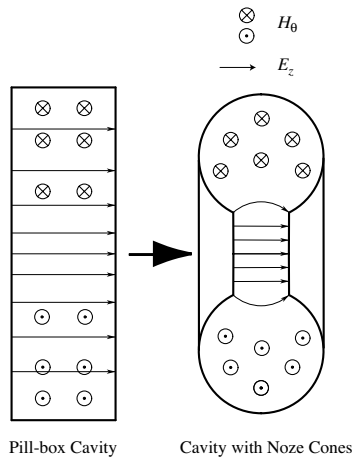


図 2.4 ピルボックス空洞からの変形: 外周部の断面を丸くし、中央部にはノーズコーンという突起を設け、共振周波数を固定しながらシャント・インピーダンスを向上させる。

に発生する電磁場（ウェーク場）が十分に小さいこと、などの条件を満足させるために、ビームパイプの直径は相当大きくしなければならない。このような開口部を持つ実際の空洞の中央部は、先のノーズコーンのところで考えた単純な平行円板対とはかなり異なったものになる。従って共振周波数や電磁場分布特性を正確に把握するにはどうしても数値計算が必要である。

### 2.3.1 PF リング 500MHz 空洞の例

ここでは単一の加速空洞の代表例として 500MHz で動作する PF リングの空洞を取上げる。この空洞は図 2.5 のように最大径が 46.9cm、加速間隙が 22cm であり、中心に直径 18cm、高さ 4cm のノーズコーンが両側から突出している。ビームパイプの内径は 10cm であるのでノーズコーンのかなりの部分が開口形状となっている。外周部は壁損を減らすために半径 13cm の円弧状をなす。

500MHz という共振周波数を満たしつつ、シャント・インピーダンスが極大値をとる寸法は SUPERFISH というコードで丹念に計算された。その結果、加速器シャント・インピーダンスとして  $R_a = 9.9\text{M}\Omega$ 、また  $Q_0$  値として 44,000 が得られた [13]。表 2.1 の  $R_a$  に比べれば約 1 割程度しか大きくなっていないが、これにはビームパイプ開口部による走行時間係数  $T$  の低下が影響している。

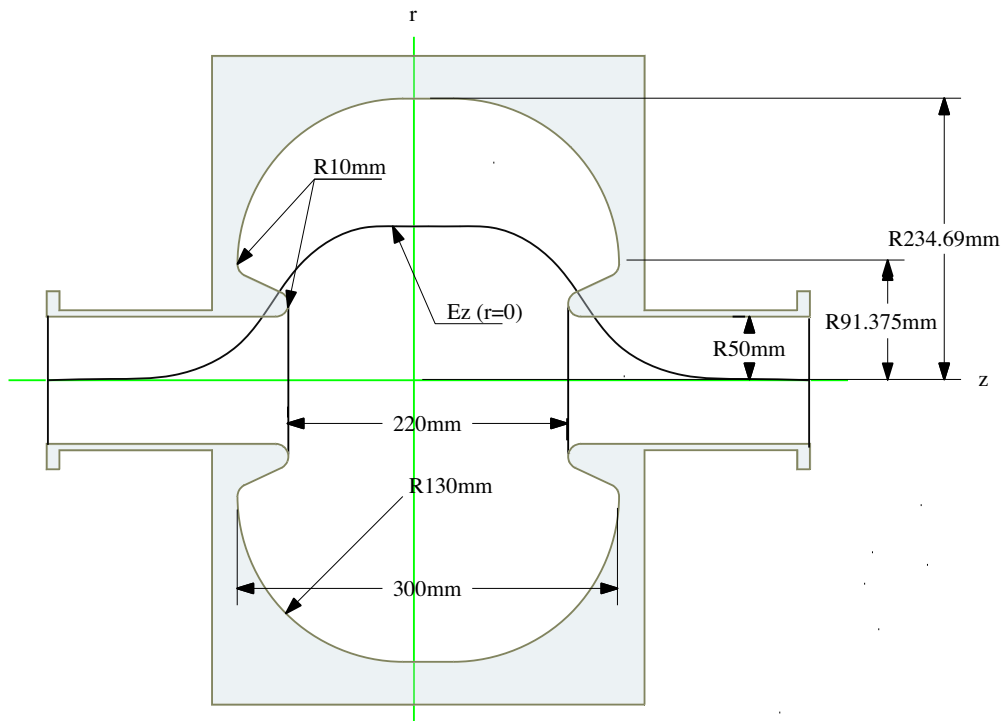


図 2.5 PF リング 500MHz 加速空洞とその軸上電場分布

### 2.3.2 ビームパイプ開口部の電磁場解析

この節の残りではピルボックス空洞にくらべ、このように大きく電場分布が変わってくるビームパイプ開口部の電磁場解析を行ってみよう。パイプの半径を  $a$  とする。興味があるのはビームが通過する  $r \leq a$  の領域の電磁場である。まず、 $r = a$  線上で電場の  $z$  方向成分  $E_z(z)$  を与えると、 $r \leq a$  の領域での電磁場が決定できることを示す。ここで問題を簡単にするため、電磁場は円筒対称な  $TM_0$  モードに限定する。

$TM_0$  モードの電磁場は単一周波数  $\omega$  で  $e^{j\omega t}$  の様に振動しているとすれば、その空間成分の一般形は次のようになる。ここで  $z$  方向に波数  $\beta_g$  をもって  $\exp(j\beta_g z)$  で変化するフーリエ成分を合成したものとして表す。なおチルド (tilde) 記号のついた  $\tilde{A}(\beta_g)$  を波数  $\beta_g$  成分の複素数振幅 (フェーザー) とする。

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_z(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} J_0\left(\sqrt{\beta^2 - \beta_g^2} r\right) e^{-j\beta_g z} d\beta_g \\
\tilde{E}_r(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} \frac{j\beta_g}{\sqrt{\beta^2 - \beta_g^2}} J_1\left(\sqrt{\beta^2 - \beta_g^2} r\right) e^{-j\beta_g z} d\beta_g \\
\tilde{H}_\theta(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} \frac{j\epsilon_0\omega}{\sqrt{\beta^2 - \beta_g^2}} J_1\left(\sqrt{\beta^2 - \beta_g^2} r\right) e^{-j\beta_g z} d\beta_g \\
\tilde{E}_\theta &= \tilde{H}_z = \tilde{H}_r = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

なお

$$\beta \equiv \frac{\omega}{c} \tag{2.25}$$

は自由空間での周波数  $\omega$  の平面波の波数である。

上の表式からわかるように、ある  $r$  にたいして、場のひとつの成分の  $z$  方向の形が与えられれば複素数振幅がすべて決定でき、その結果、任意の位置での場がすべて決まる。ここで議論しているビームパイプ付きノーズコーン型空洞の場合に特に注目するのは  $r = a$  における  $E_z$  の形である。なぜならビームパイプが  $|z| \geq d/2$  に延びているとすれば

$$E_z \begin{cases} \neq 0 & |z| \leq d/2 \text{ のとき} \\ = 0 & |z| > d/2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.26}$$

であって、加速間隙  $|z| \leq d/2$  である有限区間だけで  $E_z$  の形を考えればよく、解析が簡単になる。さらには  $d$  が波長にくらべてかなり小さければ空洞全体の高周波特性には関係なく、ノーズコーン電極対に正負の電圧を与えたときの静電場で置換えてもよい近似になるからである。

ここでは練習問題として

$$E_z = \begin{cases} E_0 = V_0/d & |z| \leq d/2 \text{ のとき} \\ = 0 & |z| > d/2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.27}$$

というもっとも簡単な関数形を考えて、解析を続けてみる。これをフーリエ積分すれば  $\tilde{A}(\beta_g)$  が次のように求まる。

$$\tilde{A}(\beta_g) = \frac{V_0}{\beta_g d} \frac{2 \sin(\beta_g d/2)}{J_0\left(\sqrt{\beta^2 - \beta_g^2} a\right)} \tag{2.28}$$

この式を利用して、中心軸と平行 ( $r = \text{const.}$ ) に速度  $v$  で走る粒子が受ける加速電圧を求めてみる。 $z = 0$  での高周波位相を  $\phi$  とすれば、電場の時間項は

$$\exp j \left( \frac{\omega z}{v} + \phi \right) \quad (2.29)$$

となる。これを式 (2.24) に代入し、 $z$  について積分すれば 粒子が受ける  $z$  方向電場による加速電圧 (複素表示) が  $\phi$  の関数として求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} J_0 \left( \sqrt{\beta^2 - \beta_g^2} a \right) e^{j[(\omega/v - \beta_g)z + \phi]} d\beta_g dz \\ &= \tilde{A}(\omega/v) J_0 \left( \sqrt{\beta^2 - (\omega/v)^2} a \right) e^{j\phi} \\ &= \tilde{A}(\omega/v) I_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - (v/c)^2} r \right) e^{j\phi} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここで最後の行は、粒子速度が光速を越えないので変形ベッセル関数  $I_0(x) = J_0(jx)$  を使って表示した。

実際の加速電圧  $V_{acc}$  は、式 (2.30) の実数部分である。式 (2.25)、(2.28) も使って計算すれば

$$\begin{aligned} V_{acc} &= \text{Re} \left[ \tilde{V}(\phi) \right] \\ &= V_0 \frac{\sin \left( \frac{\omega d}{2v} \right)}{\left( \frac{\omega d}{2v} \right)} \frac{I_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - (v/c)^2} r \right)}{I_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - (v/c)^2} a \right)} \cos \phi \\ &\equiv V_a \cos \phi \end{aligned} \quad (2.31)$$

という結果になる。ここで  $\phi = 0$  のときに得られる最大加速電圧を  $V_a$  と表した。特に  $v = c$  の場合には

$$V_a = V_0 \frac{\sin(\beta d/2)}{\beta d/2} \quad (2.32)$$

という式が得られる。これは偶然にもピルボックス空洞で求めた走行時間係数  $T$  の表式と一致している。また中心軸からのずれ  $r$  に無関係であるが、それは式 (2.30) で分かるように  $v = c$  ではベッセル関数の変数が  $r$  によらず 0 になるからである。

さて式 (2.27) の近似によって式 (2.28) で表されるフーリエ成分の場合、式 (2.24) の積分が実行でき、電磁場が具体的に求まる [14]。その場合、変数  $\beta_g$  についての積分路を複素平面に拡張するが、特異点が

$$\beta_g = \pm j\Gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.33)$$

に存在する。ここでベッセル関数  $J_0$  の  $n$  番目の根を  $\chi_{0n}$ 、自由空間の波数を  $\beta = 2\pi/\lambda$  として

$$\Gamma_n \equiv \sqrt{(\chi_{0n}/a)^2 - \beta^2} \quad (2.34)$$

である。積分は、 $z < -d/2$  では複素平面の上半無限円、 $z > d/2$  では下半無限円を実数軸に接続した閉曲線路でおこなう。また  $|z| \leq d/2$  では  $\sin(\beta_g d/2)$  を  $\exp(j\beta_g d/2)$  と  $\exp(-j\beta_g d/2)$  に分解し、前者には上半無限円、後者には下半無限円の積分路を取る。留数は簡単に求まり、積分の結果は

$$\frac{E_z(r, z)}{E_0} = \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{0n} \cosh(\Gamma_n z) e^{-\Gamma_n d/2}}{\Gamma_n^2 a^2} \frac{J_1(\chi_{0n} r/a)}{J_1(\chi_{0n})} \quad (2.35)$$

となる。これを使えばパイプ内の任意の点での電磁場が計算できる。

その応用として対向するパイプの内面が寄与する容量を求めてみよう。パイプ内面からその先端へ流入する全電流の大きさは

$$I = 2\pi a H_\theta(a, -d/2) \quad (2.36)$$

である。この式の磁場は、式(2.35)をマクスウェル公式に代入して求まる。電圧  $V_0 = E_0 d$  と容量  $C$  は

$$C = \frac{I}{j\omega V_0} \quad (2.37)$$

の関係にある。そこで磁場の具体形を入れた式(2.35)を式(2.36)に代入すれば

$$C = C_0 f\left(\frac{d}{a}, \beta a\right) \quad (2.38)$$

の形で容量が表される。ここで  $C_0$  は半径  $a$ 、間隙長の  $d$  の平行円板間の静電容量

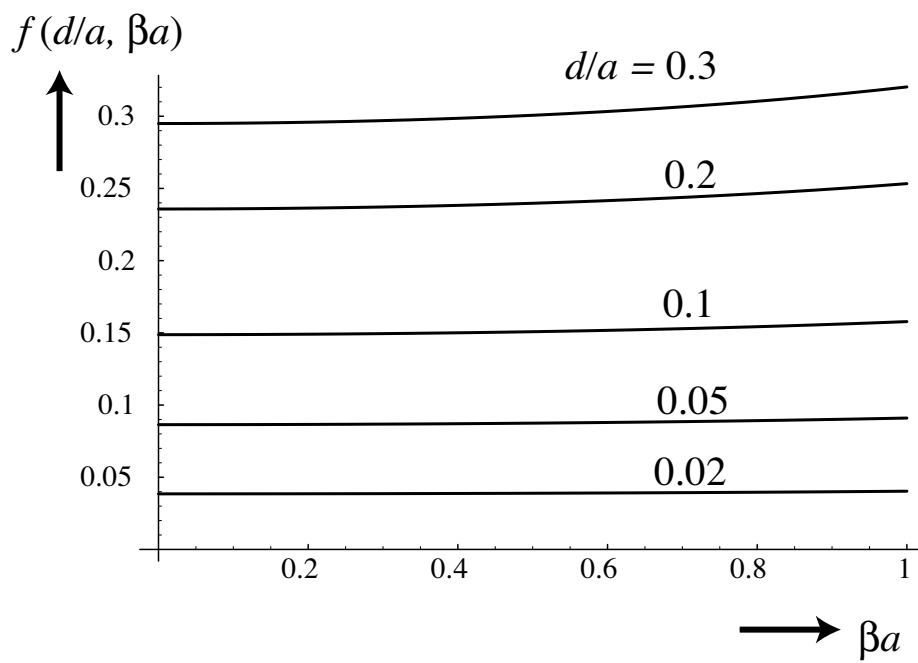
$$C_0 = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d} \quad (2.39)$$

である。また  $f$  は  $C_0$  に対する低減係数(中空のビームパイプによる容量の低減を表す)であって

$$f(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-x\sqrt{\chi_{0n}^2 - y^2}}}{\chi_{0n}^2 - y^2} = \frac{J_1(y)}{yJ_0(y)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{\chi_{0n}^2 - y^2}}}{\chi_{0n}^2 - y^2} \quad (2.40)$$

という関数形をとる。図2.6に式(2.40)のグラフを示す。



図 2.6 パイプ間容量公式における補正項  $f(d/a, \beta a)$  の計算例



## 第3章

# 多セル空洞

前節では電磁場の単純、明解な単セル加速空洞について考察したが、高い加速電圧が必要な高エネルギー電子、陽電子リングでは出来るだけ数多くの空洞を配置しなければならない。単セル加速空洞を単に並べるだけでは両側に突き出たビームパイプが占める空間がもったいないし、なによりも高価で壊れやすい高周波入力結合器（カップラー、coupler）が空洞の数だけ増えてゆくことに問題がある。そこで、セル間は電磁氣的に結合し、ある程度の数のセルをまとめて、一つの入力結合器から高周波電力を供給する多セル空洞が広く用いられてきた。

多セル空洞では、まずそれを進行波モードあるいは定在波モードのどちらで動作させるかを決めなければならない。リングを周回する粒子が電子または陽電子のいずれか一方のみであれば、進行波モードを使うことができる。ただ進行波モードでは、あるセルの電磁場がそれより上流にある全てのセルの壁損や寸法誤差に影響される。したがって下流のセルに行くにつれ共振特性の制御が加速度的に困難になる。従って、有害な高調波モードとビームのもつ周波数との同調を避けたいリングの空洞には一般に適さない。

定在波モード動作の場合、セル間の位相差  $\phi$  を  $0 \leq \phi \leq \pi$  のどこに選ぶかを考えなければならない。定在波は対向する進行波の重ね合わせである。通常、ビームはその一方に同期し加速される。しかし他方は壁損を伴うものの、同期条件を満たさないので加速電圧に寄与しない。従ってシャント・インピーダンスは半減する。しかし  $\pi$  モード ( $\phi = \pi$ ) は例外である。対向する二つの進行波の間の位相差がこの場合  $2\pi$  に等しいので、ビームには両者とも同期するからである。こうして、高エネルギーリングでは  $\pi$  モード定在波加速空洞が専ら採用されている。

ただし  $\pi$  モードについては分散特性のうえで注意が必要である。結合セル構造の分散特性は以下で議論するように、連成振動子モデルで記述される。その場合、 $\phi = 0$  または  $\pi$  では分散曲線の勾配（群速度に比例する）が0になる、すなわち、 $\frac{\partial \omega}{\partial \phi} = 0$  であることはよく知られている。そうすると加速モードに隣接するモードとの周波数差が殆どないの

で、隣接モードが容易に励振される問題がある。これを避けるために、セル数を少なくするか、 $\pi$ モードでも  $\frac{\partial \omega}{\partial \phi} \neq 0$  となる陪周期構造 (bi-periodic structure) を採用する。

### 3.1 2セル結合空洞

まず、最も基本的な2セル結合空洞について、基本的な性質を調べよう。図3.1のように、2つのピルボックス空洞が中心軸に開いた円孔でつながっているとす。

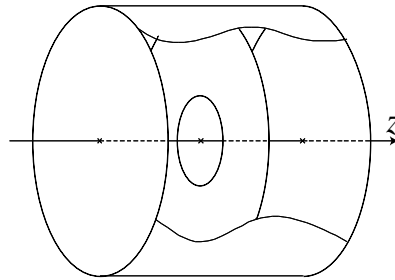


図3.1 円孔で結合した2セルピルボックス空洞

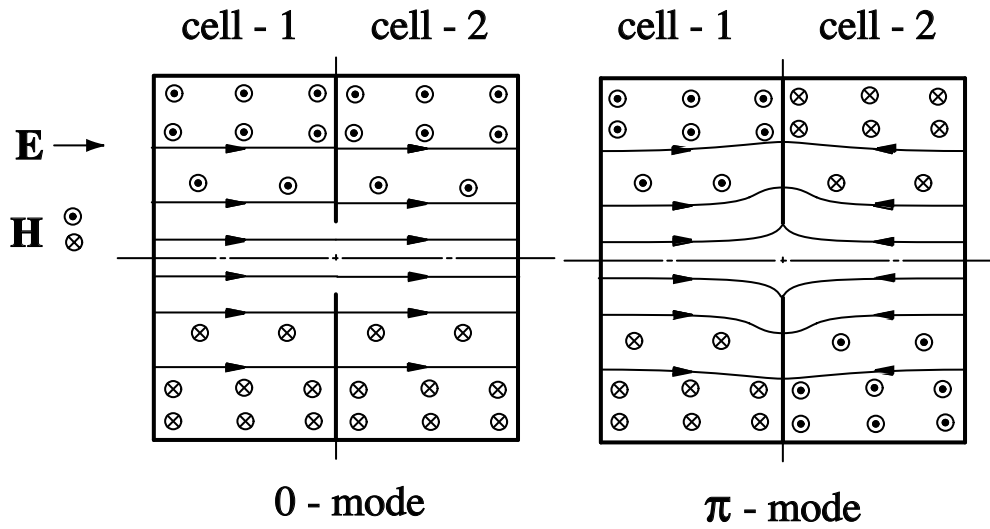
#### 3.1.1 等価回路モデル

同形のセルが2個何らかの方法で結合した連成振動系では、2セル間の振動が同位相 (位相差 = 0) になるものと、逆位相 (位相差 =  $\pi$ ) の2つの基準モード (normal mode) が存在する。図3.1の構成で、前節で議論した  $TM_{010}$  モードの場合を例に取れば、2つの基準モードは図3.2のようになる。同位相の0モード電磁場は円孔の影響を全く受けない。しかし逆位相の $\pi$ モードでは円孔面で電気力線が弾きあう。これは図2.2で容量  $C$  の減少に相当すると考えてよく、新たに相互容量  $C'$  を直列に追加することによって表現することができる。すなわち、単セルの等価回路図2.2は図3.3のように変更される。なお簡単のために壁損はさしあたり0、言い換えればシャント・インピーダンス  $R$  は無限大としている。

さて、以下では結合孔径は十分に小さく、従って結合度も十分に小さいとしよう。すなわち

$$C \ll C' \quad (3.1)$$

の条件で議論を進める。図3.3の回路でセル1、2の右回り電流をそれぞれ  $\tilde{i}_1$ 、 $\tilde{i}_2$  とすれば、

図 3.2 2セル結合空洞の0および $\pi$ モード電磁場

$$\begin{aligned} \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \tilde{i}_1 + \frac{1}{j\omega C'} (\tilde{i}_1 - \tilde{i}_2) &= 0 \\ \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \tilde{i}_2 + \frac{1}{j\omega C'} (\tilde{i}_2 - \tilde{i}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成立する。この方程式から、 $\tilde{i}_1 = \tilde{i}_2$ 、すなわち同相の(位相差が0)の0モードおよび、 $\tilde{i}_1 = -\tilde{i}_2$ 、すなわち逆相(位相差が $\pi$ )の $\pi$ モードという2つの解が容易に求まる。具体的に書きあらわせば

0モード：

$$\begin{aligned} \tilde{i}_1 &= \tilde{i}_2 \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\pi$ モード：

$$\begin{aligned} \tilde{i}_1 &= -\tilde{i}_2 \\ \omega &= \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2C}{C'}} \equiv \omega_\pi \\ &\sim \omega_0 \left( 1 + \frac{C}{C'} \right) > \omega_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。

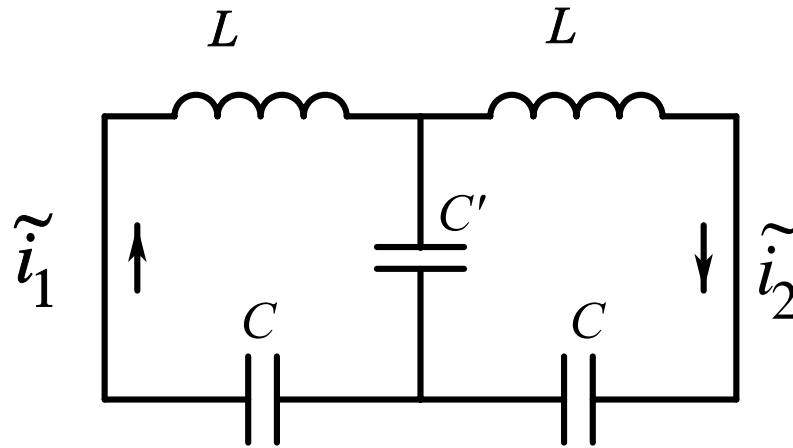


図 3.3 2セル結合空洞の等価回路

電気力線がはじきあうと、そこでの電場エネルギーが減少し、前節で触れたように共振周波数の上昇をもたらすので  $\omega_0 < \omega_\pi$  となる。<sup>\*1</sup>

### 3.1.2 結合度の計算

さて以上のような回路論的な考察を一步踏み出して、電磁場を用いて結合の様子を調べてみよう。結合孔が小さいときには、上のような相互容量という集中定数による表現が妥当であることが証明される。多セル構造の電磁場は、結合孔における境界条件をショート面もしくはオープン面という両極端の場合に分けると、理解しやすい。ショート面とは金属表面と同じ境界条件

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad \text{および} \quad \mathbf{H}_{\perp} = 0 \quad (3.5)$$

を要求するものである。一方、オープン面とは磁気的なショート面であって、その面上で

$$\mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad \text{および} \quad \mathbf{H}_{\parallel} = 0 \quad (3.6)$$

<sup>\*1</sup> なお、中心軸から外れたところに穴を開ける結合方式もある。この場合、磁場による結合であり、等価回路上では相互容量  $C'$  を相互誘導  $L'$  で置き換えればよい。 $\pi$  モードでは、磁場エネルギーが減少したように見えるので、 $\omega_0 > \omega_\pi$  である。

でなければならない。図 3.2 では 0 モードがショート面、 $\pi$  モードがオープン面の境界条件を満たしている。

図 3.2 の左側のセルの電磁場を、結合孔での境界条件を考慮しながら解析しよう。まず境界条件がショート面の場合の電場、磁場の固有関数を表すために以下のように規格化されたベクトル  $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{h}$  を導入する。セル空間中では

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{e} &= \frac{\omega_0}{c} \mathbf{h} \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \frac{\omega_0}{c} \mathbf{e} \\ \int_{cell} \mathbf{e}^2 dV &= \int_{cell} \mathbf{h}^2 dV = 1\end{aligned}\quad (3.7)$$

であり、結合孔面上では

$$\mathbf{e}_{\parallel} = 0 \quad \text{および} \quad \mathbf{h}_{\perp} = 0 \quad (3.8)$$

を満足するものである。オープン面の場合は、固有関数を  $\mathbf{e}'$ 、 $\mathbf{h}'$  として上と同様に

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{e}' &= \frac{\omega_{\pi}}{c} \mathbf{h}' \\ \nabla \times \mathbf{h}' &= \frac{\omega_{\pi}}{c} \mathbf{e}' \\ \int_{cell} \mathbf{e}'^2 dV &= \int_{cell} \mathbf{h}'^2 dV = 1\end{aligned}\quad (3.9)$$

および結合孔面上で

$$\mathbf{e}'_{\perp} = 0 \quad \text{および} \quad \mathbf{h}'_{\parallel} = 0 \quad (3.10)$$

とする。

ここで、この2つのモードの固有関数とそれぞれの共振周波数  $\omega_0$ 、 $\omega_{\pi}$  の間にはどのような関係が成り立っているかを調べる [15]。それには次のようなベクトル恒等式

$$\begin{aligned}& \int_V (\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &= \int_S (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}\quad (3.11)$$

で、 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{e}$ 、 $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{e}'$  と代入しよう。ここで  $V$  は図 3.2 の左セル体積を意味し、 $\mathbf{n}$  はそのセルの表面  $S$  における外向きの単位法線ベクトルである。表面  $S$  においては

$$(\mathbf{e} \times \nabla \times \mathbf{e}') \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.12)$$

が常に成り立つことに注意し、また定義式 (3.7) を使えば

$$\left[ \left( \frac{\omega_\pi}{c} \right)^2 - \left( \frac{\omega_0}{c} \right)^2 \right] v_{0\pi} = \frac{\omega_0}{c} \int_{iris} (\mathbf{e}' \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.13)$$

という式が得られる。<sup>\*2</sup> ただし iris は結合孔を意味し、また  $v_{0\pi}$  は

$$v_{0\pi} \equiv \int_{cell} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' dV \quad (3.14)$$

と定義する。式 (3.13) の右辺は結合の強さを表している。(形の上ではエネルギー流を表すポインティング・ベクトルに比例している。) そこで結合定数として無次元の数

$$k \equiv \frac{c}{\omega_0} \int_{iris} (\mathbf{e}' \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.15)$$

を導入すれば、式 (3.13) は

$$\left[ \left( \frac{\omega_\pi}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right] = \frac{k}{v_\pi} \quad (3.16)$$

と書き直せる。なお固有関数展開の性質から  $v_{0\pi}$  は 1 を越えないが、結合孔が十分に小さいときは、セル体積の大部分において  $\mathbf{e}$  と  $\mathbf{e}'$  は一致するので

$$v_{0\pi} \simeq 1$$

とみなせる。

次にピルボックス空洞の  $TM_{010}$  モードの場合の結合定数  $k$  を電磁場から具体的に計算しよう。結合孔の半径を  $a$  とするが、それは自由空間波長  $\lambda$  に比べて十分小さいものとする。そうすると円孔の近くでは、図 3.2 のオープンモードの電場は静電ポテンシャルから導いたもので近似できる。これは隔壁の左右で向きが反転するが、隔壁から十分遠方では一定の  $E_z$  となるポテンシャルである。隔壁が  $z = 0$  にあるとすれば、 $z \rightarrow \pm\infty$  で  $E_z \rightarrow \pm e_0$  (一定)、 $E_r \rightarrow 0$  となる。このようなポテンシャルは、変数変換

$$\begin{aligned} z &= a\xi\eta \\ r &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1+\eta^2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

<sup>\*2</sup> ここでは  $TM_{010}$  モードだけを考えている。しかしセルの全ての固有関数についてこの式 (3.13) が成立する。



を使って

$$\Phi = \frac{2a}{\pi} e_0 (\xi \tan^{-1} \xi + 1) \quad (3.18)$$

で表される [16]。結合孔面上でのオープンモードの電場固有関数  $e'$  は  $r$  成分だけであるが、それは上のポテンシャルから次のように導ける。

$$e'_r(iris) = -\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{z=0} = \frac{2r}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} e_0 \quad (3.19)$$

次にショートモードの磁場固有関数  $\mathbf{h}$  を求めなければならない。ショートモードの電場固有関数  $\mathbf{e}$  には  $z$  成分しかなく、中心軸近くでは  $e_z \simeq e_0$  としてよい。すると式 (3.7) から  $\mathbf{h}$  は  $\theta$  成分しかなく、それは

$$h_\theta(iris) = -\frac{\omega_0 r}{2c} e_0 \quad (3.20)$$

と近似できる。式 (3.19)、式 (3.20) を式 (3.15) に代入すれば、結合定数は結局

$$k = \frac{4}{3} a^3 e_0^2 \quad (3.21)$$

となる。ピルボックス空洞各セルの半径を  $b$ 、長さを  $d$  とし、式 (3.7) の規格化を適用すれば

$$e_z = e_0 J_0 \left( \frac{\chi_{01} r}{b} \right) \quad (3.22)$$

であって、規格化係数は

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{J_1(\chi_{01})} d} \quad (3.23)$$

である。すると

$$k = \frac{4a^3}{3\pi b^2 d J_1^2(\chi_{01})} \simeq 1.57 \frac{a^3}{b^2 d} \quad (3.24)$$

という具体形が求まる。実用的なりニアック加速管では通常  $k \propto a^{\sim 3.5}$  であるので、式 (3.24) はその傾向をほぼ表しているといえる。しかし絶対値自身はかなり小さく計算される。それは、この計算では円盤の仕切り壁の厚さが無限に薄くアイリス境界が電場の特異点になっているのにたいし、実際の壁厚は波長の数 % あって電場が集中しないためである。

## 3.2 無限に長い周期構造の理論

### 3.2.1 等価回路モデル

前節の結果を進めて、ここでは同等なセルが無限につながっている、いわゆる無限周期構造について、その基本的な性質をまとめておく。まず等価回路モデルから始めるが、回路としては図 3.3 を拡張した図 3.4 のような容量性結合回路の場合を考える。ここでも電流は右回りを基準にとり、また結合は十分に弱いとする。すなわち

$$C \ll C''$$

である。

この回路で  $n$  番目のセルの電流を  $\tilde{i}_n$  とすれば

$$\left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \tilde{i}_n + \frac{2\tilde{i}_n - \tilde{i}_{n+1} - \tilde{i}_{n-1}}{j\omega C'} = 0 \quad (3.25)$$

という固有方程式が得られる。隣り合うセルでは電流の位相差が  $\phi$  であるとして、この式で

$$\tilde{i}_{n+1} = \tilde{i}_n e^{-j\phi} \quad (3.26)$$

と置いてみる。すると

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 [1 + k(1 - \cos \phi)]^{1/2} \\ &\simeq \omega_0 \left[ 1 + \frac{k}{2}(1 - \cos \phi) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

という解が得られる。ただし

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad k \equiv 2\frac{C}{C'} (\ll 1) \quad (3.28)$$

である。

この関係を  $|\phi| \leq \pi$  の基本ブリリアン帯について描くと図 3.5 のようになる。この曲線を分散曲線 (dispersion curve) といい、 $\omega_0$  と  $\omega_0(1+k)$  の間の周波数を通過帯 (pass band) という。通過帯に属するひとつの周波数  $\omega$  にはセル間の位相差が  $\pm|\phi|$  の2つの波が存在する。

それらの振幅を  $\tilde{A}_\pm$  と表せば、各セルの電流が

$$\tilde{i}_n = \tilde{A}_+ e^{jn|\phi|} + \tilde{A}_- e^{-jn|\phi|} \quad (3.29)$$

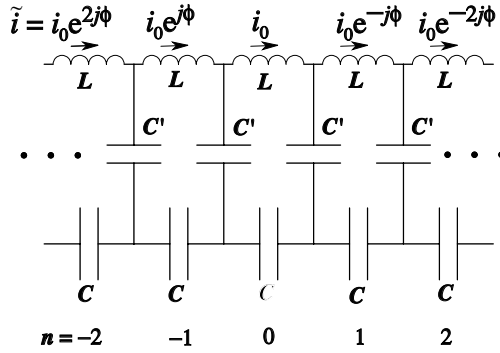


図 3.4 無限周期構造の等価回路

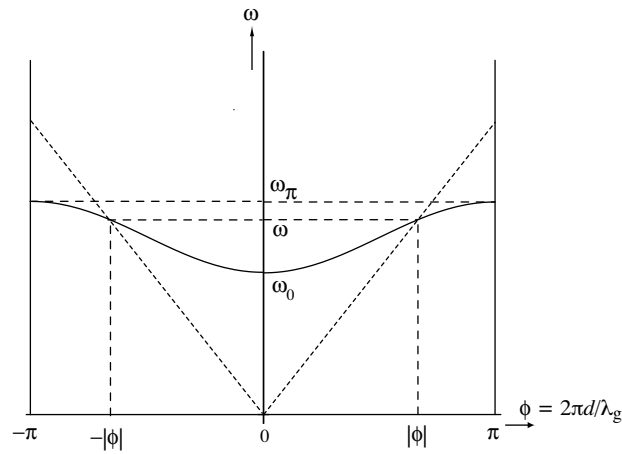


図 3.5 無限周期構造の分散曲線 (基本ブリリアン帯)。d はセルの長さ、 $\lambda_g$  は管内波長。

という形になる。フェーザー表示から実数表示に戻れば、これは

$$i_n = A_+ \cos(\omega t + n|\phi| + \psi_+) + A_- \cos(\omega t - n|\phi| + \psi_-) \quad (3.30)$$

ということである。ここで  $A_\pm (\geq 0)$  および  $\psi_\pm$  は実数の定数である。また + の添字のついた波は図 3.4 で左向き ( $n$  が減少する向き)、- のものはその反対方向に進む波を表わす。特に  $\phi = 0$  および  $\phi = \pi$  の場合は左右両方向の波が縮退し、同じ定在波を表わすことになるのは明らかである。なお一般の  $\phi$  では、 $\tilde{A}_+$  と  $\tilde{A}_-$  のどちらも 0 でないとき、構造内の波は進行波が一部混じった定在波であるが、とくに両者の絶対値が等しいときは完全な定在波となる。

セルの幾何学的な長さを  $d$  とすれば、波の管内波長  $\lambda_g$ 、波数  $\beta_g$  には

$$\lambda_g \equiv \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{2\pi d}{|\phi|} \quad (3.31)$$

の関係がある。また進行波の位相速度  $v_p$  は

$$v_p = \pm \frac{\omega}{\beta_g} = \pm \frac{\omega d}{|\phi|} \quad (3.32)$$

となり、図 3.5 で原点  $(0, 0)$  と点  $(\pm|\phi|, \omega)$  を結ぶ点線の勾配は  $v_p/d$  に等しい。

### 3.2.2 壁損も考慮した等価回路

次に、各セルでの微小な壁損も取入れた、もう少し現実に近づいたモデルを考える。それは図 3.6 で示すように直列抵抗  $r$  で表わし

$$r \ll \omega L \quad (3.33)$$

を仮定する。この場合の回路方程式は、式 (3.25) で  $j\omega L \rightarrow j\omega L + r$  という置換えをすればよい。すなわち

$$\left( j\omega L + r + \frac{1}{j\omega C} \right) \tilde{i}_n + \frac{2\tilde{i}_n - \tilde{i}_{n+1} - \tilde{i}_{n-1}}{j\omega C'} = 0 \quad (3.34)$$

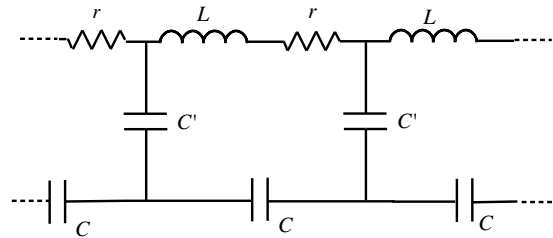


図 3.6 壁損を考慮した等価回路

この式については2つの場合を区別して考える必要がある。ひとつは、全てのセルの電流が同位相で振動する（完全な）定在波の場合である。その場合、 $\omega$  は複素数となり、振幅は時間的に減衰する。減衰の様子は、よく知られているように共振回路の  $Q$  値を使って  $\exp(-\omega t/Q)$  で表わされる。 $Q$  値は

$$Q = \frac{\omega L}{r} = \frac{1}{\omega C r} \quad (3.35)$$

となるが、図 3.2 のような並列抵抗  $R$  を使えば

$$Q = \frac{R}{\omega L} = \omega R C \quad (3.36)$$

とも書ける。

もうひとつは、 $\omega$  が実数解をもつ進行波の場合であって、振幅がセルごとに、すなわち空間的に減衰していく。この場合式 (3.26) は

$$\tilde{i}_{n+1} = \tilde{i}_n e^{-j\phi - \alpha} \quad (3.37)$$

という形になる。ここで  $\alpha$  はセルごとの減衰を表わす正の実数である。これを式 (3.34) に代入すれば、減衰定数  $\alpha$  がセルごとの位相差  $\phi$  の関数として得られる。以下では式 (3.33) の場合について計算する。まず  $\phi = 0$  および  $\phi = \pi$  の近くを除けば、次式がえられる。

$$\alpha \simeq \frac{\omega Cr}{k \sin \phi} = \frac{1}{kQ \sin \phi} \quad (3.38)$$

なお周波数と位相差の関係は  $\alpha$  についての 1 次近似の範囲で式 (3.27) が成立する。

つぎに  $\phi = 0$  の近くでは

$$\omega \simeq \frac{\phi}{Cr} \quad \text{および} \quad \alpha \simeq -2 \ln(2/k) \quad (3.39)$$

であり、 $\phi = \pi$  の近くでは

$$\omega \simeq \frac{r}{L(\pi - \phi)} \quad \text{および} \quad \alpha \simeq -2 \ln(\pi - \phi) \quad (3.40)$$

となる。これらの関係から、定在波に縮退する特別の位相の近くでは、損失のない構造のもつ理想的な分散曲線からのずれが大変大きくなることが分かる。図 3.7 にはその様子を模式的に示しておく。

### 3.2.3 Bevensee の結合理論

最後に、このような無限数セル周期構造についても前節の 2 セル構造と同様な電磁場理論を作り、分散方程式を求めてみよう。なお簡単のために、壁損が無く、単位セルの形状がその中央面に関して左右対称である場合を考える。電磁場のセル毎の進相は  $\phi$  とし、またセルの長さを  $d$  とすれば、電磁場は一般に

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z + d) &= e^{-j\phi} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z + d) &= e^{-j\phi} \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.41)$$

となる [4]。先の 2 セルの場合、 $\phi$  の取りうる値は 0 または  $\pi$  のみであったが、今度はその間の任意の値について解析しなければならない。そのような一般的な場合の理論は R.

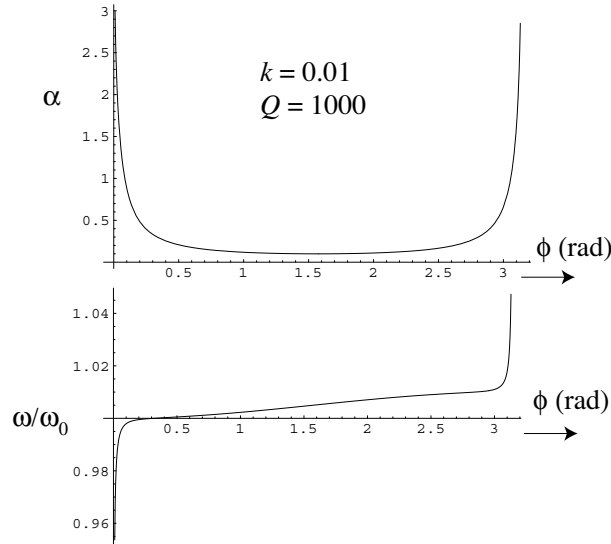


図 3.7 壁損がある無限周期構造の分散曲線： $Q = 1000$  及び  $k = 0.01$  の場合の計算。周波数  $\omega$  および減衰定数  $\alpha$  は  $0.01 \leq \phi \leq 0.99\pi$  の範囲の単位セル当たり位相差  $\phi$  について計算している。なお  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  である。

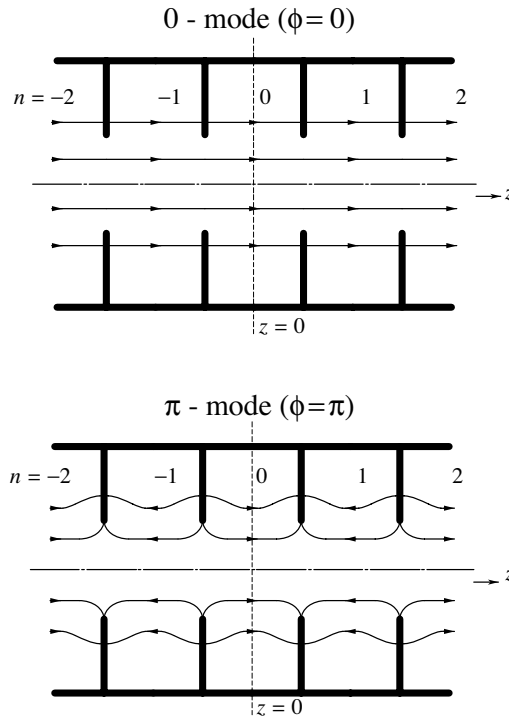
M. Bevensee [15] [17] によって作られており、ここではそれに沿って話を進める。具体的には、前節で例にとった基本的なピルボックス空洞の  $TM_{010}$  で議論する。まず図 3.8 のように、各セルの中心を  $z = nd$  (ただし  $n$  は整数) に置き、そのセルを「セル ( $n$ )」あるいは「cell ( $n$ )」と表そう。無限数セル周期構造であるからセル (0) を中心にして、その両隣のセルとの結合を論じて一般性を失わない。ここでもショートモード ( $\phi = 0$ ) およびオープンモード ( $\phi = \pi$ ) のパターンが基本となる。

任意の  $\phi$  について、セル (0) の電磁場 ( $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ ) を考えるとき、セル内の電磁場は全体として同一位相で振動している、すなわち、定在波であると近似する。結合孔は十分に小さいとしているので、この近似はセル内の殆どの領域で妥当である。さらに、結合孔面上の電場として、両側セルにまたがる位相の階段的飛躍の平均を取るという近似を更におこなう。

このように電磁場はセル内で同位相とする近似では、セル (0) のフェーザー場 ( $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ ) を実数場 ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) で表してよい。そこで式 (3.11) の  $\mathbf{A}$  をショートモードの固有関数  $\mathbf{e}$  に、 $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{E}$  に置換え、セル (0) の体積について積分を実行する。そうすると、式 (3.13) を発展させた

$$\left\{ \left[ \frac{\omega(\phi)}{\omega(0)} \right]^2 - 1 \right\} = \frac{c}{\omega(0) A(\phi)} \left[ \int_{right\ iris} + \int_{left\ iris} \right] (\mathbf{E} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{ndS} \quad (3.42)$$

という分散式が得られる。ただし

図 3.8 無限周期構造の 0 および  $\pi$  モードの電場姿態

$$A(\phi) \equiv \int_{\text{cell}(0)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} dV \quad (3.43)$$

である。ここで式 (3.42) 右辺の表面積分を評価するために  $\mathbf{E}$  を固有関数で展開するとき、ショートモード  $\mathbf{e}$  はではなく、オープンモード  $\mathbf{e}'$  を使わなければならない。なぜならショートモード  $\mathbf{e}$  ではアイリスでのベクトル内積が恒等的に 0 になるからである。そこでオープンモードでの展開を

$$\mathbf{E} \simeq A' \mathbf{e}'$$

ただし

$$A' = \int_{\text{cell}(0)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}' dV \quad (3.44)$$

と表そう。結合孔は小さいとしているので  $A \simeq A'$  である。

さて左右それぞれの表面積分について、上に述べたように隣接セルとの平均値近似をとる。すなわち右の結合孔については

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\text{cell}(0), \text{right iris}) &= \frac{A'}{2} \mathbf{e}'(\text{cell}(0), \text{right iris}) + \frac{A'}{2} e^{-j\phi} \mathbf{e}'(\text{cell}(1), \text{left iris}) \\
&= \frac{A'}{2} (1 - e^{-j\phi}) \mathbf{e}'(\text{cell}(0), \text{right iris})
\end{aligned} \tag{3.45}$$

であり、左については

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\text{cell}(0), \text{left iris}) &= \frac{A'}{2} \mathbf{e}'(\text{cell}(0), \text{left iris}) + \frac{A'}{2} e^{j\phi} \mathbf{e}'(\text{cell}(-1), \text{right iris}) \\
&= \frac{A'}{2} (1 - e^{j\phi}) \mathbf{e}'(\text{cell}(0), \text{left iris})
\end{aligned} \tag{3.46}$$

となる。なお上の2つの式では、 $\mathbf{e}'$ のパターンはセル中央面にかんして反対称であり、アイリスでの動径方向成分は左右で符号が反転することを利用している。さて法線ベクトル  $\mathbf{n}$  も左右で反転するので、結局式 (3.42) は式 (3.15)、(3.44)、(3.45)、(3.46) を使って

$$\begin{aligned}
\left\{ \left[ \frac{\omega(\phi)}{\omega(0)} \right]^2 - 1 \right\} &\simeq \frac{A'}{A} \frac{c(1 - \cos \phi)}{\omega(0)} \int_{\text{right iris}} (\mathbf{e}' \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \frac{A'}{A} k (1 - \cos \phi)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

という分散式に帰着することが分かる。結合孔が無限に小さくなる極限では当然  $A'/A \rightarrow 1$  となり、等価回路による式 (3.27) と一致する。すなわち、結合孔が小さい周期構造の分散特性は、等価回路理論で記述されるものと同等であることが明らかになった。

### 3.3 $\pi$ モード定在波加速管

互いに逆行する進行波の重ね合わせである定在波を用いて加速しようとするとき、セル間の位相差が  $\pi$  である場合だけ両進行波とも加速に寄与できることはこの章の初めに述べた。この節ではこれをもう少し詳しく議論しよう。

Floquet の定理によれば、 $z$  方向に長さ  $d$  の周期で断面が変化する構造を伝搬する波の一般的な形は

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_z(x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{n,z} e^{-j(\beta_g + \frac{2n\pi}{d})z} \\
&= e^{-j\beta_g z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{n,z} e^{-j\frac{2n\pi}{d}z}
\end{aligned} \tag{3.48}$$



となる。この式で単位長さ当たりの進相を表す項  $e^{-j\beta_g z}$  を括りだした残りは  $d$  の周期関数になっている。なお  $\beta_g$  は正としているので、この式は  $z$  の  $-\infty$  から  $\infty$  へ進む右向き波を表す。 $z \rightarrow -z$  とすれば、反対に  $\infty$  から  $-\infty$  への左向き進行波になる。

ここで  $\omega_0$  と  $\omega_\pi$  の間の適当な周波数  $\omega_a$  の波が伝搬するとしよう。また  $\omega = \omega_a$  と分散曲線の基本ブリリアン帯での交点の横座標を  $\phi_a$  とする。すると図 3.9 で黒丸が右向き進行波の各高調波成分が現れる位相であり、白丸が左向き進行波のそれである。通常、加速には基本ブリリアン帯の成分を使う。その位相速度  $v_p$  は

$$v_p = \frac{\omega_a}{\phi_a} d \quad (3.49)$$

であるが、長距離にわたり加速を行うには、これがビーム速度  $v_b$  に等しくなければならない（同期条件）。従って、右向き進行波の高調波成分および左向き進行波のすべての成分は同期条件を満たさないことが図 3.9 から分かる。

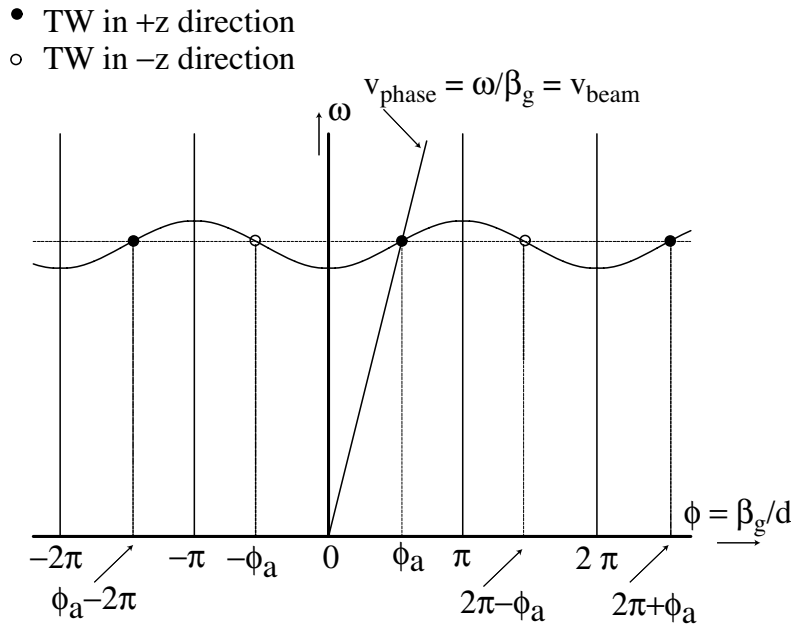


図 3.9 空間高調波成分も含めた分散曲線、黒丸は  $+z$  方向進行波成分、白丸は  $-z$  方向進行波成分、 $\phi_a$  は加速位相である。

さてここで  $\phi_a$  を限りなく  $\pi$  に近づけてみよう。そうすると黒丸と白丸が限りなく近寄り、図 3.10 のようになる。これから右向き進行波の基本成分以外に左向き進行波の  $2\pi - \phi_a$  にある成分も同期条件を満たし、加速に寄与することが分かる。これは  $\pi$  モードでは右向きと左向きの区別がつかなくなって縮退することを意味する。双方が加速に寄与するので加速効率、いいかえるとシャント・インピーダンスが高くなる。この事情は一般に  $m\pi$  モードでも同じであるが、次数  $m$  が高くなるにつれ成分の相対的な大きさが減少す

るので、加速には有効ではない。しかし粒子速度が遅く、基本波 ( $m = 1$ ) では  $d$  が小さくなりすぎる場合には高調波モードが利用されることがある。

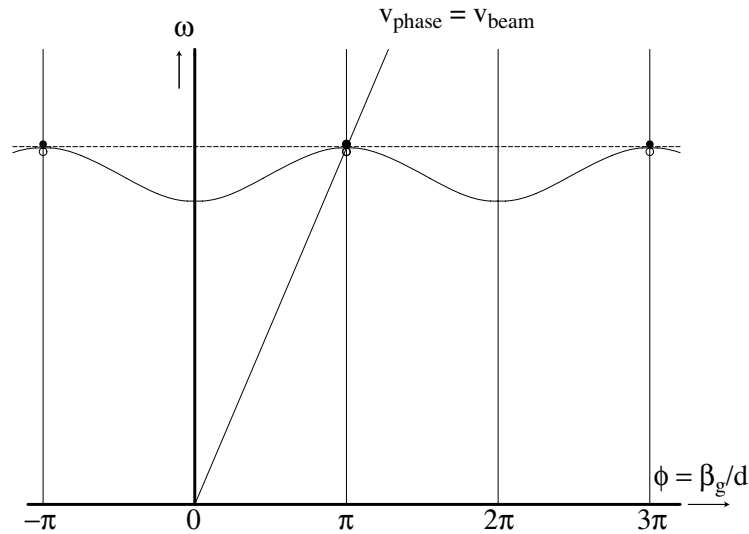


図 3.10  $\phi_a \rightarrow \pi$  の場合の空間高調波成分を含めた分散曲線

ところで  $\pi$  モードでは  $\frac{\partial \omega}{\partial \phi} = 0$ 、すなわち、群速度が 0 となってエネルギーが伝わらない。従って、空洞内の壁損やビームローディングによる電力損失がある場合、 $\pi$  モード以外のモードも励振される。その結果、外部電力入力窓から遠ざかるにつれて電磁場の振幅減少と位相変化がもたらされ、加速効率が急激に低下する。その状況は式 (3.40) から計算できるところである。このように定在波空洞はいくらでも長くすることはできず、PEP [18] や PETRA [19] で実用化されたものはセル数で 5 のものである。

### 3.4 有限セル数の加速管理論

有限個数 ( $N$  としよう) のセルからなる加速管は両端で周期性が崩れており、周期構造ではなく、準周期構造である。その基本的な性質を、図 3.4 を書き直した  $N$  セル構造の等価回路 (図 3.11) で調べてみよう。とりあえず簡単のために抵抗分のない理想的な場合を考える。ここで特に注意しなければならないのは両端のセルである。それは片隣りとのみ結合しているので、その固有周波数は一般のセルと異なるはずである。また両端の境界条件から 0 モードは存在できない。

### 3.4.1 Rees 理論

有限数セルの加速管のモード特性については Rees [20] の理論があり、ここではその概要を説明する。

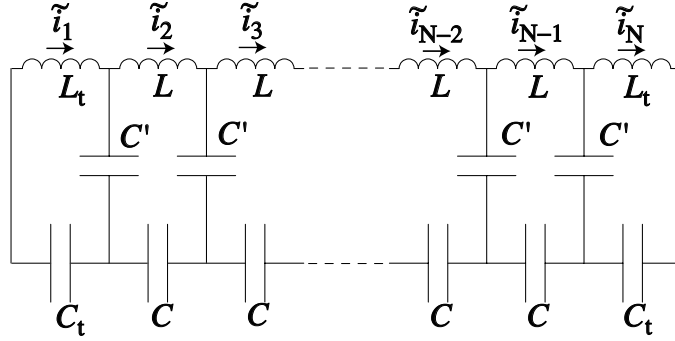


図 3.11  $N$  セル構造の等価回路

まず、一般のセルについては、回路定数  $L$ 、 $C$ 、結合容量  $C'$  を使ってその固有共振周波数および結合定数を

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad k \equiv \frac{2C}{C'} \quad (3.50)$$

と表わす。一方、端部セルについては共振周波数回路定数を  $L_t$ 、 $C_t$  として

$$\omega_t \equiv \frac{1}{\sqrt{L_t C_t}}, \quad k_t \equiv \frac{2C_t}{C'} \quad (3.51)$$

と表わす。ここで結合があまり大きくない場合を考えるとすれば  $L \simeq L_t$ 、 $C \simeq C_t$ 、 $k \simeq k_t \ll 1$  としてよいであろう。そうすると  $k$  についての 1 次近似で

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{k}{2}\right) \omega_t^2 \tilde{i}_1 - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_2 &= \omega^2 \tilde{i}_1 \\ (1+k) \omega_0^2 \tilde{i}_2 - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_1 - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_3 &= \omega^2 \tilde{i}_2 \\ &\vdots \\ (1+k) \omega_0^2 \tilde{i}_{N-1} - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_{N-2} - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_N &= \omega^2 \tilde{i}_{N-1} \\ \left(1 + \frac{k}{2}\right) \omega_t^2 \tilde{i}_N - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_{N-1} &= \omega^2 \tilde{i}_N \end{aligned} \quad (3.52)$$

という関係が成り立つ。

ここで  $\pi$  モードとし、さらにどのセルでの振幅が等しいという加速器で要求される条件を課してみる。すなわち

$$\tilde{i}_1 = -\tilde{i}_2 = \tilde{i}_3 = \cdots = (-1)^{N-1} \tilde{i}_N \quad (3.53)$$

として式 (3.52) を解けば、一次近似で

$$\frac{\omega_t^2}{\omega_0^2} = 1 + k \quad (3.54)$$

となって、端部セルの固有周波数が決まる。また  $\pi$  モードの周波数  $\omega_\pi$  についても

$$\frac{\omega_\pi^2}{\omega_0^2} = 1 + 2k \quad (3.55)$$

という解が得られる。

一般にこの構造の  $N$  個の固有モードは

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{i}} = \left(\frac{\omega}{\omega_\pi}\right)^2 \tilde{\mathbf{i}} \quad (3.56)$$

という固有方程式を解いて求められる。ただし

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1-\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{k}{2} & 1-\frac{k}{2} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

および

$$\tilde{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \tilde{i}_1 \\ \tilde{i}_2 \\ \tilde{i}_3 \\ \vdots \\ \tilde{i}_{N-2} \\ \tilde{i}_{N-1} \\ \tilde{i}_N \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

である。その  $m$  番目の固有値を  $(\omega_m/\omega_\pi)^2$  と表わせば

$$\begin{aligned} \frac{\omega_m}{\omega_\pi} &= \sqrt{1 - 2k \cos^2\left(\frac{m\pi}{2N}\right)} \\ &\simeq 1 - k \cos^2\left(\frac{m\pi}{2N}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.59)$$

である。またそれに対応する固有ベクトル  $\tilde{\mathbf{i}}_m = \{\tilde{i}_{m,n}\}$  (ただし  $n = 1, 2, \dots, N$ ) は、 $\tilde{\mathbf{i}}_m^2 = 1$  と規格化して

$$\tilde{i}_{m,n} = \sqrt{\frac{2}{(1 + \delta_{mN})N}} \sin\left[\frac{(2n-1)m\pi}{2N}\right] \quad (3.60)$$

で与えられる。ここで  $n$  はセル番号、 $\delta_{mN}$  はクロネッカーのデルタ記号である。なお  $m = N$  の場合は  $\pi$  モードであって  $\omega_N = \omega_\pi$  あることは明かである。典型的な  $N = 5$  の場合について、これらの公式で計算した固有値および固有ベクトルを図 3.12 および図 3.13 に示す。ここで結合定数  $k$  の大きさには典型的な 0.05 を選んでいる。

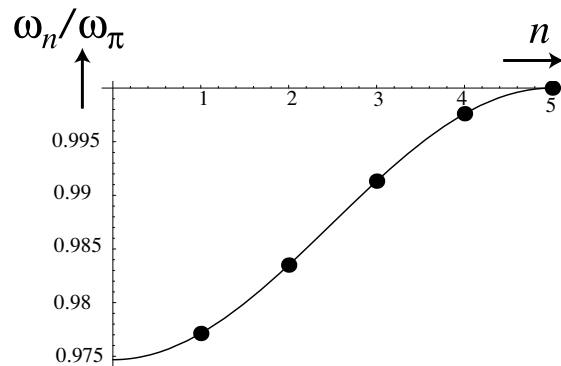


図 3.12 N=5 の場合の固有値、結合定数  $k = 0.05$

### 3.4.2 壁損の考慮

次に、空洞の壁損も考慮に入れるために図 3.11 の等価回路に小さな抵抗分  $r$  を追加した図 3.14 のような回路で解析する。この場合、式 (3.52) は次のように変更される。

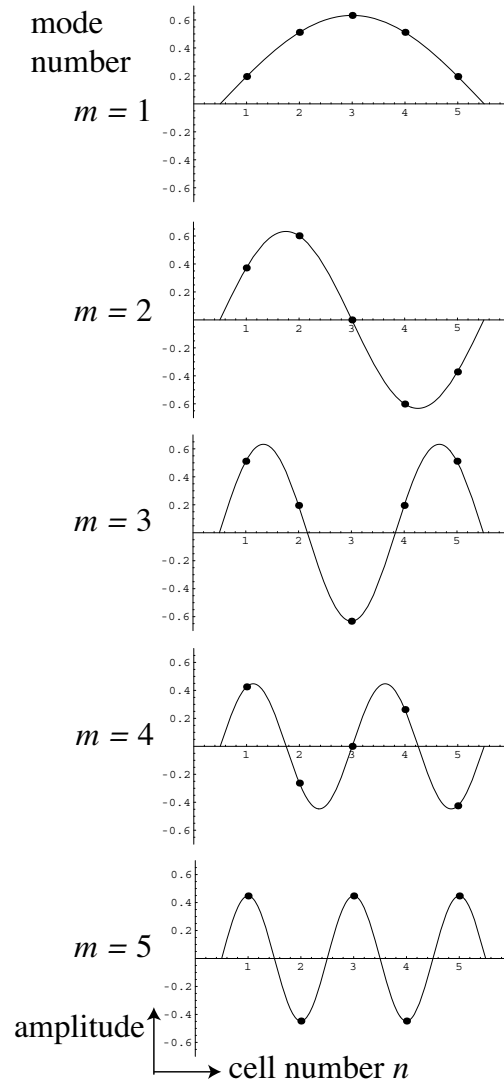
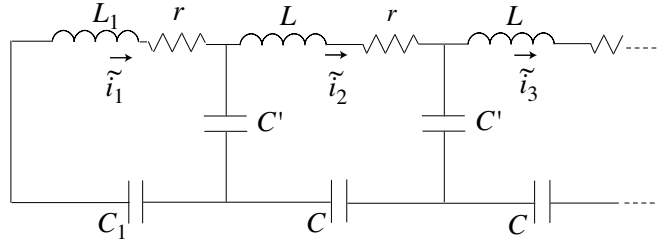


図 3.13 図 3.12 の場合の 5 個のモードの振幅

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{k}{2} + j\omega C_{tr}\right) \omega_t^2 \tilde{i}_1 - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_2 &= \omega^2 \tilde{i}_1 \\
 (1 + k + j\omega Cr) \omega_0^2 \tilde{i}_2 - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_1 - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_3 &= \omega^2 \tilde{i}_2 \\
 &\vdots \\
 (1 + k + j\omega Cr) \omega_0^2 \tilde{i}_{N-1} - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_{N-2} - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_N &= \omega^2 \tilde{i}_{N-1} \\
 \left(1 + \frac{k}{2} + j\omega C_{tr}\right) \omega_t^2 \tilde{i}_N - \frac{k\omega_0^2}{2} \tilde{i}_{N-1} &= \omega^2 \tilde{i}_N
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

図 3.14 壁損を表す抵抗  $r$  を図 3.11 に追加した回路図

これは式 (3.56) で摂動行列  $\mathbf{H}_1$  が付加されたとして表される。すなわち

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}_1) \tilde{\mathbf{i}} = \left( \frac{\omega}{\omega_\pi} \right)^2 \tilde{\mathbf{i}} \quad (3.62)$$

これまでの小結合近似ではこの摂動行列  $\mathbf{H}_1$  は式 (3.36) を使って

$$\mathbf{H}_1 \simeq \begin{pmatrix} \frac{j}{Q} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{j}{Q} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{j}{Q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{j}{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{j}{Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{j}{Q} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

と表せる。そうすると摂動  $\mathbf{H}_1$  による固有値および固有ベクトルの変化分は 1 次近似の範囲で、式 (3.59) および (3.60) で与えた 0 近似の固有値および固有ベクトルを使って

$$\Delta \left( \frac{\omega_m}{\omega_\pi} \right)^2 = \tilde{\mathbf{i}}_m^t \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{i}}_m \quad (3.64)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{i}}_m = \sum_{p=1, \neq m}^N \left[ \frac{\tilde{\mathbf{i}}_p^t \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{i}}_m}{\left( \frac{\omega_p}{\omega_\pi} \right)^2 - \left( \frac{\omega_m}{\omega_\pi} \right)^2} \right] \tilde{\mathbf{i}}_p \quad (3.65)$$

と書ける。ここで添字  $t$  は転置行列を意味する。式 (3.64) に式 (3.63) を代入すれば  $m$  番目の固有値は

$$\frac{\omega_m}{\omega_\pi} \rightarrow \frac{\omega_m}{\omega_\pi} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) \quad (3.66)$$

という、減衰項が付加された、よく知られた結果が得られる。一方、固有ベクトルについては、 $\mathbf{H}_1$  は対角行列であるので式 (3.65) の右辺は恒等的に 0 となって第 0 近似と同じである。

上のような1次摂動計算は応用範囲が広い。たとえば  $n$  番目のセルだけ固有共振周波数に

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \delta\omega_0 \quad (3.67)$$

のような誤差をもつ場合を考える。その場合、 $\mathbf{H}_1$  の  $n$  番目の対角項は

$$\frac{j}{Q} \rightarrow \frac{j}{Q} + \frac{2\delta\omega_0}{\omega_0} \quad (3.68)$$

となる。この新しい摂動行列のもとでは式(3.65)の右辺は0ではない。とくに大事な  $\pi$  モードの場合、 $\tilde{\mathbf{i}}_N$  以外のベクトルが混じって、最早、平坦場ではなくなる。なかでも式(3.65)右辺のうち、分母が最小となる  $p = N - 1$  モードの混合の影響が大きい。なおこの解析を個々のセルが固有共振周波数に誤差を持つ場合に拡張することは容易である。

### 3.4.3 外部励振源の追加

さらに現実のモデルに近づくために外部励振源がある場合を考える。図3.15のように、あるセルが電圧  $\tilde{V}e^{j\omega t}$  で外部から励振されている場合は式(3.62)が

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)\tilde{\mathbf{i}} - \left(\frac{\omega}{\omega_\pi}\right)^2 \tilde{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -j\omega C\tilde{V} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

のように、励振項を追加した形になることは容易に確かめられる。

### 3.4.4 $\pi$ モード振幅のセル依存性

最後にこの方法で、有限な  $Q$  値をもつ  $\pi$  モード定在波型加速管を周波数  $\omega = \omega_\pi$  で外部励振した場合の各セルでの振幅を具体的に計算してみよう。簡単のために、励振は最も左端のセル ( $n = 1$ ) で行われ、励振振幅は

$$-j\omega C\tilde{V} \equiv \tilde{I} \quad (3.70)$$

と置く。すると式(3.69)は  $\mathbf{E}$  を  $N$  行  $N$  列の単位行列として



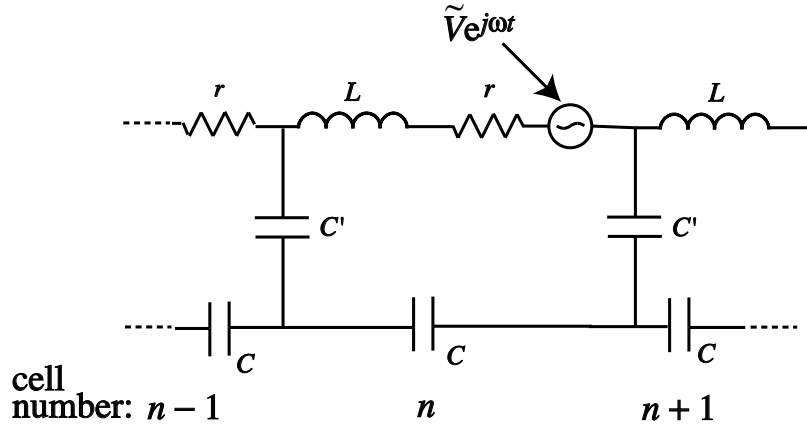


図 3.15 励振源がある場合の等価回路

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \tilde{I} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

と書き直される。この式の解の固有ベクトル展開を

$$\tilde{\mathbf{i}} = \sum_1^N a_m \tilde{\mathbf{i}}_m \quad (3.72)$$

と置く。式 (3.60) を使えば各振幅  $a_m$  は

$$\begin{aligned} a_N &= -j \frac{Q}{\sqrt{N}} \tilde{I} \\ a_m &= -j \frac{Q}{1 - jQ\Delta_m} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2N}\right)}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \tilde{I} \quad (m \neq N) \end{aligned} \quad (3.73)$$

となる。ただし

$$\Delta_m \equiv \left( \frac{\omega_m}{\omega_\pi} \right)^2 - 1 \quad (3.74)$$

であるが、これは  $\pi$  モードからの周波数差の目安を表している。これから  $Q$  値は十分大きいセル数  $N$  はそうでもないときは  $a_N$  以外は無視してよいことが分かる。すなわち純粋の  $\pi$  モードに極めて近い励振であるとしてよい。しかしセル数  $N$  が大きくなってゆくと、もう少し詳しい解析が必要になる。 $\pi$  モード以外の成分の中で  $a_{N-1}$  が圧倒的に大

きいことは式 (3.74) から云える。そこで  $\pi$  モードにこの隣接モードのみが混ざると簡単化して解析を進めよう。ここでその混合効果を見るために両端のセル ( $n = 1$  および  $N$ ) における振幅  $\tilde{i}_1$  および  $\tilde{i}_N$  を求めてみる。式 (3.60)、(3.73) からそれらは

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{i}_1}{\tilde{I}} &\simeq -j \frac{Q}{\sqrt{N}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2} \sin \left[ \frac{(N-1)\pi}{2N} \right]}{1 - Q\Delta_{N-1}} \right\} \\ \frac{\tilde{i}_N}{\tilde{I}} &\simeq -j \frac{Q}{\sqrt{N}} \left\{ (-1)^{N-1} + \frac{\sqrt{2} \sin \left[ \frac{(N-2)(N-1)\pi}{2N} \right]}{1 - Q\Delta_{N-1}} \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

が得られる。特にセルごとの損失の効果を際立たせるために、 $Q$  値として 1000 という比較的小さい値を選んで、振幅の比の絶対値  $|\tilde{i}_N/\tilde{i}_1|$  および位相差  $\arg \left[ (-1)^{N-1} \tilde{i}_N/\tilde{i}_1 \right]$  を計算してみると、それぞれ図 3.16 および図 3.17 のようになる。この結果からセル数が増加するとともに振幅、位相のずれが大変目立ってくるのがわかる。それは、 $N$  が大きいとき  $\Delta_{N-1}$  が

$$\Delta_{N-1} \simeq -\frac{k\pi^2}{2N^2} \quad (3.76)$$

のように  $N^2$  で減少するからである。このように  $\pi$  モード加速管ではセル数の増加につれて加速効率が急激に劣化することに注意しなければならない。

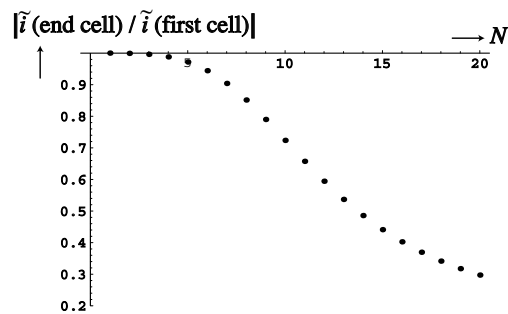


図 3.16 有限な  $Q$  値の  $N$  セル構造で、一端から  $\pi$  モードを励振したとき、終端セルの相対振幅。  $Q = 1000$  および  $k = 0.05$  を仮定。

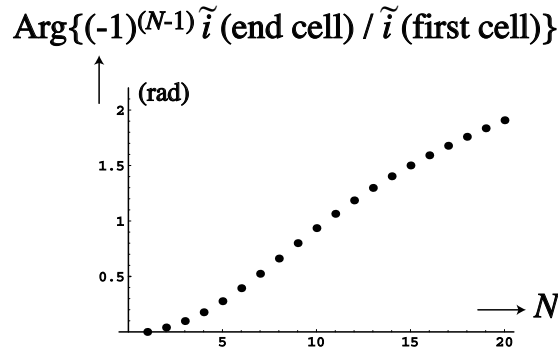


図 3.17 有限な  $Q$  値の  $N$  セル構造で、一端から  $\pi$  モードを励振したとき、終端セルの相対位相。  $Q = 1000$  および  $k = 0.05$  を仮定。

## 3.5 陪周期構造 (APS 加速管)

### 3.5.1 陪周期構造と群速度

前節では  $\phi_a = \pi$  の定在波加速管はシャント・インピーダンスが高いものの、抵抗損失分によって加速電場の一様性が失われ、セル数をむやみに増やせないことを見た。これは分散曲線の勾配が動作点で 0、いいかえれば群速度が 0 となることの結果である。しかし群速度だけで云えば  $\pi/2$  モードで最大である。ただ定在波にしたとき、電磁場が励振されるセルは一つおきになるのでシャント・インピーダンスが半減する。そこで考えられたのが図 3.18 のような APS (alternating periodic structure) [21] [22] という構造で、電磁場のないセルを短くした分、加速セルを長くするというものである。

しかしこれでは長短のセル 1 組を単位とする周期構造となり、結局  $\pi$  モードに戻るようになって群速度もまた 0 となる。このような構造の分散曲線は、以下で議論するように長短それぞれのセルに伴った 2 本の組からなるが、確かに  $\pi$  モードでは一般的に勾配が 0 である。しかし長短セルそれぞれの固有周波数をうまく選ぶと 2 本の分散曲線が  $\phi = \pi$  で合流し、勾配も 0 ではなくなる。このようにして  $\pi$  モードに近いシャント・インピーダンスを持つが群速度は 0 でないような定在波加速管を作ることができる。このような一群の加速管を陪周期構造 (biperiodic structure) という。ひとつおきの短セルは定常状態では励振されず加速に寄与しないが、通常の  $\pi/2$  モード加速管の場合と同じく、励振されている加速セル間の電磁場エネルギーに不均衡が生じた場合に素早くそれを復元する役割を持つ。そこでこのセルを加速セルとは区別して結合セル (coupling cell) または結合空洞と呼ぶ。

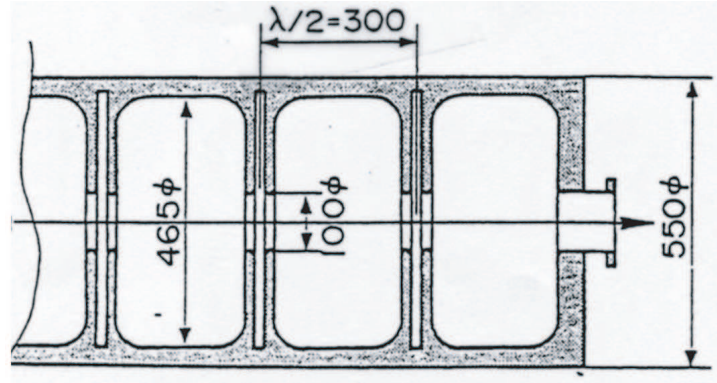


図 3.18 500 MHz 用 APS 構造

### 3.5.2 陪周期構造の様々な例

陪周期構造には APS 以外に色々なものが考えられている。代表的なものを列挙すると、図 3.19 に示すように側結合構造 (SCS、side coupled structure) [23]、環状結合構造 (ACS、annular coupled structure) [24]、ディスク・アンド・ワッシャー (DAW、disk-and-washer) 構造 [25] などがある。

### 3.5.3 等価回路による解析

さて図 3.19 は損失のない無限長の理想的な陪周期構造の等価回路である。長短それぞれのセルの回路定数を区別するために添字  $l, s$  を用いる。すると長短セル 1 組からなる単位周期についての位相の進みを  $\phi$  としたときの方程式は

$$\begin{aligned} \left( j\omega L_l + \frac{1}{j\omega C_l} + \frac{2}{j\omega C'} \right) \tilde{i}_l &= \frac{e^{j\frac{\phi}{2}} + e^{-j\frac{\phi}{2}}}{j\omega C'} \tilde{i}_s \\ \left( j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s} + \frac{2}{j\omega C'} \right) \tilde{i}_s &= \frac{e^{j\frac{\phi}{2}} + e^{-j\frac{\phi}{2}}}{j\omega C'} \tilde{i}_l \end{aligned} \quad (3.77)$$

となる。なおこの式で長短セル間の位相差を  $\phi/2$  と置けるのは、各セルの形が  $z$  軸の反転にかんし対称であるとしているからである。ここで角周波数と結合定数をそれぞれ

$$\omega_l \equiv \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} \quad \text{および} \quad \omega_s \equiv \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (3.78)$$

$$k_l \equiv \frac{2C_l}{C'} \quad \text{および} \quad k_s \equiv \frac{2C_s}{C'} \quad (3.79)$$

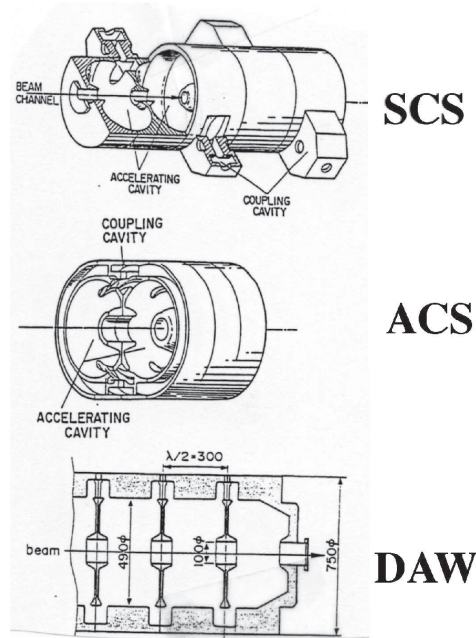


図 3.19 APS 以外の代表的な陪周期構造。上から順に SCS (side coupled structure)、ACS (annular coupled structure)、DAW (disk-and-washer) 構造を示す。

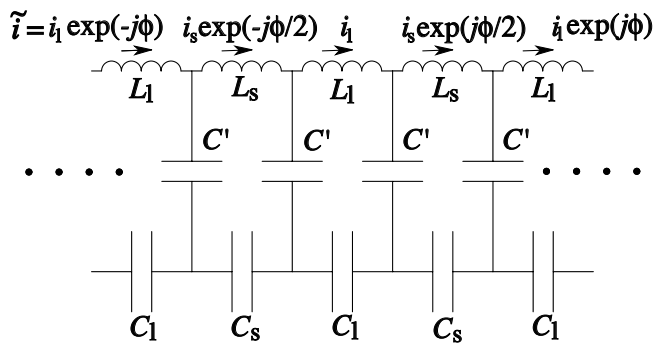


図 3.20 陪周期構造の等価回路

のように定義すれば、式 (3.77) は

$$\frac{\tilde{i}_l}{\tilde{i}_s} = \frac{k_l \omega_l^2 \cos \frac{\phi}{2}}{(1 + k_l) \omega_l^2 - \omega^2} = \frac{(1 + k_s) \omega_s^2 - \omega^2}{k_s \omega_s^2 \cos \frac{\phi}{2}} \quad (3.80)$$

と変形される。さらに次のようなパラメーター

$$\begin{aligned}\Omega_l &\equiv \omega_l \sqrt{1 + k_l} \\ \Omega_s &\equiv \omega_s \sqrt{1 + k_s} \\ K &\equiv \omega_l \omega_s \sqrt{k_l k_s}\end{aligned}\quad (3.81)$$

を導入すれば式 (3.80) から 分散式

$$(\omega^2 - \Omega_l^2)(\omega^2 - \Omega_s^2) = K^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\quad (3.82)$$

が得られる。これは  $\omega$  についての 4 次式であるので、分散曲線はすでに述べたように 2 本 1 組の曲線からなる。特に位相  $\phi = 0$  および  $\phi = \pi$  では

$$\begin{aligned}\omega &= \Omega_1, \Omega_2 & (\phi = 0) \\ \omega &= \Omega_l, \Omega_s & (\phi = \pi)\end{aligned}\quad (3.83)$$

ただし

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\Omega_l^2 + \Omega_s^2}{2} \pm \sqrt{K^2 + \left(\frac{\Omega_l^2 - \Omega_s^2}{2}\right)^2}}\quad (3.84)$$

とする。ここで興味があるのは  $\phi = \pi$  における群速度  $v_g$  である。長、短セルの長さの和が単位周期  $d$  であるので、群速度は  $\frac{\partial \omega}{\partial \phi} d$  に等しいが、それは式 (3.82) から

$$v_g = -\frac{K^2 \sin \phi}{4\omega(2\omega^2 - \Omega_l^2 - \Omega_s^2)} d\quad (3.85)$$

で与えられる。これから  $\Omega_l \neq \Omega_s$  であれば  $\phi = \pi$  において常に  $v_g = 0$  となることが示される。一方

$$\Omega_l = \Omega_s \equiv \Omega_{confl}\quad (3.86)$$

の場合は

$$v_g = \pm \frac{K}{4\Omega_{confl}} d\quad (3.87)$$

陪周期構造における  $\Omega_l = \Omega_s$  という特別の関係は合流 (confluence) 条件といい、実用上大変重要なものである。

ここで合流条件を満たすかそれに近いところでの分散曲線を描いてみる。結合定数は式 (3.79) によって  $C_l$  または  $C_s$  に比例するが、図 3.18 のように円筒空洞の  $TM_{010}$  モードを使う APS 構造を例にとれば、それらの容量はほぼセル長に反比例すると考えてよい。

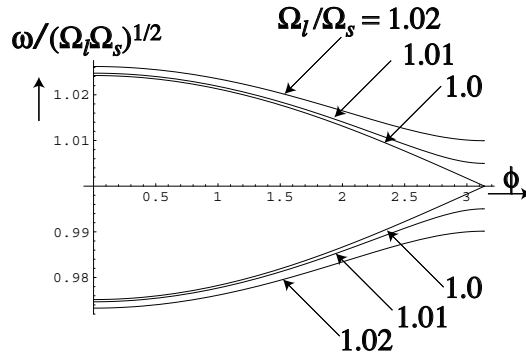


図 3.21 合流条件付近での陪周期構造の分散曲線

そうすると  $k_s$  は  $k_l$  より通常数倍大きい。そこで結合定数として  $k_l = 0.03$ 、 $k_s = 0.09$  という現実的な値を選び、 $\Omega_l/\Omega_s$  を 1.0、1.01、1.02 の値について計算したのが図 3.21 である。なお分散公式の形から分かるように  $l$  と  $s$  を入れ替えても曲線形は不変である。この図で示されているように、 $\omega = \sqrt{\Omega_l \Omega_s}$  に関しほぼ対称な上下 2 本の曲線対になる。また  $\phi = \pi$  での勾配が合流条件を満たさないと 0 であることも示されている。

### 3.5.4 APS 詳論

TM<sub>010</sub> モードで動作する円筒型 APS を例にとって分散特性をもう少し詳しく調べてみる。まず  $\phi = \pi$  での 2 つのモードの模式図は図 3.22 のようになる。どちらのモードについても励振されているセルの中央面に関し対称な電場を持っている。従ってそれぞれのモードについて、励振セルの中央面にショート面を置くか、励振されていないセルの中央面にオープン面を置いて、有限セル数構造にしても電磁場のパターンは不変である。

つぎに  $\phi = 0$  の 2 つのモードは図 3.23 のように表せる。電気力線は周波数が低い  $\omega = \Omega_1$  では長短セルともに同じ向きになるが、高い周波数  $\omega = \Omega_2$  では長短セルで逆転する。これは式 (3.80) で電流比が負になることから分かる。通常の周期構造は長短セルの長さが等しくなった極限であり、その  $\pi$  モードは  $\Omega_2$  にあるモードに相当する。従ってこの逆転は当然である。

次に上下の曲線のバンド幅について考察してみる。なお簡単のために  $\Omega_s < \Omega_l$  と限定して議論を進めうが、 $l$  と  $s$  の入れ替えに対して曲線は不変であるから一般性を損なわない。分散式からは

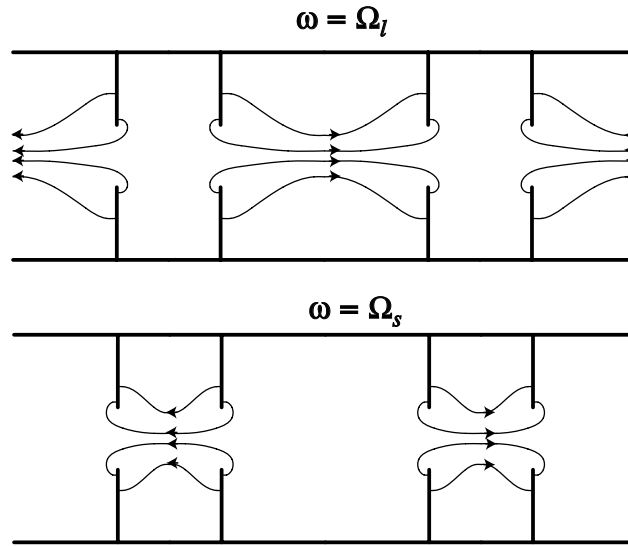


図 3.22  $\phi = \pi$  における APS の 2 つのモードの電気力線

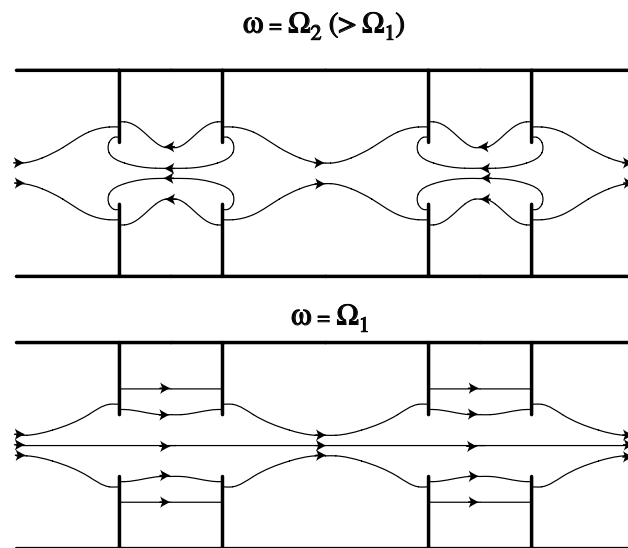


図 3.23  $\phi = 0$  における APS の 2 つのモードの電気力線

$$\begin{aligned}
 \Omega_2^2 - \Omega_l^2 &= \Omega_s^2 - \Omega_1^2 \\
 &= \sqrt{K^2 - \left(\frac{\Omega_l^2 - \Omega_s^2}{2}\right)^2} - \frac{\Omega_l^2 - \Omega_s^2}{2}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

という関係が得られる。合流条件がほぼ満たされているときの各曲線の幅はこの式から

$$\frac{|\Omega_2 - \Omega_l|}{\Omega_l} \simeq \frac{|\Omega_s - \Omega_1|}{\Omega_s} \simeq \frac{\sqrt{k_l k_s}}{2} \tag{3.89}$$



となり、上下曲線のバンド幅はほぼ等しいことが分かる。通常周期構造への極限 ( $k_s, k_l \rightarrow k$ ) では、 $|\Omega_2 - \Omega_1|/\Omega_l \rightarrow k$  となって、前節の結果と一致する。

合流条件が満たされているとき短セルは長セルより若干直径が大きい。それは上で議論したように  $k_s$  が  $k_l$  より大きいからで、式 (3.81)、(3.86) によれば

$$\frac{\omega_l^2}{\omega_s^2} = \frac{1 + k_s}{1 + k_l} > 1 \quad (3.90)$$

となるからである。中心軸上の結合孔による電気結合は固有共振周波数を高めるように作用し、同じ径の結合孔は短セルのほうへより強く作用する。従って、同じ動作周波数を実現するには短セル径の方を大きくし、その固有共振周波数を下げなければならない訳である。

なお  $\phi = 0$  では図 3.23 で示したように、短セルのほうが電気力線密度が高くなる。合流条件が満たされているとき式 (3.80) から電流を計算すると

$$\left(\frac{\tilde{i}_s}{\tilde{i}_l}\right)^2 = \frac{k_s(1 + k_l)}{k_l(1 + k_s)} \simeq \frac{k_s}{k_l} \quad (3.91)$$

となる。しかし上で議論したように

$$\frac{k_s}{k_l} \simeq \frac{C_s}{C_l} \quad (3.92)$$

であるから

$$\frac{\tilde{i}_s^2}{C_s} \simeq \frac{\tilde{i}_l^2}{C_l} \quad (3.93)$$

となって、各セルに同じエネルギーが蓄えられる。これが短セルの電磁場密度が高くなる理由である。



## 第4章

# 導波管との結合

これまでは単独の空洞の性質を調べてきたが、これからは外部回路と結合した空洞の解析を進める。空洞外部の回路との高周波電力のやりとりは、クライストロンなど高周波信号源からの電力が導波管を通してやって来る場合と、空洞を通過するビームとの間に行われる場合がある。そのうちこの章では前者である導波管との結合について扱う。

導波管との結合を記述する場合、入力波の空洞による反射率、とくにその周波数依存性が重要な指標となる。空洞と導波管の結合は空洞壁に設けられた小孔 (aperture) あるいは小ループ (loop) で行われる。ある周波数で反射が起きないように結合度を調節した状態を、その周波数で整合 (matched coupling) されているという。その場合、入力波電力はすべて空洞で消費される。結合度がこれより小さい場合を疎結合 (undercoupling)、大きい場合を密結合 (overcoupling) といい、いずれの場合でも入力波の一部は反射され、導波管を戻って行く。

この章の目的は結合部分において、導波管伝搬モードの固有インピーダンスで規格化した空洞共振モードのインピーダンスを求め、等価回路で表現することである。その際、反射波は導波管の途中で挿入されたサーキュレーター等の非可逆素子により完全に吸収され、再び空洞に戻ったり、信号源の動作特性を左右しない (well-padded) ものとする。なお注意することは、導波管の途中で観測されるインピーダンスや反射率の複素位相は、空洞結合面からの距離に応じて変化することである。

インピーダンスを求めるに当たっては、図 4.1 のように、実際に小孔やループなど結合器が設けられた空洞壁面から導波管上流へ適当な距離さかのぼったところを、便宜上、空洞と導波管の境界面  $S_a$  と考える。実際に小孔やループがある面は導波管断面形の不連続点であるので、境界条件を満たすために様々な導波管高調波モードが誘起される。しかし、通常使用される導波管では基本モードだけが伝搬し、それ以外の空間高調波は遮断周波数以下の減衰波である。これらの高調波は電磁場エネルギーの伝送に寄与しないので、反射率には入ってこない。従って、それらが十分に減衰し基本波モードしか存在しない場

所に境界面  $S_a$  を考えると、基本波だけで解析でき問題が簡単になる。

空洞表面  $S$  のうち、結合孔  $S_a$  以外の大部分を占める金属壁を図 4.1 のように  $S_m$  で表わす。ここで結合孔  $S_a$  は  $S_m$  にくらべ十分に小さく

$$S_a \ll S_m \simeq S \quad (4.1)$$

と仮定出来るものとする。また基本波の方向としては図 4.1 のように信号源から空洞へ向かう方向 (図 4.1 では右方向) を  $z$  軸とし (前節までは円筒空洞の軸方向を  $z$  としていたことに注意)、その方向の単位ベクトルを  $\mathbf{k}$  で表す。上に述べたように  $-\mathbf{k}$  方向に進む反射波にとって導波管は完全に整合されているものとする。なお、結合孔  $S_a$  では、空洞表面での外向きの単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は単位ベクトル  $\mathbf{k}$  と逆向き

$$\mathbf{k} = -\mathbf{n} \quad \text{on } S_a$$

である。

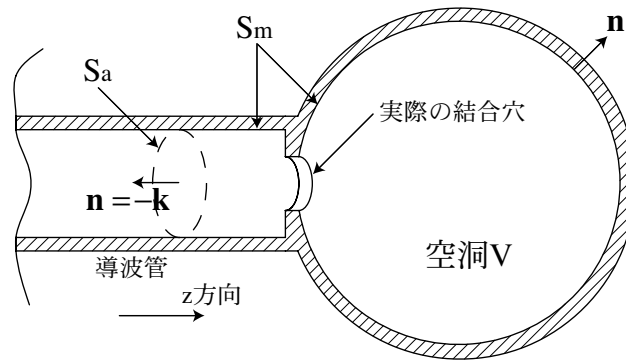


図 4.1 導波管と結合した空洞

空洞と導波管の境界面  $S_a$  は金属面とは異なる境界条件を要求するので、空洞内の電磁場は前節まで考えてきたような、完全に閉じた壁面で考えた固有モード  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n)$  と厳密には一致しない。しかし式 (4.1) のように結合孔は十分小さいと仮定しているので、固有モード  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n)$  はよい近似である。従ってこれらの直交関数系で結合孔のある場合の空洞内電磁場を展開する。

この節の前半では電磁場を用いた結合度を表す方程式を導き、後半ではその結果を等価回路による表現に発展させる。

なお、以降において電磁場を複素数表示したときの時間項は

$$e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

の形をとるものとする。

## 4.1 結合の電磁場理論

空洞  $V$  の固有モード関数  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n)$  は次の方程式に従う。

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega_n^2}{c^2} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = 0$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.3)$$

ただし、境界条件は空洞  $V$  の中で

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

であり、空洞全表面  $S$  上で

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

である。また直交関係はクロネッカーのデルタ記号  $\delta_{nn'}$  を使って

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{n'} dV &= \delta_{nn'} \\ \int_V \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_{n'} dV &= \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (4.6)$$

と書ける。なお  $\mathbf{e}_n(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{h}_n(\mathbf{r})$  はともに  $m^{-3/2}$  の次元をもつ。またそれらは

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) &= \frac{c}{\omega_n} \nabla \times \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) &= \frac{c}{\omega_n} \nabla \times \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

という対称な関係にある。

それではこれらの固有関数を用いて電場  $\tilde{\mathbf{E}}$ 、磁場  $\tilde{\mathbf{H}}$  を展開する。その場合、マクスウェル方程式

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + j\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}} &= 0 \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - j\omega\epsilon_0\tilde{\mathbf{E}} &= 0\end{aligned}$$

において  $\tilde{\mathbf{E}}$ 、 $\tilde{\mathbf{H}}$  ではなく  $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$ 、 $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}$  を展開する。それにはベクトル恒等式

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.8)$$

およびグリーンのベクトル定理

$$\begin{aligned}\int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) dV \\ = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_n dS\end{aligned} \quad (4.9)$$

を使う。ここで  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{E}}$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_n$  とするか、あるいは  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{H}}$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{h}_n$  とし、式 (4.5)、(4.7) を考慮すれば、次の2式が導ける。

$$\begin{aligned}(\omega^2 - \omega_n^2) \int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_n dV - \omega_n c \int_{S_m} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS = \omega_n c \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS \\ (\omega^2 - \omega_n^2) \int_V \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h}_n dV - j\frac{\omega}{\mu_0} \int_{S_m} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS = j\frac{\omega}{\mu_0} \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS\end{aligned} \quad (4.10)$$

結合孔では電場  $\tilde{\mathbf{E}}$  の表面に平行な成分が現れ、また金属壁でも表皮効果によって同様に平行成分が小さいながら現れる。これを考慮に入れてさらに解析を進めよう。

金属壁での電場  $\tilde{\mathbf{E}}$  と磁場  $\tilde{\mathbf{H}}$  の関係は、表皮深さ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}$$

を用いて

$$\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1+j}{2}\mu_0\omega\delta\tilde{\mathbf{H}} \quad (4.11)$$

と表される。またつぎのような無次元量  $Q_n$  を導入する。

$$Q_n \equiv \frac{2}{\delta_n \int_{S_m} \mathbf{h}_n^2 dS} \quad (4.12)$$

ここで  $\delta_n$  は  $\omega = \omega_n$  での表皮深さである。じつはこの  $Q_n$  はピルボックス空洞の節での定義に従ったモード  $n$  の  $Q$  値であることが証明できる。そこで  $Q_n$  は大きいとして、

(4.10) の第 2 式について、 $1/Q_n$  の 1 次近似展開を行う。また  $\tilde{\mathbf{E}}$  の  $\mathbf{e}_n$  成分の、 $\tilde{\mathbf{H}}$  の  $\mathbf{h}_n$  成分に対する比が  $-j\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  に等しいことを利用する。そうすれば

$$\int_V \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h}_n dV \simeq \frac{j \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS}{\mu_0 \left( \omega - \frac{j\omega'_n}{Q_n} - \frac{\omega_n'^2}{\omega} \right)} \quad (4.13)$$

のようになる。ただし  $\omega'_n$  は

$$\omega'_n \equiv \left( 1 - \frac{1}{2Q_n} \right) \omega_n \quad (4.14)$$

で定義され、有限な  $Q$  値によって変化したモード  $n$  の共振周波数を表す。式 (4.13) によって結合孔における電場の平行成分から空洞内のモード  $n$  の電磁場が計算できる。

さて今迄使ってきた固有モード ( $\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n$ ) は初めに定義したように  $\nabla \times$  を施しても 0 にならない、すなわち循環的 (rotational) な場である。空洞壁面全体が金属であればこれ以外のモードはない。しかし結合孔のような開口部があるときは非循環場 (irrotational) も入れないと完全な直交関数展開にならない\*1という議論がある [26]。そこでこれについて簡単な紹介をすると、非循環モードは磁場の固有関数展開に補正項として入るが、電場についてはその必要のないことが結論されている。それでは磁場  $\tilde{\mathbf{H}}$  の展開に非循環モード  $\mathbf{g}_m$  も含めるとどうなるか調べよう。 $\mathbf{g}_m$  の従う方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{g}_m(r) &= 0 \\ \left( \nabla^2 + \frac{\omega_m^2}{c^2} \right) \mathbf{g}_m(r) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

であって、表面  $S$  上での境界条件は

$$\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.16)$$

である (なおこのようなベクトル関数はあるスカラー関数の勾配である)。詳しい証明は省略するが、(4.10) の第 2 式右辺には  $\mathbf{g}_m$  に由来する項も追加され

$$\tilde{\mathbf{H}} \simeq \sum_n \mathbf{h}_n \left[ \frac{j \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS}{\mu_0 \left( \omega - \frac{j\omega'_n}{Q_n} - \frac{\omega_n'^2}{\omega} \right)} \right] + \sum_m \mathbf{g}_m \left[ \frac{j}{\mu_0 \omega} \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{g}_m dS \right] \quad (4.17)$$

という、磁場のより厳密な固有関数展開が得られる。この式の意味するところは、つぎの節の議論で明らかになるように、非循環モードの寄与は、 $\omega_n = 0$ 、すなわち直流のモードが追加されたものとして表現されることである。

\*1 展開される本の  $\tilde{\mathbf{E}}$  と  $\tilde{\mathbf{H}}$  はマクスウェル方程式を満たすが、展開に使う個々の非循環場はマクスウェル方程式を満たさないことに注意。

## 4.2 導波管から見た空洞の入力インピーダンス

前節の結果を敷衍し、導波管側から見た空洞の入力インピーダンスを求めよう。上に述べたように、入力波は  $z$  の正方向（単位ベクトル  $\mathbf{k}$  方向）へ向かうものとする。また、空洞の物理的な境界である小孔で発生した空間高調波が十分減衰している場所であれば、空洞結合孔  $S_a$  の位置はさしあたりどこでも良いとしておく。そして反射波は無限遠点で整合され、再び戻ってこないものとする。

さて空洞結合孔  $S_a$  面上での電磁場は空洞の固有モードで展開されるが、また導波管モードでも展開できる。空洞固有モードを用いた式 (4.17) では  $\mathbf{h}_n$  は定義により結合孔  $S_a$  面に平行であり、 $\tilde{\mathbf{E}}$  も同式では平行成分のみ考えればよい。そこで導波管モードについても平行成分、いいかえれば、 $\mathbf{k}$  方向に垂直な成分（横成分）のみに注目すればよい。

結合孔における電磁場を導波管モードで記述するまえに、導波管を伝搬する波の性質の要点をとりあえず、まとめておこう。導波管理論によれば、管内を  $+z$  方向に伝わる、ある特定のモードの波は電場でも磁場でも横成分 ( $t$ ) と縦成分 ( $z$ ) に分け、それぞれはさらに  $(x, y)$  と  $z$  の変数分離をして

$$\mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} = [\mathbf{A}_t(x, y) + \mathbf{A}_z(x, y)] e^{j(\omega t \mp \beta_g z)} \quad (4.18)$$

の形に表そう。ここで  $\beta_g$  は管内波数である。磁場の  $z$  成分がないモードを TM (transverse magnetic) モード、電場の  $z$  成分がないモードを TE (transverse electric) モードという。導波管理論によれば、ある特定のモードの電磁場横成分について

$$Z_g \mathbf{H}_{t,g}(x, y) = \pm \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{t,g}(x, y) \quad (4.19)$$

という関係が成立することが証明される [27]。この式で  $+$  符号は  $e^{-j\beta_g z}$  の形で  $+z$  方向へ伝わる波について、 $-$  符号は  $e^{j\beta_g z}$  の形で  $-z$  方向へ伝わる波についてである。 $Z_g$  は断面上の位置によらず、今考えているモードに固有の定数であって、波動インピーダンス (wave impedance) とよばれる。波動インピーダンスは、自由空間の固有インピーダンス  $\zeta_0 = 376.73 \Omega$ 、自由空間波数  $\beta$ 、管内波数  $\beta_g$  の間に、TM モードでは

$$Z_g \equiv \frac{1}{Y_g} = \frac{\beta_g}{\beta} \zeta_0 \quad (4.20)$$

TE モードでは

$$Z_g \equiv \frac{1}{Y_g} = \frac{\beta}{\beta_g} \zeta_0 \quad (4.21)$$

の関係がある。ここで  $Y_g$  は波動アドミタンスである。



ここで電場、磁場の横成分を導波管断面での規格化2次元ベクトル場  $\mathbf{e}_{gt}(x, y)$ 、 $\mathbf{h}_{gt}(x, y)$  を単位にとって次のように表そう。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{g,t}(x, y, z) &= \tilde{V}(z)\mathbf{e}_{gt}(x, y) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{g,t}(x, y, z) &= \tilde{I}(z)\mathbf{h}_{gt}(x, y)\end{aligned}\quad (4.22)$$

規格化ベクトル場  $\mathbf{e}_{gt}(x, y)$ 、 $\mathbf{h}_{gt}(x, y)$  は導波管断面  $S_g$  上の積分が

$$\int_{S_g} |\mathbf{e}_{gt}(x, y)|^2 dx dy = \int_{S_g} |\mathbf{h}_{gt}(x, y)|^2 dx dy = 1 \quad (4.23)$$

となるものである。なお式 (4.19) と (4.23) から

$$\left| \frac{\mathbf{e}_{gt}(x, y)}{\mathbf{h}_{gt}(x, y)} \right| = 1 \quad (4.24)$$

が成立する。

式 (4.22) で表される電圧、電流で  $+z$  方向へ進む進行波成分のものは添字  $+$ 、 $-z$  へのものは添字  $-$  を付けて表すと、式 (4.19)、式 (4.24) から、

$$\begin{aligned}\tilde{V}_+(z) &= Z_g \tilde{I}_+(z) = \tilde{I}_+(z)/Y_g \propto e^{-j\beta_g z} \\ \tilde{V}_-(z) &= -Z_g \tilde{I}_-(z) = -\tilde{I}_-(z)/Y_g \propto e^{+j\beta_g z}\end{aligned}\quad (4.25)$$

となることが分かる（電流の符号に注意）。ここで導波管が  $z = 0$  において負荷インピーダンス  $Z_L$  で終端されている場合を考える。任意の  $z (\leq 0)$  での全電圧、全電流は

$$\begin{aligned}\tilde{V}(z) &= \tilde{V}_+(z) + \tilde{V}_-(z) \\ \tilde{I}(z) &= \tilde{I}_+(z) + \tilde{I}_-(z)\end{aligned}\quad (4.26)$$

と表されるが、 $z = 0$  では

$$\tilde{V}(0) = Z_L \tilde{I}(0) \quad (4.27)$$

を満足しなければならない。式 (4.25)、(4.26)、(4.27) を用いれば反射波は

$$\frac{\tilde{V}_-(0)}{\tilde{V}_+(0)} = \frac{\tilde{Z}_L - Z_g}{Z_L + Z_g} \equiv R \quad (4.28)$$

となり、 $R$ を反射率という。これらの式からはまた、任意の $z$ から負荷側を見たインピーダンスが

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_g \frac{1 + Re^{2j\beta_g z}}{1 - Re^{2j\beta_g z}} \\ &= Z_g \frac{Z_L - jZ_g \tan \beta_g z}{Z_g - jZ_L \tan \beta_g z} \end{aligned} \quad (4.29)$$

となることが導ける。

このような準備をしたうえで、空洞結合孔 $S_a$ 面での電磁場を導波管モードで表すことを始めよう。それにはまず

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_t(\text{aperture}) &= \tilde{V}_g \mathbf{e}_{gt} \\ \tilde{\mathbf{H}}_t(\text{aperture}) &= \tilde{I}_g \mathbf{h}_{gt} \end{aligned} \quad (4.30)$$

と置いてみる。以下では、結合孔のある $z$ 位置での電圧、電流を単に $\tilde{V}_g$ 、 $\tilde{I}_g$ と表記する。さて式(4.30)を式(4.17)に代入すれば

$$\tilde{I}_g \mathbf{h}_{gt} \simeq \sum_n \mathbf{h}_n \left[ \frac{j\tilde{V}_g \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{gt}) \cdot \mathbf{h}_n dS}{\mu_0 \left( \omega - \frac{j\omega'_n}{Q_n} - \frac{\omega_n'^2}{\omega} \right)} \right] + \sum_m \mathbf{g}_m \left[ \frac{j\tilde{V}_g}{\mu_0 \omega} \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{gt}) \cdot \mathbf{g}_m dS \right] \quad (4.31)$$

となって、左辺の結合孔における導波管電流と右辺の空洞電磁場とが関係づけられる。この両辺について $\mathbf{e}_{gt}$ とのベクトル積をとる。ベクトル恒等式

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

および式(4.23)、(4.24)から導かれる関係

$$\int_{S_a} (\mathbf{e}_{gt} \times \mathbf{h}_{gt}) \cdot \mathbf{k} dS = - \int_{S_a} (\mathbf{e}_{gt} \times \mathbf{h}_{gt}) \cdot \mathbf{n} dS = 1 \quad (4.32)$$

を使って $S_a$ 上で積分すれば

$$\tilde{I}_g \simeq -j\tilde{V}_g \sum_n \frac{\left[ \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{gt}) \cdot \mathbf{h}_n dS \right]^2}{\mu_0 \left( \omega - \frac{j\omega'_n}{Q_n} - \frac{\omega_n'^2}{\omega} \right)} - j\tilde{V}_g \sum_m \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[ \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{gt}) \cdot \mathbf{g}_m dS \right]^2 \quad (4.33)$$

という結果がえられる。この式で[ ]内のベクトル積の面積分が導波管と空洞の結合強度を表わすことが以下の議論で明らかになる。なおこのベクトル積は形式的にはポインティング・ベクトルと同形である。

さて式 (4.33) が実は等価回路表現そのものであり、従って導波管と空洞の結合についての解釈が大変分かりやすくなることを示す。

まず入力高周波の周波数  $\omega$  が  $n$  番目のモードの共振周波数  $\omega'_n$  に等しい場合を考えてみる。その場合、簡単のために他モードからのインピーダンスへの寄与は小さく無視出来るとしよう。そうすると式 (4.33) から

$$\frac{\tilde{V}_g}{\tilde{I}_g} \simeq \frac{\mu_0 \omega'_n}{Q_n} \left[ \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{gt}) \cdot \mathbf{h}_n dS \right]^{-2} \equiv r_n \quad (4.34)$$

という式が得られ、空洞は共振点で純抵抗  $r_n$  であることが分かる。この抵抗  $r_n$  を使ってさらに

$$C_n \equiv \frac{1}{\omega'_n r_n Q_n} \quad (4.35)$$

$$L_n \equiv \frac{r_n Q_n}{\omega'_n} \quad (4.36)$$

を定義する。また非循環モードには

$$L_0 \equiv \frac{\mu_0}{\sum_n \left[ \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{gt}) \cdot \mathbf{g}_m dS \right]^2} \quad (4.37)$$

と置く。 $r$ 、 $C$ 、 $L$  がそれぞれ抵抗 ( $\Omega$ )、電気容量 (Farad)、インダクタンス (Henry) の次元を持っていることは容易に確かめられる。結局、結合面  $S_a$  での導波管基本波モードで見た空洞の入力アドミッタンス  $\tilde{Y}_{in} = 1/\tilde{Z}_{in}$  が

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{in} &= \frac{\tilde{I}_g}{\tilde{V}_g} \\ &= \frac{1}{j\omega L_0} + \sum_n \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_n} + r_n + j\omega L_n} \end{aligned} \quad (4.38)$$

と表わされることが分かる。これを等価回路で表わすと図 4.2 のようになる。

### 4.3 等価回路のもつ意味

さて前節で得た等価回路表現は具体的に何を表しているのだろうか。それを以下にくつかの項目に別けて解説する。

- (1)  $\omega \rightarrow 0$  では式 (4.38) の  $\sum_n$  の項は  $\omega$  によって殆ど変化せず一定値と見なしてよい。そこでそれを  $\tilde{Y}_c(\omega \rightarrow 0)$  と表わせば

$$\tilde{Y}_{in}(\omega \rightarrow 0) \simeq \frac{1}{j\omega L_0} + \tilde{Y}_c(\omega \rightarrow 0) \quad (4.39)$$

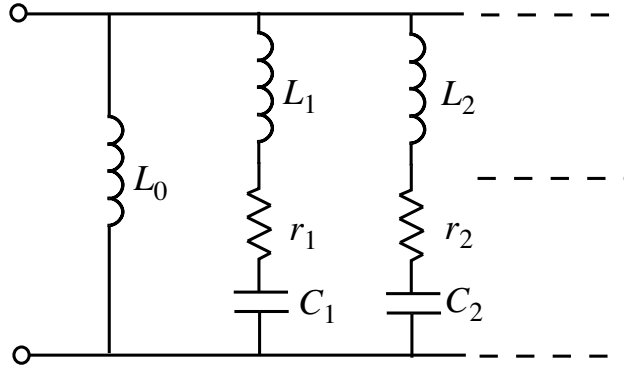


図 4.2 空洞入力アドミッタンス公式 (4.38) が表わしている、入力導波管から見た空洞の等価回路

となる。すなわち非循環モードからの寄与がサセプタンスの主要部分である。従って最低共振周波数のモードの  $Q$  値が小さく、そのサセプタンス曲線の裾が  $\omega \rightarrow 0$  まで延びていれば、非循環モードも無視出来なくなる。

- (2) ある特定のモードの共振周波数近く ( $\omega \simeq \omega'_n$ ) では、共振周波数前後で急激に変化する項と、周波数に殆ど依らずほぼ一定の項  $\tilde{Y}_c(\omega_n)$  の和で近似できる。すなわち

$$\tilde{Y}_{in}(\omega \simeq \omega'_n) \simeq \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_n} + r_n + j\omega L_n} + \tilde{Y}_c(\omega_n) \quad (4.40)$$

- (3) 導波管伝播モードの固有アドミッタンス  $Y_g (= 1/Z_g)$  と式 (4.12) で与えられる内部  $Q$  値  $Q_n$  を使い、外部  $Q$  値  $Q_{ext,n}$  を次のように定義する。

$$Q_{ext,n} \equiv \sqrt{\frac{L_n}{C_n}} Y_g = r_n Y_g Q_n \quad (4.41)$$

これを代入すると式 (4.40) は

$$\tilde{Y}_{in}(\omega \simeq \omega'_n) \simeq \frac{\frac{1}{Q_{ext,n}}}{j\left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_n}} Y_g + \tilde{Y}_c(\omega_n) \quad (4.42)$$

となる。この式で、遠方で整合されている導波管という外部負荷を並列接続した場合の空洞共振回路という特徴がはっきりする。

- (4) 結合孔  $S_a$  から導波管を  $1/4$  管内波長 ( $\Delta z = \pm \frac{\pi}{2\beta_g}$ ) 前後した点で見た入力アドミッタンスを  $\tilde{Y}'_{in}$  ( $\equiv 1/\tilde{Z}'_{in}$ ) と表せば結合孔  $S_a$  における入力アドミッタンス  $\tilde{Y}_{in}$  ( $\equiv 1/\tilde{Z}_{in}$ ) と

$$\tilde{Y}'_{in} = \frac{1}{\tilde{Z}'_{in}} = \frac{Y_g^2}{\tilde{Y}_{in}} = \frac{\tilde{Z}_{in}}{Z_g^2} \quad (4.43)$$

の関係にあることが式 (4.29) を使って証明される。そうすると式 (4.39)、(4.40) より

$$\tilde{Z}'_{in} = \sum_n \frac{1}{\frac{1}{j\omega L'_n} + j\omega C'_n + \frac{1}{R'_n}} + \frac{1}{j\omega C'_0} \quad (4.44)$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} C'_0 &\equiv L_0 Y_g^2 \\ C'_n &\equiv L_n Y_g^2 \\ L'_n &\equiv C_n Z_g^2 \\ R'_n &\equiv r_n^{-1} Z_g^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

と定義している。これを等価回路で表わすと図 4.3 のようになる。

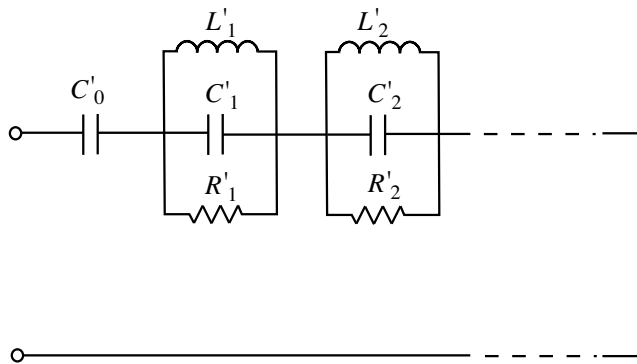


図 4.3 図 4.1、図 4.2 で考えている結合孔位置から  $\lambda_g/4$  だけ移動して計った空洞の入力インピーダンス表現

- (5) 最後に式 (4.34)、(4.37) に現れる  $[ ]^2$  の項は理想トランス 1 次、2 次巻線比に対応していることを示そう。

まずトランスの復習をしておく。図 4.4 のような、抵抗成分のないトランス (理想トランス) の入出力を結ぶ行列  $\mathbf{F}$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

は

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} L_1/M & j\omega(L_1L_2 - M^2)/M \\ 1/(j\omega M) & L_2/M \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

で表される。

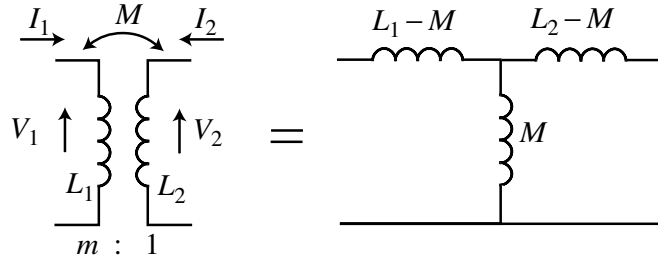


図4.4 理想トランス

ただし  $L_1$ 、 $L_2$  はそれぞれ1次、2次側のインダクタンス、 $M$  は結合インダクタンスである。巻線比および結合度はそれぞれ

$$m = \sqrt{L_1/L_2} \quad k = M/\sqrt{L_1 L_2} \quad (4.48)$$

で与えられるが、 $k = 1$  を保ったまま  $M \rightarrow \infty$  としたのが理想トランスであり、その行列は

$$\mathbf{F}_{ideal} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

と書ける。図4.5のように、このような理想トランスの2次側にあるインピーダンス  $Z_2$  をつないだとき、1次側から見たインピーダンス  $Z_1$  は  $m^2 Z_2$  に等しい。すなわち

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{m^2 V_2}{I_2} = m^2 Z_2 \quad (4.50)$$

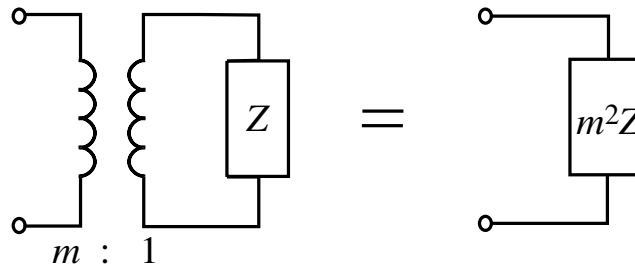


図4.5 理想トランスにおけるインピーダンス値の変換

さてここで式(4.34)、(4.37)の面積分[ ]での  $\mathbf{e}_{gt}$  および  $\mathbf{h}_n$  や  $\mathbf{g}_n$  について調べてみる。 $\mathbf{e}_{gt}$  は導波管断面で規格化された関数であり、空洞形状に無関係である。一方  $\mathbf{h}_n$  や  $\mathbf{g}_n$  は空洞体積について規格化されているが、空洞と導波管の実際の境界にある結合孔の大きさや寸法に依存する。したがって、問題の面積積分は実際の

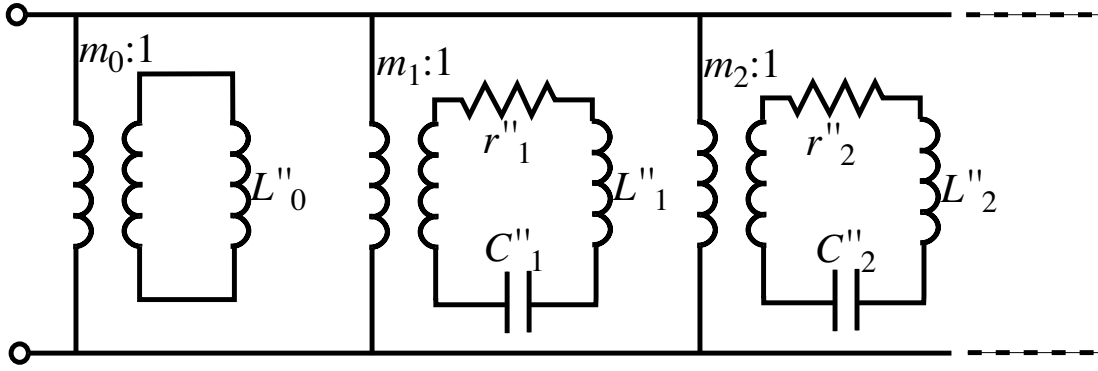


図 4.6 結合の大きさを理想トランスの巻線比で表したときの空洞の等価回路

結合孔  $S_a$  上における空洞の場合  $\mathbf{h}_n$  や  $\mathbf{g}_n$  を、導波管の場合  $\mathbf{e}_{gt}$  を物差しとして測ったものとも考えることもでき、あたかもトランスの 1 次、2 次間の巻線比に相当するようなものである。実際、“仮想巻線比”を

$$m_n = \frac{c_n}{\int_{S_a} (\mathbf{e}_{gt} \times \mathbf{h}_n) \cdot \mathbf{n} dS}$$

$$m_0 = \frac{c_0}{\sum_m \left[ \int_{S_a} (\mathbf{e}_{gt} \times \mathbf{h}_n) \cdot \mathbf{n} dS \right]} \quad (4.51)$$

と選んでみよう。ただし  $c_0$ 、 $c_n$  は長さの平方根の次元をもつが結合孔の形には無関係な適当な定数であるとしよう。すると式 (4.34)、(4.35)、(4.36)、(4.37) は

$$C_n = C''_n / m_n^2$$

$$L_n = m_n^2 L''_n$$

$$r_n = m_n^2 r''_n$$

$$L_0 = m_n^2 L''_0 \quad (4.52)$$

のように書ける。この表現では、結合の大きさが全て無次元数  $m_n^2$ 、 $m_0^2$  のなかに繰り込まれ、新しい回路定数はそれと無関係になっている。これはとりもなおさず図 4.2 の回路が、理想トランスを使った図 4.6 の回路に書き直せることを示している。結局、空洞の結合孔の働きは、結合の大きさはともかくとして理想トランスそのものであった訳である。なお式 (4.51) は結合孔の面積に  $m_0$  や  $m_n$  が反比例していることを示している。これと、式 (4.41) によって導かれるところの、 $Q_{ext,n}$  が  $m_n^2$  に比例するという関係は、結合における同じ傾向を表したものである。





## 第5章

# ビーム・ローディング

空洞を通過するビームは空洞の様々なモードと結合し、エネルギーのやり取りを行う。従って、空洞にとってビームはもう一つの外部回路とみなせる。ここでは加速モードとのエネルギーのやり取りに限定して、相互作用の基本を述べる。

断面が一定の無限に長いビームパイプを走っている一個の荷電粒子が、途中で空洞を通過したとする。空洞には初め電磁場が存在しなかったとすれば、粒子はそこに電磁場を励起し、運動エネルギーをその分減らして走り去る。この電磁場をウェーク場といい、空洞の固有モードで展開するとあらゆる成分を持っている。ウェーク場は、中心軸上において軸に平行な電場をもつ縦ウェーク場と、ビームを偏向する直角方向電場および磁場をもつ横ウェーク場の二つに大別される。前者では電磁場エネルギーとビームの運動エネルギーのやりとりそのものが問題になるが、後者ではビーム軌道の偏向が問題となる。

さて、ここでは縦ウェーク場として代表的な加速モードの励振について考察するわけであるが、簡単のために、ビームを周波数成分にフーリエ分解したとき、直流成分以外には加速モードの固有周波数にほぼ一致する成分しか持たないとする。他のモードは共振点から外れており無視できるとする。またビームは超相対論的であり、空洞内の電磁場の影響を受けてその速度が変わらないとする。すなわちビーム電流の時間波形は空洞内の電磁場とは独立であるとする。<sup>\*1</sup>

そうするとビームが励起する電磁場は外部高周波源が作る電磁場とは独立な高周波源となる。すなわち空洞内の電磁場は両者のフェーザーベクトルの線型和となる。ただしビーム加速へ働くのは両電圧ベクトルの和のビームフェーザーベクトルへの射影成分であり、各ベクトル成分が独立に働くのではないことに注意しなければならない。

加速モードが外部電力源により励起されている空洞を密度変調されたビームが通過して

---

<sup>\*1</sup> このような超相対論的ビーム近似は大抵の電子加速器では十分に成り立っている。しかしクライストロンの空洞のように数百 kV 程度の電圧のビームとの相互作用が問題となる場合は、ビーム電流の時間波形への電磁場の反作用が本質的で、数値シミュレーションで解かなければならない。

いるとき、加速モードとビームの位相関係がある範囲にあれば加速モードの電磁場エネルギーがビーム加速に消費され、場の振幅が減少する。この減少をビーム・ローディング (beam loading) という。なお一般的にビームによって任意のモードのエネルギーが増減する現象を総じてビーム・ローディングという。

この章でまず明らかにすることは、ビームが作る電磁場の振幅と空洞のシャント・インピーダンスの関係である。それによってビームも含めた空洞の等価回路表現を導くことができる。その上で、ビーム・ローディングが存在する場合の空洞が、導波管から見てどういふ入力インピーダンスになるか議論するが、一般的にはそれはある有限領域  $V$  において電流密度  $\mathbf{J}(x, y, z, t)$  が与えられているときの電磁場エネルギー密度

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

についての保存則 [28] [29]

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{dU}{dt} dV + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

のひとつの応用である。ここで  $S$  は  $V$  の表面であり、また  $\mathbf{n}$  はその上での外向き単位法線ベクトルである。最後の項は表面を通じて外部に出てゆく単位時間あたりのエネルギーを表しており、エネルギー流を表すベクトル  $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  は一般に Poynting vector と呼ばれる。

## 5.1 ビーム・ローディングの等価回路表現

前章までは空洞の電磁場をビームのない場合のマクスウェル方程式で記述してきた。しかしここからは電流  $\mathbf{J}(t, x, y, z)$  を入れた一般的なマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (5.1)$$

を用いなければならない。

空洞電磁場の固有モード展開では前節と同様に  $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$ 、 $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}$  そのものを展開する。ただし差し当たりは簡単のため導波管との外部結合はないとして話を始める。すなわち、当分は  $S_a \rightarrow 0$  としておく。そして最後の段階でこの項も含めた議論をおこなおう。

さて、上のマクスウェル方程式で、式 (4.7) を使って電場  $\mathbf{E}$  あるいは磁場  $\mathbf{H}$  を消去するとき、電流に関する

$$\int_V \mathbf{h}_n \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{J}}) dV \quad (5.2)$$

という項が現れる。ビームパイプ中では空洞から十分離れると  $\mathbf{h}_n = 0$  であることを利用すると、この項は次のように変形できる。

$$\int_V \mathbf{h}_n \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{J}}) dV = \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot (\nabla \times \mathbf{h}_n) dV = \frac{\omega_n}{c} \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_n dV \quad (5.3)$$

この変形には、 $V$  として十分長いビームパイプも含めたとき

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{h}_n \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{J}}) dV - \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot (\nabla \times \mathbf{h}_n) dV &= \int_V \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{J}} \times \mathbf{h}_n) dv \\ &= \int_S (\tilde{\mathbf{J}} \times \mathbf{h}_n) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned}$$

となることを使うが、それはビームパイプへの加速モードの浸み出しが短距離に限られているからである。

これらの結果を使えば、電場、磁場の方程式がそれぞれ

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_n^2 \right) \int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_n dV + \omega_n c \int_S (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS = - \frac{\partial}{\epsilon_0 \partial t} \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_n dV \quad (5.4)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_n^2 \right) \int_V \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h}_n dV + \frac{\partial}{\mu_0 \partial t} \int_S (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{h}_n dS = \omega_n c \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_n dV \quad (5.5)$$

のように右辺のビーム電流項で駆動される強制振動方程式の形に書ける。

式(5.4)は式(4.13)を導いたときと同様の手法でさらに

$$\int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_n dV = \frac{j \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_n dV}{\epsilon_0 \omega'_n \left( \frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{j}{Q_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right)} \quad (5.6)$$

と変形できる。結局、ビームが励起する電場は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) &= \sum_n \mathbf{e}_n(x, y, z) \int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_n dV \\ &= \sum_n \mathbf{e}_n(x, y, z) \frac{j \int_V \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_n dV}{\epsilon_0 \omega'_n \left( \frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{j}{Q_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

という一般式で与えられる。

さてこの式を解くためには、ビームの関数形を与える必要がある。ここでは電子貯蔵リングで見られる一般的な状況を単純化したモデルを仮定しよう。すなわち、加速高周波(角周波数  $= \omega$ )と同じ周波数でバンチしている、電荷  $q$  をもつ点状粒子の列を考える。そ

れらは空洞中心  $z$  軸 ( $x = y = 0$ ) に沿って光速  $c$  で  $+z$  方向に進み、各粒子の時間間隔は  $T = 2\pi/\omega$  である。このとき、ビームは次のようなフーリエ級数で表される。

$$\mathbf{J}(t, x, y, z) = \mathbf{k}I_0\delta(x)\delta(y) \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p \left( \omega t - \frac{\omega z}{c} \right) \right] \quad (5.8)$$

ただし  $\mathbf{k}$  は  $+z$  方向の単位ベクトル、 $p$  は整数、 $\delta(x)$ 、 $\delta(y)$  はそれぞれ  $x$ 、 $y$  についてのデルタ関数である。また  $I_0$  は直流平均電流であって

$$I_0 = \frac{q}{T} \quad (5.9)$$

である。

ここで興味があるのはビームの基本成分 ( $p = 1$ ) が空洞の基本モード ( $n = 1$ ) を励振する様子である。従って以下では  $\omega \simeq \omega_1$  とし、電流はその基本成分のみ

$$\mathbf{J}(t, x, y, z) \simeq 2\mathbf{k}I_0\delta(x)\delta(y) \cos \left( \omega t - \frac{\omega z}{c} \right) \quad (5.10)$$

と近似して議論する。なおここで注意しなければならないのは、電流の高周波成分は直流平均電流の 2倍 であることである。<sup>\*2</sup>

次にこの電流を

$$\tilde{\mathbf{J}}(x, y, z) = 2\mathbf{k}I_0\delta(x)\delta(y)e^{-j\omega z/c} \quad (5.11)$$

のようにフェーザ表示する。これを式 (5.7) に代入して  $n = 1$  以外の項は無視出来るとすれば

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) & \simeq \mathbf{e}_1(x, y, z) \frac{2j \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1(0, 0, z) e^{-j\omega z/c} dz}{\epsilon_0 \omega'_1 \left( \frac{\omega}{\omega'_1} - \frac{j}{Q_1} - \frac{\omega'_1}{\omega} \right)} I_0 \\ & = \mathbf{e}_1(x, y, z) \frac{2j \int_{-\infty}^{\infty} e_{1z}(z) e^{-j\omega z/c} dz}{\epsilon_0 \omega'_1 \left( \frac{\omega}{\omega'_1} - \frac{j}{Q_1} - \frac{\omega'_1}{\omega} \right)} I_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

<sup>\*2</sup> ここでは進行方向  $z$  について長さを持たない点電荷を仮定している。すなわち  $q(z) = q_0\delta(z)$  のようにデルタ関数で表されるものである。しかし電子リングでは普通次のようなガウス分布を持つと仮定される。

$$q(z) = \frac{q_0}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$$

ここで  $\sigma_z$  は r.m.s. バンチ長であり、 $q_0$  は全電荷である。この場合、高周波電流成分は

$$2I_0 e^{-\frac{\omega^2 \sigma_z^2}{c^2}}$$

となって  $2I_0$  より小さい。

なお  $\mathbf{e}_1$  の軸上での  $z$  成分を  $e_{1z}(z)$  と表記している。

さて上の式でビームが加速モード  $n = 1$  と完全に共振している、すなわち、 $\omega = \omega'_1$  の場合を特に考察しよう。すると

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) = -\mathbf{e}_1(x, y, z) \frac{2Q_1 I_0}{\epsilon_0 \omega'_1} \int_{-\infty}^{\infty} e_{1z}(z) e^{-j\omega z/c} dz \quad (5.13)$$

という関係が得られる。この式で  $e^{-j\omega z/c}$  以外は実数であるから、実数表示に簡単に戻れて

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, x, y, z) &= \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{j\omega t} \right] \\ &= -\mathbf{e}_1(x, y, z) \frac{2Q_1 I_0}{\epsilon_0 \omega'_1} \int_{-\infty}^{\infty} e_{1z}(z) \cos \left( \omega t - \frac{\omega z}{c} \right) dz \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。この式でとくに  $z$  軸に沿っての電場の  $z$  成分に注目する。それを  $E(t, z)$  と置き、また空洞形状の対称性から  $e_{1z}(z)$  は  $z$  の偶関数とすれば

$$E(t, z) = -e_{1z}(z) \cos \omega t \frac{2Q_1 I_0}{\epsilon_0 \omega'_1} \int_{-\infty}^{\infty} e_{1z}(z) \cos \frac{\omega z}{c} dz \quad (5.15)$$

という式が得られる。これを利用して  $z = ct$  の関係で走行している粒子が受ける電圧 ( $-V_{br}$  と表記しよう) を計算する。それは

$$\begin{aligned} V_{br} &= \int_{-\infty}^{\infty} E(z/c, z) dz \\ &= \frac{2Q_1 I_0}{\epsilon_0 \omega'_1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e_{1z}(z) \cos \frac{\omega z}{c} dz \right]^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

で与えられる。これが空洞共振点 ( $\omega = \omega'_1$ ) におけるビーム・ローディング電圧であって、負符号はビームにとって減速位相を表していることがわかる。

さて式 (5.16) の中カッコは規格化条件  $\int_V \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 dV = 1$  を考慮すれば、さらに

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e_{1z}(z) \cos \frac{\omega z}{c} dz \right]^2 = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} E_{1z}(z) \cos \frac{\omega z}{c} dz \right]^2}{\int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 dV} \quad (5.17)$$

と変形される。これと式 (2.4) による  $Q$  値

$$Q_1 = \frac{\epsilon_0 \omega'_1 \int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 dV}{2P_{wall}} \quad (5.18)$$

を式 (5.16) へ代入すると結局

$$\frac{V_{br}}{I_0} = \frac{V_{br}^2}{P_{wall}} \quad (5.19)$$

という式に帰着する。しかしこれは初めの方で導入した加速器シャント・インピーダンス  $R_a$  そのものである。したがって共振点でのビーム・ローディング電圧は

$$V_{br} = I_0 R_{a1} = 2I_0 R_1 \quad (5.20)$$

で与えられることが分かった。

この結果を式 (5.12) へ適用すれば共振点近傍の任意の周波数についてのビーム・ローディング電圧が次式のように表わされる。

$$\tilde{V}_b = \frac{2I_0}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_1}} \quad (5.21)$$

ただし

$$C_1 = \frac{Q_1}{\omega'_1 R_1} \quad (5.22)$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega'_1 Q_1} \quad (5.23)$$

とする。

これは図 5.1 のような回路に相当する。また全てのモードの寄与もいれれば式 (5.12) は図 5.2 の回路に相当することは容易に分かるであろう。

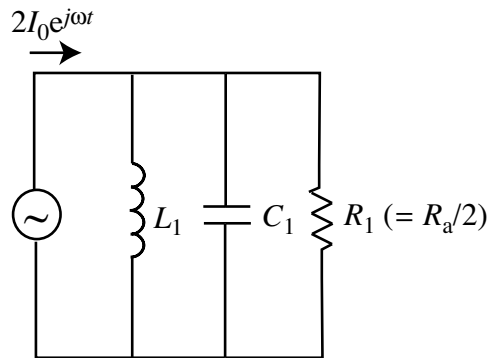


図 5.1 外部ビームで励振されるモードが基本加速モードのみとした場合の等価回路

## 5.2 外部結合回路とビームも含む等価回路

最後に、高周波源および導波管からなる外部結合回路とビームがともにぶら下がった加速空洞の等価回路について述べておく。図 4.3 に示した外部結合回路のある空洞の等価回路は、図 5.2 で与えた、ビームによる励振を表す回路と本質的に同じである。それは加速モードだけに注目しても変わらない。違いは、結合のための電圧を考える場所が空洞内の

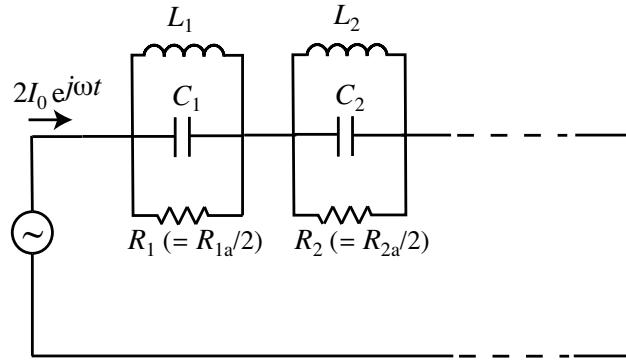


図 5.2 外部ビームですべてのモードが励振されている場合の等価回路

壁にある結合孔か、中心軸上を走るビームかにあるだけである。この電圧の違いは理想トランスで置き換えられるので、実質的に加速モードだけが励振されているときの総合した等価回路の一般形は図 5.3 のようになる。この図で空洞のアドミッタンスを表示するのに回路論インピーダンス  $R_1 (= R_{a1}/2)$  を用い、また残りのサセプタンスを

$$jB_1 = j \frac{Q_1}{R_1} \left( \frac{\omega}{\omega'_1} - \frac{\omega'_1}{\omega} \right)$$

で表している。また、導波管については、その固有アドミッタンスを  $Y_0 (= 1/Z_0)$ 、 $\pm z$  方向への進行波の電圧を  $\tilde{v}_{g\pm}$  で表す。高周波源であるクライストロンは、図のように大きさ  $2\tilde{I}_g$  の定電流源が固有アドミッタンス  $Y_0$  でシャントされた回路として表す。結合トランスの昇圧比（巻線比）は  $n$  とする。

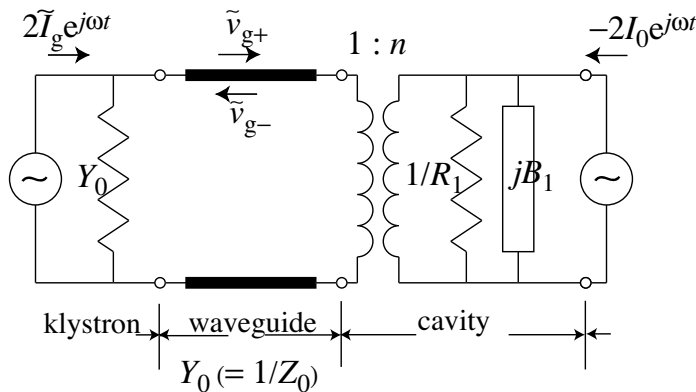


図 5.3 外部ビームおよび外部電源で基本加速モードが励振される空洞の等価回路

ここで、回路計算に便利なように図 5.3 のトランス昇圧比を導波管側へ繰り込み、空洞のアドミッタンスを基準とした回路に変換したものを図 5.4 で示す。新しい回路では空洞

側から見た高周波源の電圧は  $1/n$ 、アドミッタンスは  $n^2$  倍になる。したがって導波管の固有インピーダンスは  $Z_0/n^2$  であるが、それと空洞のシャント・インピーダンスとの比を

$$\beta \equiv \frac{R_1}{Z_0/n^2} \quad (5.24)$$

と置く。

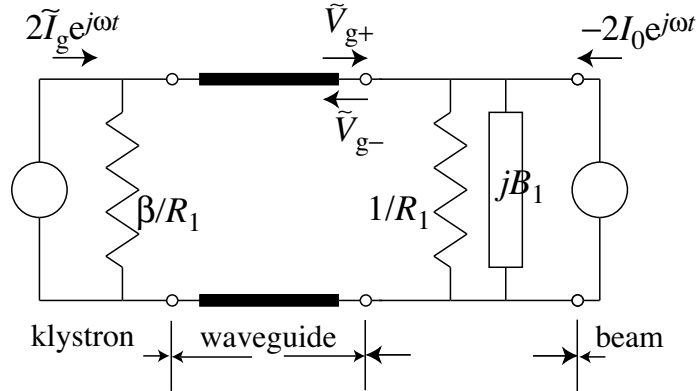


図 5.4 図 5.3 でトランス昇圧比を導波管固有アドミッタンスへ繰り込んだ場合。  $\beta$  は空洞の外部回路への結合定数

ここで伝送線（導波管）を伝わる入力波と反射波の関係を求めておかなければならない。そのために電圧、電流を空洞と導波管の境界で解く。そこでの導波管進行波の電圧を  $\tilde{V}_{g\pm} (= \tilde{v}_{g\pm}/n)$  とすれば、入力波および反射波の電圧は定電流源の出力電流の  $1/2$  の  $\tilde{I}_g$  と固有インピーダンス  $R_1/\beta$  を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{g+} &= \frac{R_1}{\beta} \tilde{I}_g \\ \tilde{V}_{g-} &= -\frac{R_1}{\beta} \tilde{I}_{g-} \end{aligned} \quad (5.25)$$

で与えられる。<sup>\*3</sup> なお全電圧、全電流は

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{g+} + \tilde{V}_{g-} \\ \tilde{I}_g + \tilde{I}_{g-} \end{aligned} \quad (5.26)$$

である。

図 5.4 の回路で高周波源とビーム双方で駆動される空洞（のモード 1）の電圧が計算できる。それはビーム電流が  $I_0 = 0$  であるときの高周波源がつくるフェーザー電圧  $\tilde{V}_g$  と

<sup>\*3</sup> 導波管中の進相による位相変化は簡単のために無視している。



高周波源電流が  $I_g = 0$  であるときのビームがつくるフェーザー電圧  $\tilde{V}_b$  をベクトル合成したものである。

まず  $\tilde{V}_g$  は式 (5.25)、(5.26) および図 5.4 の回路図から

$$\tilde{V}_g = \tilde{V}_{g+} + \tilde{V}_{g-} = \frac{R_1}{\beta} (\tilde{I}_g - \tilde{I}_{g-}) = \frac{\tilde{I}_g + \tilde{I}_{g-}}{\frac{1}{R_1} + jB_1} \quad (5.27)$$

という関係式が成立つが、ここで  $\tilde{I}_{g-}$  を消去すれば

$$\tilde{V}_g = \frac{2R_1}{1 + \beta + jB_1R_1} \tilde{I}_g \quad (5.28)$$

が得られる。

ここで見通しをよくするために空洞同調角 (tuning angle)  $\psi$  というパラメータを導入する。これは駆動電源の周波数  $\omega$  と空洞共振周波数  $\omega'_1$  の差の目安で

$$\psi \equiv -\tan^{-1} \xi \quad (5.29)$$

として定義する。ただし  $\xi$  は

$$\xi \equiv \frac{B_1R_1}{1 + \beta} = \frac{Q_1}{1 + \beta} \left( \frac{\omega}{\omega'_1} - \frac{\omega'_1}{\omega} \right) \quad (5.30)$$

これを使うと高周波源がつくるフェーザー電圧は

$$\tilde{V}_g = V_{gr} \cos \psi e^{j\psi + j\theta} \quad (5.31)$$

という簡単な形にできる。ここで  $V_{gr}$  は空洞の共振点 ( $\omega = \omega'_1$ ) での電圧で

$$V_{gr} \equiv \frac{2R_1 |\tilde{I}_g|}{1 + \beta} \quad (5.32)$$

と表され、 $\theta$  は信号源のもつ位相角である。<sup>\*4</sup> なお導波管入力波の電力  $P_g$  は

$$P_g = \frac{R_1}{2\beta} |\tilde{I}_g|^2 \quad (5.33)$$

であるから、 $V_{gr}$  は

$$V_{gr} = \frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta} \sqrt{2R_1 P_g} = \frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta} \sqrt{R_{a1} P_g} \quad (5.34)$$

とも書ける。

<sup>\*4</sup> 共振点でのビームがつくるフェーザー電圧は負の実数であることをすでに導いたので、その位相角を  $\pi$  にとる。

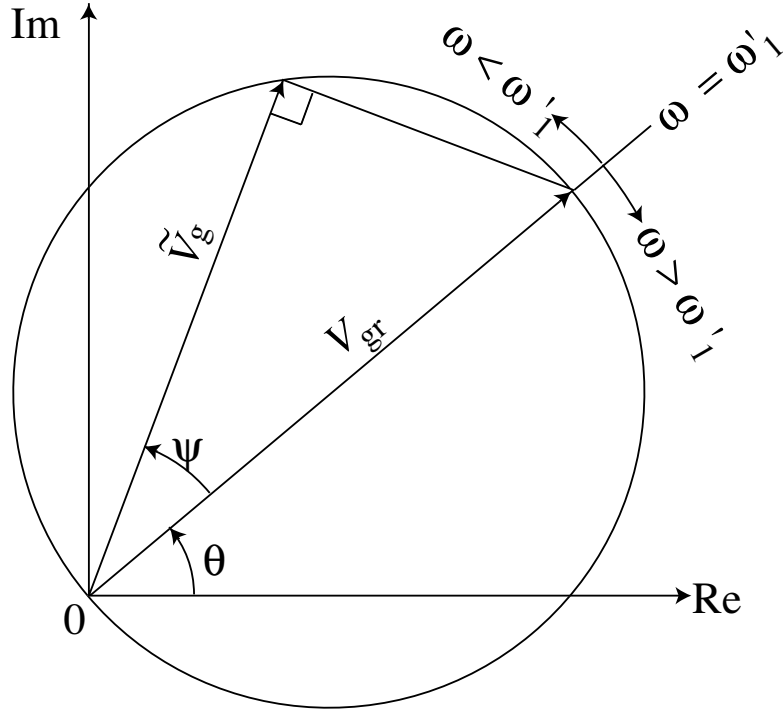


図 5.5 外部信号源がつくる空洞電圧  $\tilde{V}_g$ 。  $\psi$  は空洞同調角、  $\theta$  は空洞入口での入力波の位相、  $\omega$  は入力波の角周波数、  $\omega'_1$  は空洞共振周波数。

### 5.3 加速電場のフェーザーベクトル図

ここまでの関係は図 5.5 のフェーザーベクトル図にまとめられる。信号源がつくるベクトルは同調角をパラメーターとして動かすとき、直径  $V_{gr}$  の円を描くが、空洞共振周波数  $\omega'_1$  が上昇すると反時計方向にまわる。

次は  $\tilde{I}_g = 0$  の場合にビームがつくる空洞フェーザー電圧  $\tilde{V}_b$  をもとめることである。上の同調角を使えばそれは

$$\tilde{V}_b = -\frac{2R_1 I_0}{1 + \beta} \cos \psi e^{j\psi} = -V_{br} \cos \psi e^{j\psi} \quad (5.35)$$

で与えられる。ただし

$$V_{br} \equiv \frac{2R_1 I_0}{1 + \beta} = \frac{R_{a1} I_0}{1 + \beta} \quad (5.36)$$

とする。<sup>\*5</sup>

<sup>\*5</sup> 式 (5.20) と分母  $1 + \beta$  だけ異なるが、これは空洞に導波管という外部負荷が結合係数  $\beta$  で接続されてい

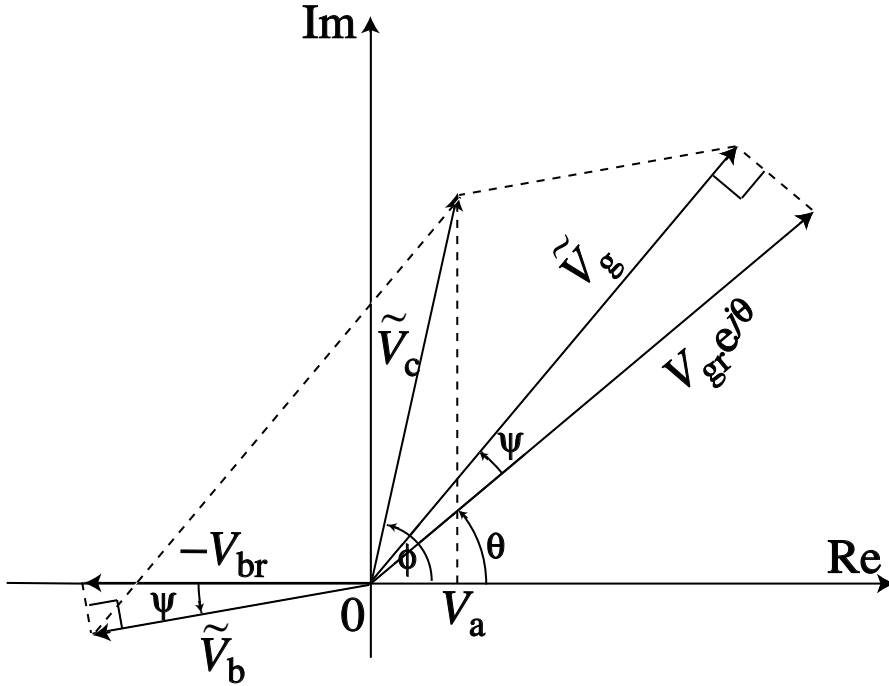


図 5.6 P. B. Wilson 流の合成された空洞電圧フェーザー図。 $V_c$  は電圧振幅、 $V_a$  はビーム加速電圧。

結局、空洞のフェーザー電圧  $\tilde{V}_c$  はつぎのような2つのフェーザーベクトルの合成で与えられる。

$$\tilde{V}_c = \tilde{V}_g + \tilde{V}_b \equiv V_c e^{j\phi} \quad (5.37)$$

なお絶対値および位相角をそれぞれ  $V_c$ 、 $\phi$  とした。

ここまでの関係はフェーザーベクトル図としてまとめると理解しやすい。初期の論文としては西川哲治によるもの [30] がある。現在よく使われるのは Perry Wilson によって導入された図 5.6 のスタイル [31] である。

ビームが受ける加速電圧はこの合成されたフェーザー電圧  $\tilde{V}_c$  のビームへの射影成分である。すなわち式 (5.37) でわかるようにビーム加速電圧  $V_a$  は

$$V_a = V_c \cos \phi \quad (5.38)$$

である。そしてビームは空洞から

$$P_b = I_0 V_a \quad (5.39)$$

の高周波電力を持ち去る。なお  $P_b$  および  $V_c$  を所定の値にするための最小信号源電力 ( $= P_b + P_{wall}$ ) は、空洞からの反射電圧の位相が信号源電圧と同相 ( $\theta = \phi$ ) であり、さらに導波管の結合定数  $\beta$  が

$$\beta = 1 + \frac{P_b}{P_{wall}} \quad (5.40)$$

の場合に実現される [31] [32]。ただし

$$P_{wall} = \frac{V_c^2}{2R_1} \quad (5.41)$$

である。この場合、空洞は整合された状態で反射波はない。

## 5.4 進行波型リニアック加速管におけるビーム・ローディング

進行波型リニアック加速管の場合、等価回路モデルは管内の電場、電力流などの解析に殆ど使われない。取扱うセル数が極めて大きいためセルごとの電磁場の空間変動を無視し、ビーム進行方向に滑らかな構造をもつ導波管の一種として取扱うほうが易しいからである。とくにビーム・ローディングを考える場合は尚更そうである。従って数式もこれまで述べてきたものと少し異なる見かけのものが使われる [32] [33]。ここではその概要を簡単に紹介する。なお、関与する電磁場は加速管を下流 ( $z > 0$  方向) へ進む加速モードのみを考える。

まずビームが存在しない場合を考える。入力カプラーから供給された高周波電力が  $z$  方向に流れているとして、それを  $P_g(z)$  と表す。それは

$$\frac{dP_g}{dz} = -2\alpha P_g \quad (5.42)$$

という方程式に従って減衰する。ここで  $\alpha$  は加速管内での表皮効果による電磁場の減衰率 ( $\text{m}^{-1}$ ) である。加速電場のピーク値を  $E_g$  で表わす。このピークに乗っている粒子が距離  $dz$  で受ける加速電圧は  $E_g dz$  である。 $E_g$  は  $P_g$  の平方根に比例するので

$$\frac{dE_g}{dz} = -\alpha E_g \quad (5.43)$$

となる。入力カプラーが  $z = 0$  にあり、そこでの電場を  $E_0$  として式 (5.43) を解けば

$$E_g(z) = E_0 e^{-\alpha z} \quad (5.44)$$

が得られる。

次にビームは存在するが外部からの高周波入力がない場合を考える。ビームの直流電流量を  $I_0$  とし、加速モードの波長に等しい間隔でデルタ関数的にバンチしているとする。このようなビームの作る加速電場のピーク値を  $E_b$  とする。各バンチは電場の減速ピークの位置に乗っていて、ビームが距離  $dz$  で寄与する高周波電力は  $-I_0 E_b dz$  である。従って  $z$  と  $z + dz$  の区間でのビームによる高周波電力  $P_b$  の増し分は壁損を差し引いて

$$\frac{dP_b}{dz} = -I_0 E_b - 2\alpha P_b \quad (5.45)$$

である。

ここで加速管を一様連続な導波管とみなして、そのシャント・インピーダンスを求める。シャント・インピーダンスはこの場合距離に比例するので、単位長さ当たりのシャント・インピーダンス  $r(\Omega/m)$  を導入する。さて区間  $(z, z + dz)$  のピーク加速電圧は  $E_b dz$ 、壁損は  $2\alpha P_b dz$ 、シャント・インピーダンスは  $rdz$  である。そうするとこれらの間には 5.1 節で議論したように

$$rdz = \frac{(E_b dz)^2}{2\alpha P_b dz} \quad (5.46)$$

という式が成立する。これを式 (5.45) に代入すれば、 $E_b$  の従う方程式として

$$\frac{dE_b}{dz} = -\alpha r I_0 - \alpha E_b \quad (5.47)$$

が得られる。この式で、加速管入口では  $E_b = 0$  という初期条件を入れると

$$E_b(z) = -r I_0 (1 - e^{-\alpha z}) \quad (5.48)$$

というビーム誘起電場の解が得られる。

外部電力とビーム誘起電力が共存する場合、ビームが超相対論的であれば両者の電場は線形的に重合させられる。従ってビームが見る加速電場は

$$E(z) = E_0 e^{-\alpha z} - r I_0 (1 - e^{-\alpha z}) \quad (5.49)$$

となる。なお、バンチが外部電力が作る加速電場のピークから位相角  $\phi$  ずれているとき、全電場は  $E_g$  と  $E_b$  をフェーザーベクトルとして合成したものである。しかしビームが受ける加速電圧はビーム軸への射影成分を取って

$$E(z) = E_0 \cos \phi e^{-\alpha z} - r I_0 (1 - e^{-\alpha z}) \quad (5.50)$$

と表わされる。ビームが  $z$  までで受ける加速電圧  $V_a$  は

$$V_a(z) = \int_0^z E(z) dz = \int_0^z [E_0 \cos \phi e^{-\alpha z} - r I_0 (1 - e^{-\alpha z})] dz \quad (5.51)$$

となる。

ここまでは簡単のために加速管の各セルは同一の形状であるとした。この場合  $r$  は  $z$  に関係なく一定である。このような加速管を定インピーダンス型構造 (constant impedance structure) という。実際には定加速電場型構造 (constant gradient structure) と呼ばれるものがしばしば使われる。加速管の中の電力  $P$  は加速モードの群速度  $v_g$  と単位長さ当たりの電磁場エネルギー  $w$  で

$$P = v_g w \quad (5.52)$$

と表される。ここで加速管下流に行くにつれて減衰する電力  $P$  と同じように  $v_g$  も小さくできれば  $w$  は一定に保つことができる。通常のセル形状では  $E^2$  と  $w$  の比は殆ど一定とみなせるので定加速電場が実現するわけである。なお群速度は第3章とくに第3.1.2小節に述べたようにセルのアイリス孔径依存性を利用し変えられる。定インピーダンス型構造以外では減衰定数やシャント・インピーダンスなどが  $z$  に依存するので、電場の微分方程式は複雑になる。

## 謝辞

原稿の最終段階において、加速器研究施設の魚田雅彦、上窪田紀彦の両氏は語法の不統一、誤りなどを綿密に調べられた。その並々でないお骨折りにたいして、ここに心より謝意を表したいと思います。





## 参考文献

- [1] 高田耕治『加速器の基本概念』KEK Report 2003-10, 2004.
- [2] シェルクノフ『電磁波論』森脇義雄 訳 (岩波, 1954).
- [3] John C. Slater, *Microwave Electronics* (D. Van Nostrand Co., Inc., 1950).
- [4] Robert E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering, 2nd Ed.* (MacGrawhill, 1992).
- [5] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics, 3rd edition* (John Wiley & Sons, 1999).
- [6] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, 1962).
- [7] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (MacGrawhill, 1941).
- [8] C. G. Montgomery *et al* ed., *Principles of Microwave Circuits*, M. I. T. Radiation Laboratory Series (MacGrawhill, 1948) Vol. 8.
- [9] TRISTAN Project Group, *TRISTAN Electron-positron Colliding Beam Project*, KEK Report 86-14, March 1987.
- [10] E. L. Ginzton, *Rev. Sci. Instr.*, **19** 89 (1948).
- [11] M. Chodorow *et al*, *Rev. Sci. Instr.*, **26** 134 (1955).
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics, 3rd Ed.* (Pergamon Press, 1976).
- [13] Y. Yamazaki *et al*, KEK Publication, KEK Report 80-8, 1980.
- [14] 藤沢和男, 電気通信学会誌 **36-11** 613 (1953).
- [15] R. M. Bevensee, *Electromagnetic Slow Wave Systems* (John Wiley and Sons, 1964).
- [16] G. Wendt, *Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge (Springer, Berlin, 1958), Vol. 16, p. 140 (Springer, 1958).
- [17] R. M. Bevensee, *Annals of Physics*, **12** 222 (1961) (John Wiley and Sons, 1964).
- [18] M. A. Allen *et al*, Proc. of 1977 Particle Accelerator Conference, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **NS-24** 1780 (1977).
- [19] G.-A. Voss, Proc. of 1977 Particle Accelerator Conference, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **NS-24** 1842 (1977).

- [20] J. R. Rees, SLAC Publication, PEP Notes 255, 1976.
- [21] T. Nishikawa *et al*, Rev. Sci. Instrum. **37** 652 (1966).
- [22] K. Akai *et al*, Proc. 13th Int. Conf. High Energy Accelerators, vol.2, p.303, 1986.
- [23] E. A. Knapp *et al*, Rev. Sci. Instr., **39** 979 (1968).
- [24] T. Kageyama *et al*, Particle Accelerators **32** 33 (1990).
- [25] V. G. Andreev, Sov. Phys. JETP **13** 1070 (1969).
- [26] F. E. Borgnis and C. H. Papas, *Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge (Springer, Berlin, 1958), Vol.16, p.415.
- [27] J. D. Jackson, *ibid*, p. 359 ff.
- [28] J. D. Jackson, *ibid*, p. 258 ff.
- [29] J. Schwinger *et al*, *Classical Electrodynamics* (Perseus Books, 1998), p. 21 ff.
- [30] T. Nishikawa, IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-12** 630 (1965).
- [31] P. B. Wilson, Proc. 9th Int. Conf. High Energy Accelerators, p.57, 1974.
- [32] P. B. Wilson, SLAC Publication, SLAC-PUB-2884, 1982.
- [33] J. E. Leiss, *Linear Accelerators*, ed. P. M. Lapostolle and A. L. Septier (North-Holland, 1970), p.147.