

ニュートリノ直流ホーンに関するアイデア

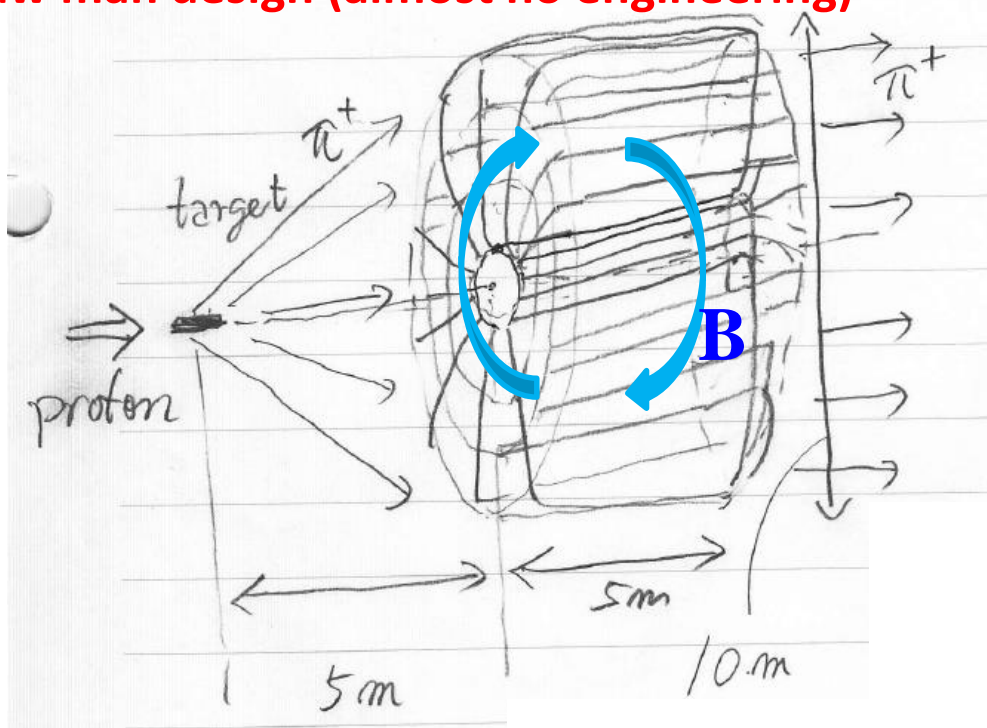
神谷 幸秀

(KEK研究支援戦略推進部)

- はじめに
 - ・ニュートリノ直流ホーンとは？
 - ・経緯
- CW超伝導リニアックの「超」概念設計
 - ・高崎栄一氏及び野口修一氏による検討
 - ・高エネルギー超伝導陽子リニアックの応用分野(夢、妄想?)
- ターゲットで生成される π のmomentumとangleの関係
 - ・Ichikawa's formula
- 直流ホーン of 概念設計
 - ・必要な磁場 (toroidal field)
 - ・straw man design
 - ・磁場の一次元計算
 - ・磁場の二次元計算
 - ・粒子(π)の軌道
 - ・pionのホーン通過効率
 - ・Simplified Ichikawa's formulaへの補正項
- 閑話休題 (backup slideから)

ニュートリノ直流ホーンとは？（ホーンというより、かご(cage) またはジャングルジム）

Straw man design (almost no engineering)



ほぼ一様なトロイダル磁場により charged pion を収束させる

(B: 0.2 T)

<コメント>

- 寸法は、あくまでも一例
- ホーンをターゲットに近づければ、low energy pion 向けとなる。
- ホーンをターゲットから離せば、high energy pion 向けとなる。

ホーンの通過確率

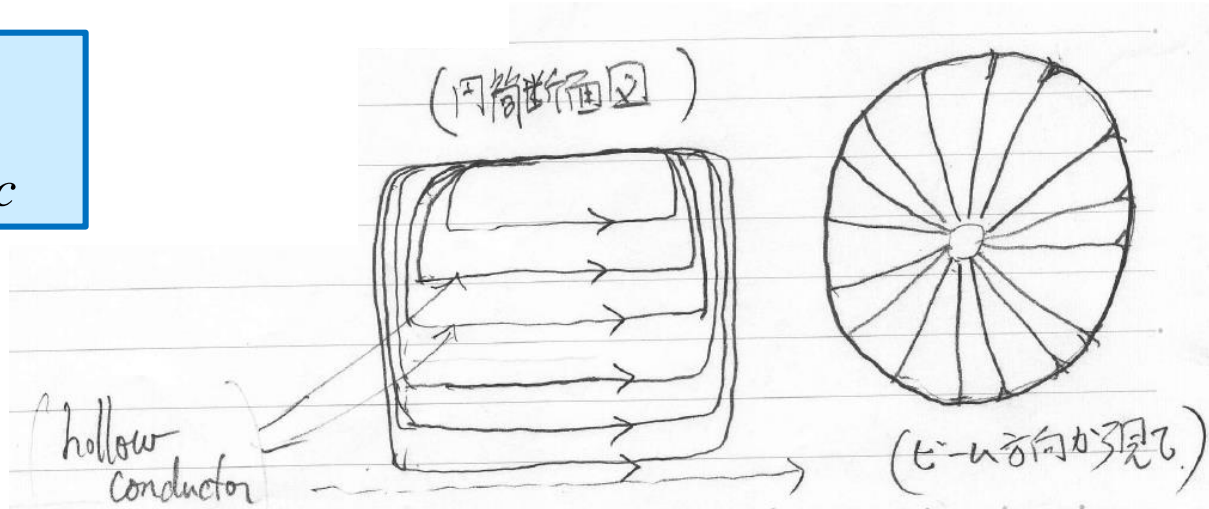
約90% for $p_\pi = 0.5 \text{ GeV}/c$

約60% for $p_\pi = 1.0 \text{ GeV}/c$

所要電力

10 MW

(少なくする方策有り)



<コメント>

今回の話では、パラメータは(勝手に)選んで固定しているが...

(A) 中心付近に、補助コイルを追加(または層電流を可変)にすると、off-axisのニュートリノをon-axisで供給することが可能
(Simplified Ichikawa's formulaへの補正に関するスライドを参照)

(B) Path lengthの違いによるBI積の変化を層電流を可変にすることで補正できる(であろう)[真面目に検討はしていないが、多分、OK]。

=> ターゲットに対するホーン的位置を動かすことで、ホーンを通過するpionのエネルギー範囲をある程度変えることができる。



(A)と(B)を併用することで、
エネルギー可変で(最適な)off-axisのニュートリノ・ビームをon-axisで供給することができる。

経緯

- ほぼ10年近く前(平成17年(2005年))

[有志による検討]

超伝導陽子リニアックをCWモード、またはほぼCWに近いモードで運転

=> 数十MW級の大強度陽子ビームを加速できるであろう。

有志: 佐藤康太郎、高崎栄一、野口修一、神谷幸秀 + 小林隆 (+ α)

- この加速器の目的の一つとして
大強度ニュートリノビームの発生

- 問題点

パルスモードのニュートリノ・ホーンはCWモードには適合しない。

何とかホーンの方をCWモードのリニアックに合わせられないか？

=> 題名のニュートリノ直流ホーンのアイデア

このセミナーの内容は、古文書を紐解いて、なんとか記憶を呼び戻そうと努力した結果である。紐解いた古文書は、

- 二つの無題(内容は、CW超伝導リニアックの「超」概念設計)

<野口修一さん、高崎栄一さんが多分、書かれた古文書>

- DC的Neutrino Hornの可能性について <神谷の古文書(H17.11.4)>

常伝導CW前段加速器

高崎(栄)氏の古文書から

セピア色のつもり

Ion source (その1)

(proton)

	Type	Current (mA)	Duty Factor	Discharge Power(kW)	Emittance 1σ (mm·mrad)	Cesium	Beam Energy (keV)	Beam density (mA/cm ²)
1	2.45GHz ECR	117	CW	0.8	0.2	-	75	
2	2.45GHz ECR	60	CW	1	0.2	-	80	
3	2.45GHz ECR	93	CW	0.85	0.18	-	95	

	Comment	References
1	90%.875Gauss.1997.for LEDA.168hr.,	R.S.I.Vol.69,pp1063.
2	90%.950Gauss.for TRASCO in Italy. 142hr..	R.S.I. Vol.75,pp1423,pp1453
3	99.96%. 875Gauss. for CEA(SILHI) in France. 104hr..	R.S.I.Vol.75,pp1414,EPAC2002,pp1712.

<H- sourceの表及びトレンドは、スペースの関係で省略>

纏め用文献

1. J.Peters; R.S.I. Vol. 71(2000) NUMBER 2 pp 1069
2. J.Peters; R.S.I. Vol. 75(2004) NUMBER 5 pp 1709
3. R.Serivens; EPAC 2004 pp 103

Ion source (その2)

文献3より抜粋。文献2の内容と異なるか？

Table 2. Parameters of selected sources. Op: Operational on an accelerator. a) Average over pulse length and time average current values; b) Radial source with converter; c) Axial source with converter not yet in operation, d) 20mA available at higher discharge power, e) 1rms normalised in mm.mrad, f) Estimated from optical measurements [20].

	Op	Type	Ion	Current ^a (mA)	Duty Factor	Discharge Power (kW)	Emittance ^e	Cesium (mg/day)	Lifetime (hrs)
CEA		2.45GHz ECR	p+	130	CW	0.8	0.15	N/A	336
LEDA		2.45GHz ECR	p+	117	CW	0.8	0.2	N/A	168
TRIPS		2.45GHz ECR	p+	60	CW	1.0	0.18	N/A	142
IAP		Arc Multi-Cusp	H-	120 / 7.2	6.0%	47.5	0.07 ^f	50	190
TRIUMF	✓	Arc Multi-cusp	H-	6 ^d	CW	5.0	0.16, 0.16	-	600
Jyväskylä	✓	Arc Multi-cusp	H-	1.5	CW	1.1		-	200
JKJ		Arc Multi-cusp	H-	38 / 0.34	0.90%	35	0.1	-	>100
LANSCE	✓	Filament Multi-Cusp ^b	H-	18 / 2.2	12%		0.13	110	700
LANSCE		Filament Multi-Cusp ^c	H-	40 / 4.8	12%	10	0.35		
SNS		RF Multi-cusp - 2MHz	H-	50 / 4	7.8%	50	0.17	<<1	~100
SNU		RF Multi-Cusp - 13.56 MHz	H-	0.2	CW	1.5		-	
DESY	✓	RF Multi-cusp 2 MHz	H-	40 / 0.025	0.05%	20	0.18, 0.16	-	25000
BNL	✓	Magnetron	H-	90 / 0.48	0.53%	2.5	0.27, 0.27	12	4000
INP		Penning	H-	8	CW	0.63	0.3	40	140
ISIS	✓	Penning	H-	35 / 0.35	1.00%	4.0	0.12, 0.17	0.1	1200
LANL		Penning - 1X - Slit	H-	160 / 0.8	0.50%	18	0.17		
LANL		Penning - 4X - Slit	H-	170 / 0.9	0.50%	19.8	0.29		

Table 1: Main RFQ parameters

Energy Range	0.08-5	MeV
Frequency	352.2	MHz
Proton current	30	mA
Duty cycle	100	%
Emittance T RMS in/out	0.20/0.21	mm mrad norm.
Emittance L RMS	0.19	MeV deg
RFQ length	7.13	m (8.4 λ)
Intervane voltage	68	kV (1.8 Kilp.)
Transmission	95	%
Q (80% of Superfish result)	8000	
Beam Loading	0.148	MW
RF Power	0.726	MW

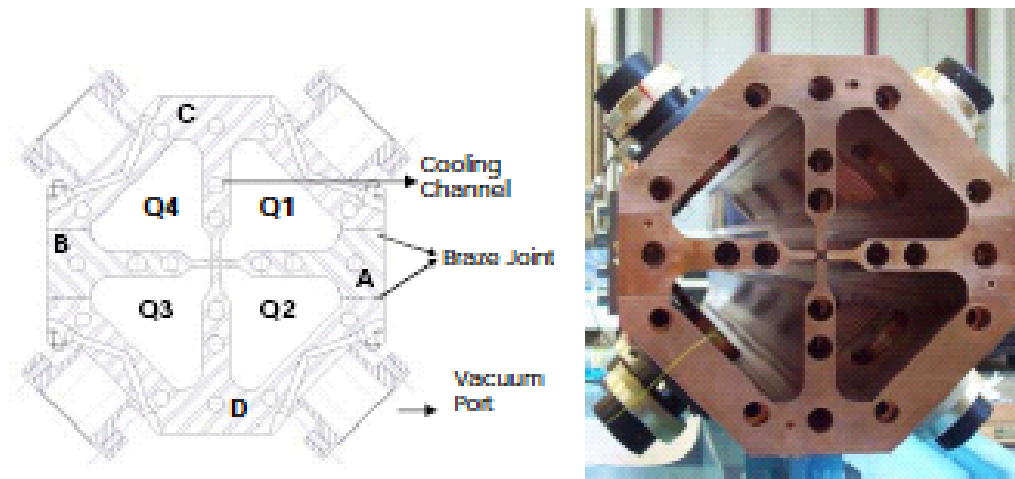


Figure 2: Transverse section of the RFQ with the indication of quadrants and pieces to be brazed.

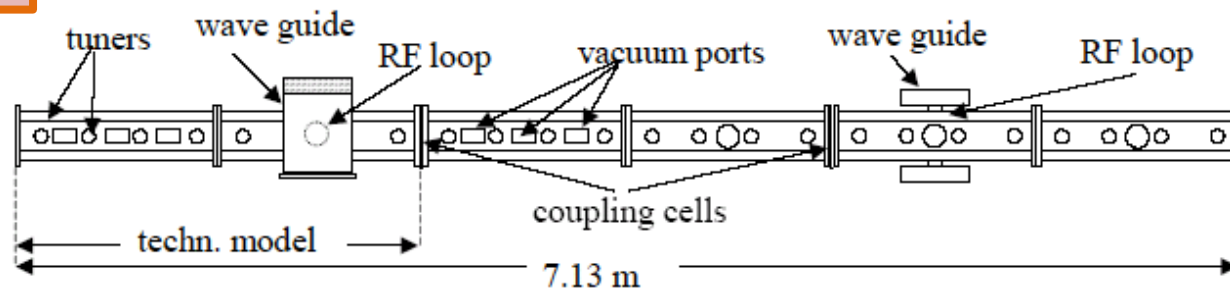


Fig.1 Schematic lay out of TRASCO RFQ (45° view).

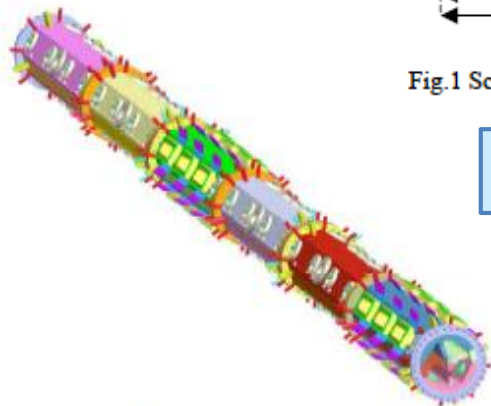


Figure 1: Layout of the TRASCO-SPES RFQ

TASCO RFQ and SPES-1 PROJECT

- 10 mA protons beam up to 20 MeV for nuclear studies
- 30 mA protons beam up to 5 MeV for BNCT and preliminary ADS studies

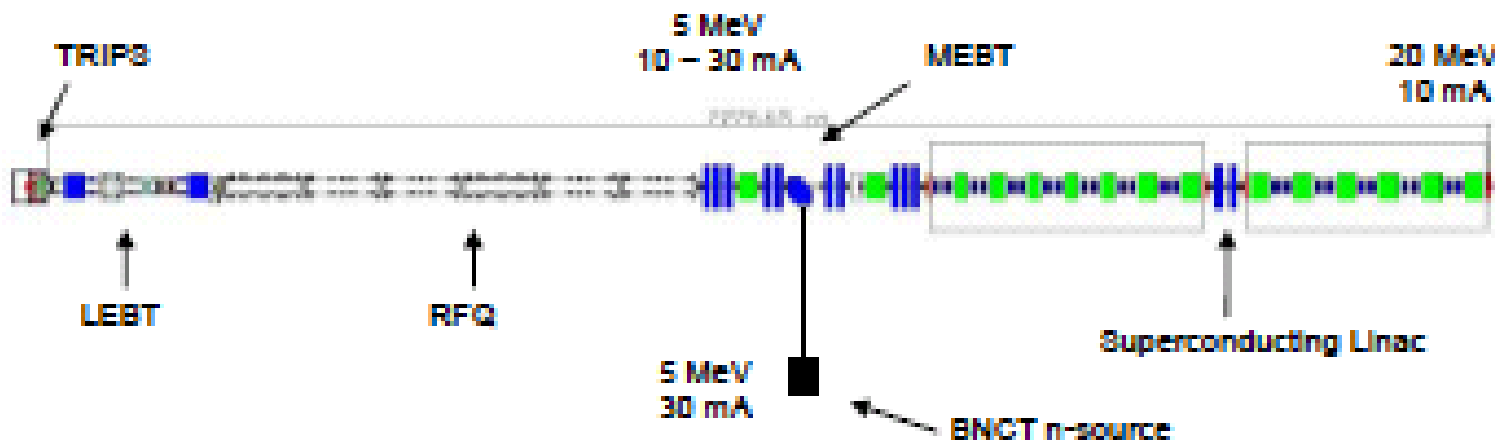


Figure 1: The SPES-1 project.

この古文書には、世界のDTLの状況の表があるが、割愛した。

構成一例(赤色分割例)、E0=1.7MV/m時

tank1の構成	3 units	tank2の構成	3 units
長さ(m)	7.3	長さ(m)	8.12
energy (MeV)	10.91	energy (MeV)	19.83
CELL数	68	CELL数	50
DT長(mm)	53 to 92	DT長(mm)	92 to 116
発熱量(kW/DT)	1.5 to 2.7	発熱量(kW/DT)	2.7 to 3.5
E0の下げの効果;2乗		E0の下げの効果;2乗	
$\beta \lambda$ の効果		$\beta \lambda$ の効果	
全発熱量(推定)		全発熱量(推定)	
DT(kW)	141.0	DT(kW)	152.0
タンク(kW)	155.1	タンク(kW)	167.2
全体(kW)	384.9	全体(kW)	415.0
30%増加(Q-値下げ分)		30%増加(Q-値下げ分)	

DTの発熱量を減らす為、E0を下げる。2.5から約1.9に。

V=8, L=7で、1.89E0に相当する。

Pcは、0.6倍ぐらいに下がる。

クライストンの出力電力;CW 1MW

全長(m)	15.42
セル数	118
発熱量(kW)	799.9
ビーム(12mA)	202.8
タンク数	2

構成一例(赤色分割例)、E0=1.5MV/m時

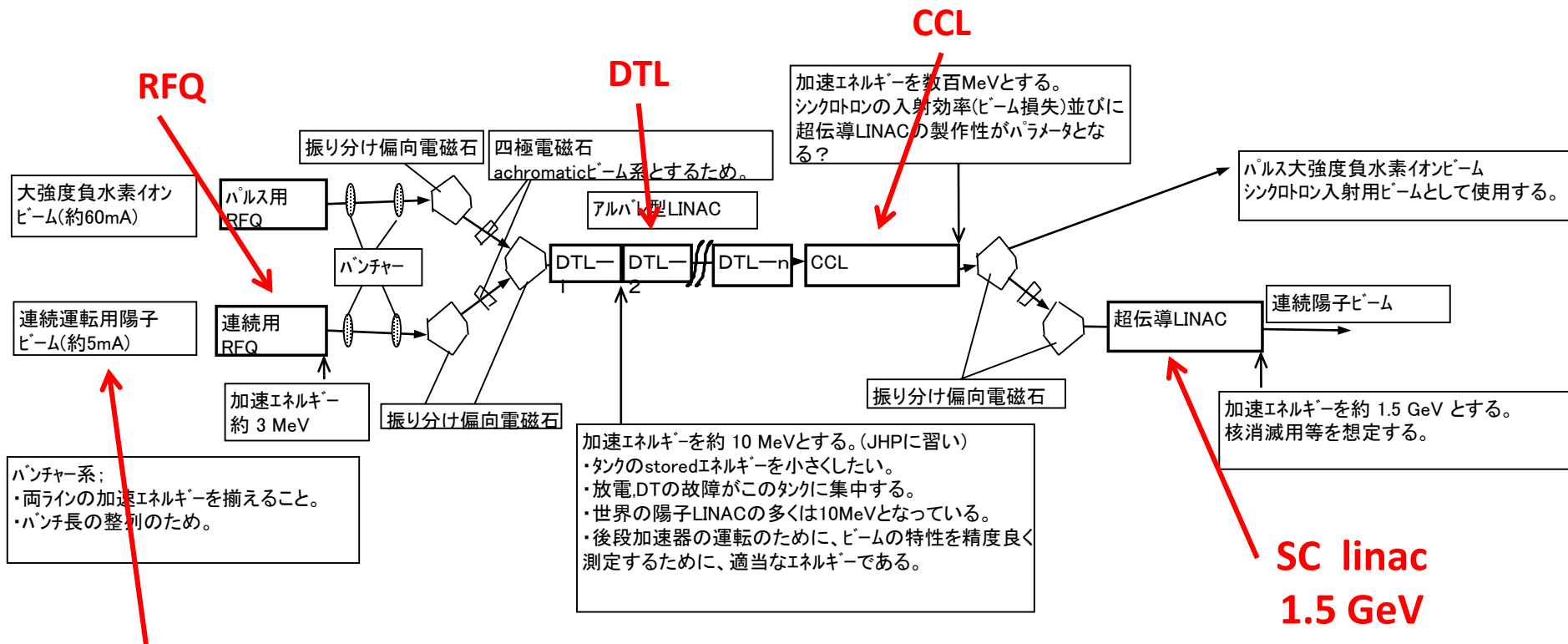
tank1の構成	2 units	tank2の構成	2 units
長さ(m)	6.65	長さ(m)	5.34
energy (MeV)	9.35	energy (MeV)	14.52
CELL数	65	CELL数	37
DT長(mm)	53 to 86	DT長(mm)	86 to 103
発熱量(kW/DT)	1.2 to 2.0	発熱量(kW/DT)	2.0 to 2.3
全発熱量(推定)		全発熱量(推定)	
DT(kW)	100.0	DT(kW)	80.9
タンク(kW)	110.0	タンク(kW)	89.0
全体(kW)	273.0	全体(kW)	220.9
30%増加(Q-値下げ分)		30%増加(Q-値下げ分)	

tank3の構成	2 units
長さ(m)	5.53
energy (MeV)	19.88
CELL数	32

DT長(mm)	103 to 115.9
発熱量(kW/DT)	2.3 to 2.7
全発熱量(推定)	
DT(kW)	81.1
タンク(kW)	89.2
全体(kW)	221.4
30%増加(Q-値下げ分)	

全長(m)	17.52
セル数	134
発熱量(kW)	715.3
ビーム(12mA)	202.8
タンク数	3

昔々、高崎・内藤等の私案(原研とのJOINT計画用)
原研側20%duty以上を要求。水本氏の計画とも共存。



CW proton beam (5mA)

将来の陽子LINACの構想案
これは、KEK-PS-LINACグループの加速器要素開発のために想定した陽子LINACの構成概念図である。サイズを決めるDTL周波数はPS-LINAC相当(201MHz)とした。CCL、超伝導LINACでは、トリストランで使用されているAPS(又は試作されたDAW; 稲垣・野口及び京大Gr.)、超伝導キャビティの製作経験が十分に生かされる。ACSでは高dutyが不可能(影山氏も指摘)***冷却系等の為。図中、通常使用される四極電磁石、ビームモニター等は省略した。

5-GeV “CW Proton” linac (low gradient version)

All superconducting

972MHz							
Energy	0 - 200MeV	200 - 400MeV	400 - 600MeV	600 - 800MeV	800 -1000MeV	1 - 5GeV	Total
β		0.56	0.76	0.85		1	
Cavity Type	Spoke-type?	Elliptical					
No. of cell		9	9	9	9	9	
Cavity Length		0.8 m	1.0 m	1.2 m	1.3 m	1.4 m	
Gradient		6 MV/m	8 MV/m	10 MV/m	13 MV/m	15 MV/m	
f		30 deg.					
Gain		4.2 MV	7 MV	10.4 MV	14.7 MV	18.3 MV	
R/Q			530 W			1000 W	
Q		5×10^9	5×10^9	5×10^9	5×10^9	5×10^9	
R							
RF loss			24 W			88 W	
No. of Cavity		48	28	19	14	220	
Effective Length			25 m			267 m	
Total loss (2k)			0.6 kW			16.7 kW	~20 kW
No. of Module		14	7	5	4	55	85
Module Length		5.6 m + 1 m	6.4 m + 1 m	7.2 m + 1 m	7.6 m + 1 m	8 m + 1 m	
	?	92.4 m	51.8 m	41 m	34.4 m	495 m	715 m
Module Cost						180 M¥	
		2520 M¥	1260 M¥	900 M¥	720 M¥	9900 M¥	15300 M¥

● From “CW Proton” design sheet of S. Noguchi (around 2005 autumn)

5-GeV “CW Proton” linac (high gradient version)

All superconducting

972MHz							
Energy	0 - 200MeV	200 - 400MeV	400 - 600MeV	600 - 800MeV	800 -1000MeV	1 - 5GeV	Total
β		0.56	0.76	0.85		1	
Cavity Type	Spoke-type?	Elliptical					
No. of cell		9	9	9	9	9	
Cavity Length		0.8 m	1.0 m	1.2 m	1.3 m	1.4 m	
Gradient		8 MV/m	10 MV/m	12 MV/m	16 MV/m	20 MV/m	
f		30 deg.					
Gain		5.6 MV	8.7 MV	12.5 MV	18 MV	24.3 MV	
R/Q			530 W			1000 W	
Q		5×10^9	5×10^9	5×10^9	5×10^9	5×10^9	
R							
RF loss			38 W			157 W	
No. of Cavity		36	23	16	11	164	
Effective Length			20 m			200 m	
Total loss (2k)			0.76 kW			22.6 kW	~26 kW
No. of Module		9	6	4	4	41	64
Module Length		5.6 m + 1 m	6.4 m + 1 m	7.2 m + 1 m	7.6 m + 1 m	8 m + 1 m	
	?	59.4 m	44.4 m	32.8 m	34.4 m	369 m	540 m
Module Cost						180 M¥	
		1620 M¥	1080 M¥	720 M¥	720 M¥	7380 M¥	11520 M¥

● From “CW Proton” design sheet of S. Noguchi (around 2005 autumn)

超伝導高周波技術による量子ビームの革新と応用～超伝導陽子加速器～

大強度化

小型化

利用の拡大と高度化

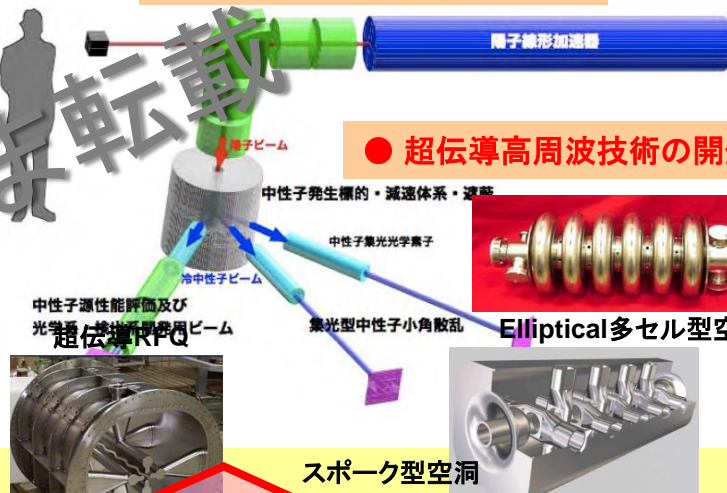
【超伝導高周波技術の活用】

- ・高電圧加速によるコンパクト化
- ・低損失による高効率化と省エネ運転
- ・大電流、CW運転の実現

【技術開発課題】

- ・粒子速度に適合した加速空洞技術の確立と統合
- ・大強度、CW運転の実証
- ・長期安定運転のノウハウの取得
- ・ビーム損失の極小化技術
- ・大強度量子ビームの利用技術の確立と高度化

● コンパクト中性子源の実現



● 超伝導高周波技術の開発



Elliptical多セル型空洞



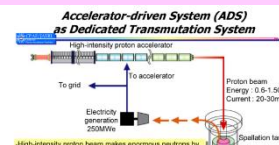
スポーク型空洞

大型計画への波及効果

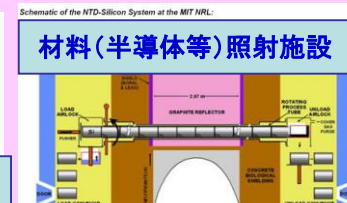
- 核変換・未臨界炉 (放射性廃棄物の解決、安全な原子炉の開発)
- 材料照射施設 (半導体照射は海外に頼らない)



高レベル廃棄物の変換処理



加速器駆動未臨界炉



材料(半導体等)照射施設

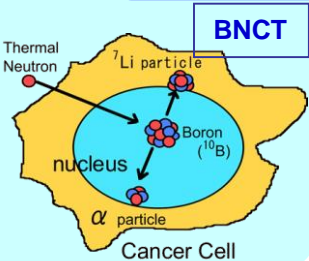
○ 医学利用等の高度化開発

短期的波及効果

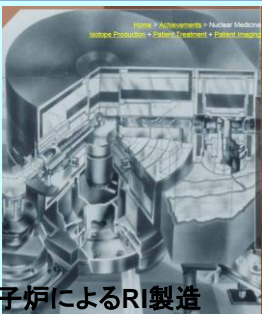
がん治療装置の小型化



HIMAC [既存]



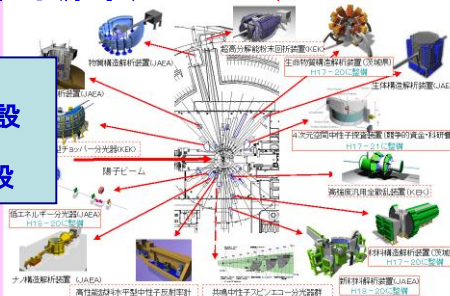
RI(放射性医薬品など)の純国産化



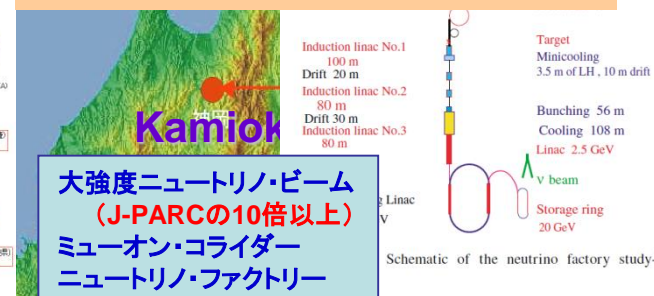
原子炉によるRI製造 (カナダのNRU炉 [既存])

○ 大強度中性子源等 (> 10 MW)

- 大強度中性子源
- 大強度ミュオン施設
- 大強度ハドロンビーム
- 大強度材料照射施設



○ 未踏領域の開拓 (基礎科学の推進)



大強度ニュートリノビーム (J-PARCの10倍以上)
ミュオン・コライダー
ニュートリノ・ファクトリー

Induction linac No.1
100 m
Drift 20 m
Induction linac No.2
80 m
Drift 30 m
Induction linac No.3
80 m

Target
Minicooling
3.5 m of LH, 10 m drift

Bunching 56 m
Cooling 108 m
Linac 2.5 GeV

v beam
Storage ring
20 GeV

Schematic of the neutrino factory study-II

ターゲットで生成されるπのmomentumとangleの関係

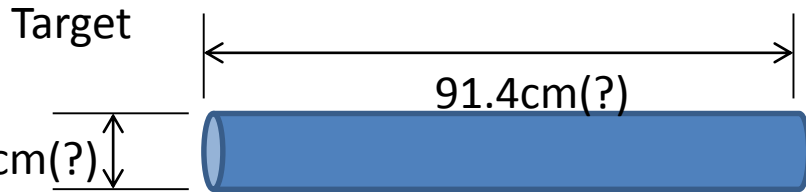
Most important in this design of neutrino horn is

Ichikawa's formula

$$\theta [\text{rad}] = 0.03 + 0.3/p [\text{GeV}/c]$$

<コメント>

実際は、角度は確率的に広く分布している



Proton energy=50GeV

$$\begin{aligned}\theta &= 0.038 + 0.31/p && (\text{MARS}) \\ \theta &= 0.023 + 0.33/p && (\text{GFLUKA+GICALOR}) \\ \theta &= 0.026 + 0.31/p && (\text{FLUKA2000})\end{aligned}$$

小林隆氏: (“予備的な”計算によれば) proton energyが5GeVでもおよそ同じである。

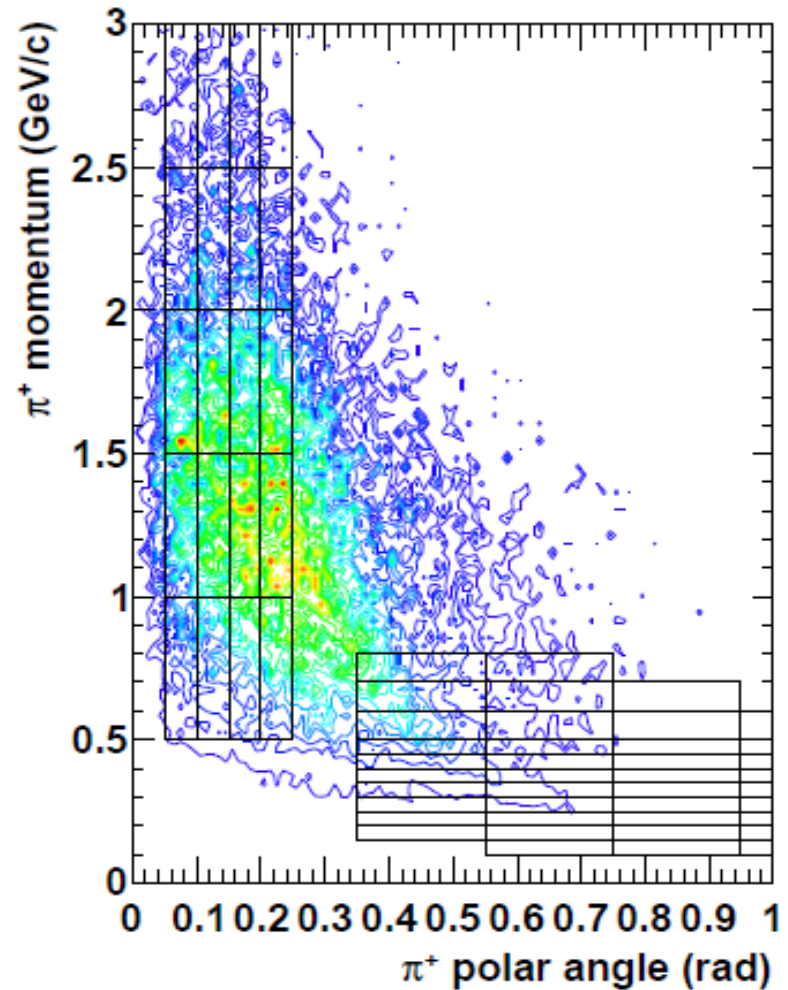
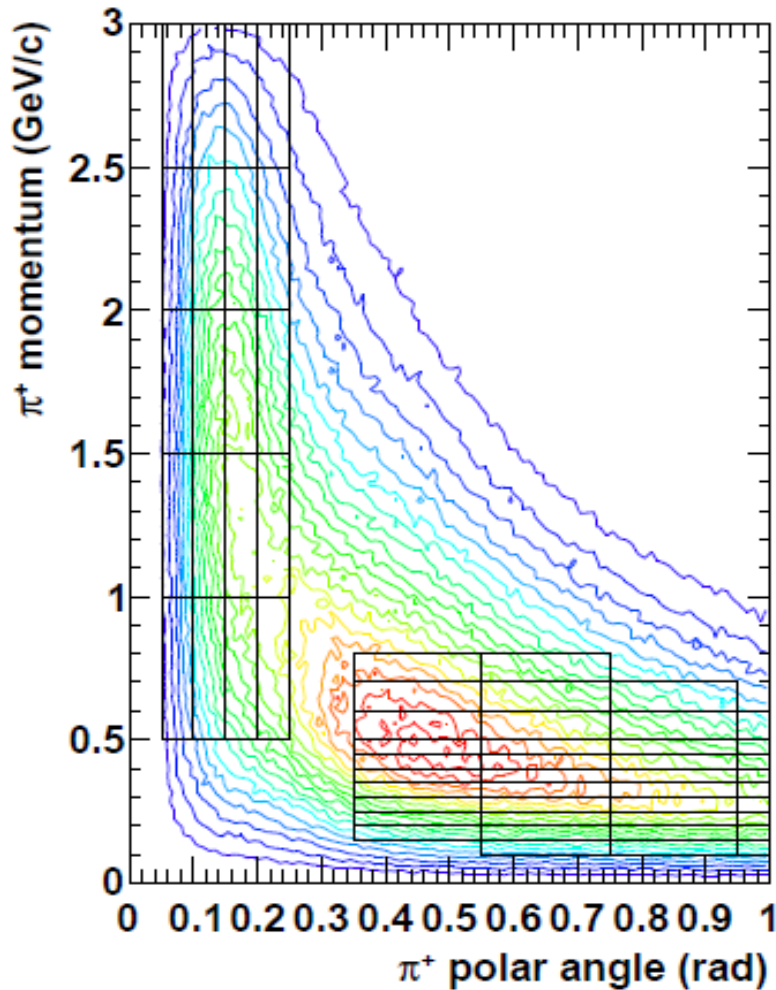
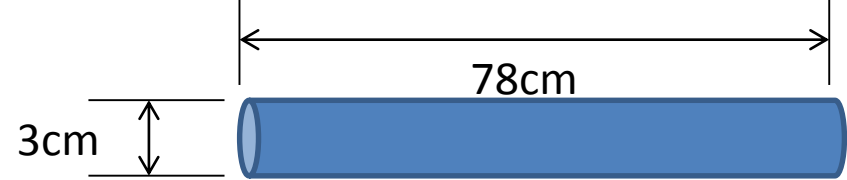
次のスライドの4.5 GeV proton driver with a power of 4 MW at CERN (HP-SPL)の計算から、エイヤーと求めると、

$$\theta [\text{rad}] = 0.015 + 0.24/p [\text{GeV}/c]$$

Also, important is a simplified Ichikawa's formula (large angle approximation):

$$\theta [\text{rad}] \approx 0.3/p [\text{GeV}/c]$$

Graphite target



at target exit (left) and after reweighting with the muon neutrino spectrum (right).

A. Longhin

A new design for the CERN-Frejus neutrino Super Beam

EUROnu-WP2-10-04, 19 November 2010

ニュートリノのenergy & angle

π^\pm

$$\pi \rightarrow \mu + \nu$$

$$M = 139.57[\text{MeV}] \quad m_\mu = 105.66[\text{MeV}]$$

CM frame

$$\varepsilon_\nu = 29.79[\text{MeV}]$$

$$T_\mu = 4.12[\text{MeV}]$$

Lorentz boost

$$p_\nu^L(\text{forward}) = \gamma(p_\nu^{CM} + \beta \varepsilon_\nu^{CM}) = \gamma p_\nu^{CM} (1 + \beta) \approx 2\gamma p_\nu^{CM}$$

$$p_\nu^L(\text{backward}) = \gamma(-p_\nu^{CM} + \beta \varepsilon_\nu^{CM}) = \gamma p_\nu^{CM} (-1 + \beta) \approx 0$$

$$\gamma = \sqrt{(\gamma\beta)^2 + 1} = \sqrt{(P/M)^2 + 1}$$

$$\gamma = \begin{cases} 3.72 & \text{for } P = 500[\text{MeV}] \\ 7.23 & \text{for } P = 1[\text{GeV}] \end{cases}$$

$$p_\nu^L(\text{forward}) \approx \begin{cases} 220[\text{MeV}] & (P = 500 [\text{MeV}]) \\ 430 [\text{MeV}] & (P = 1 [\text{GeV}]) \end{cases}$$

rel. invariant

C. M.

$$P p_\nu = M \varepsilon_\nu$$

$$P = p_\nu + p_\mu \quad p_\nu^2 = 0$$

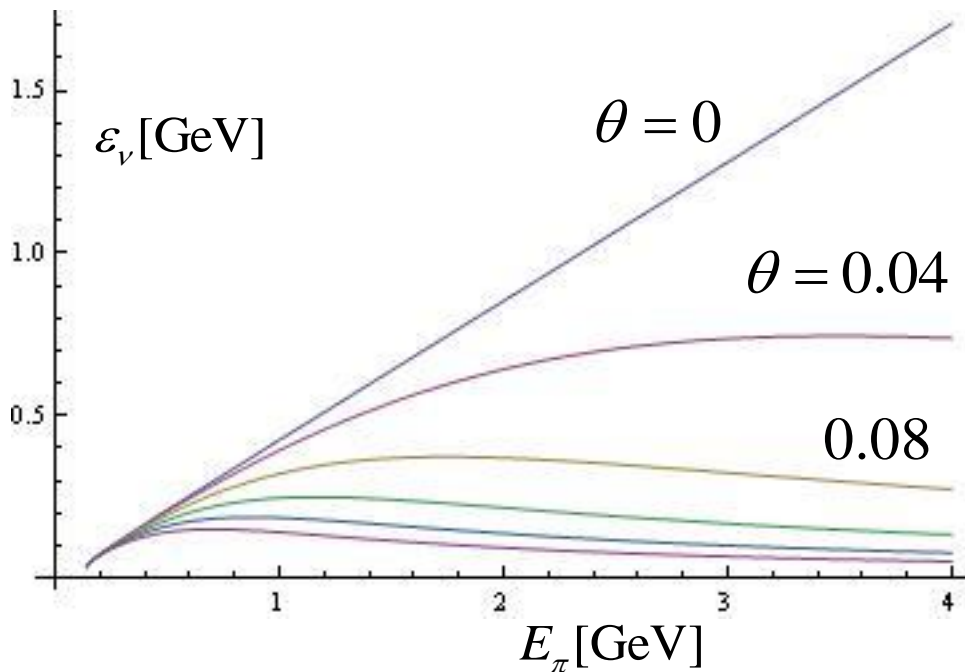
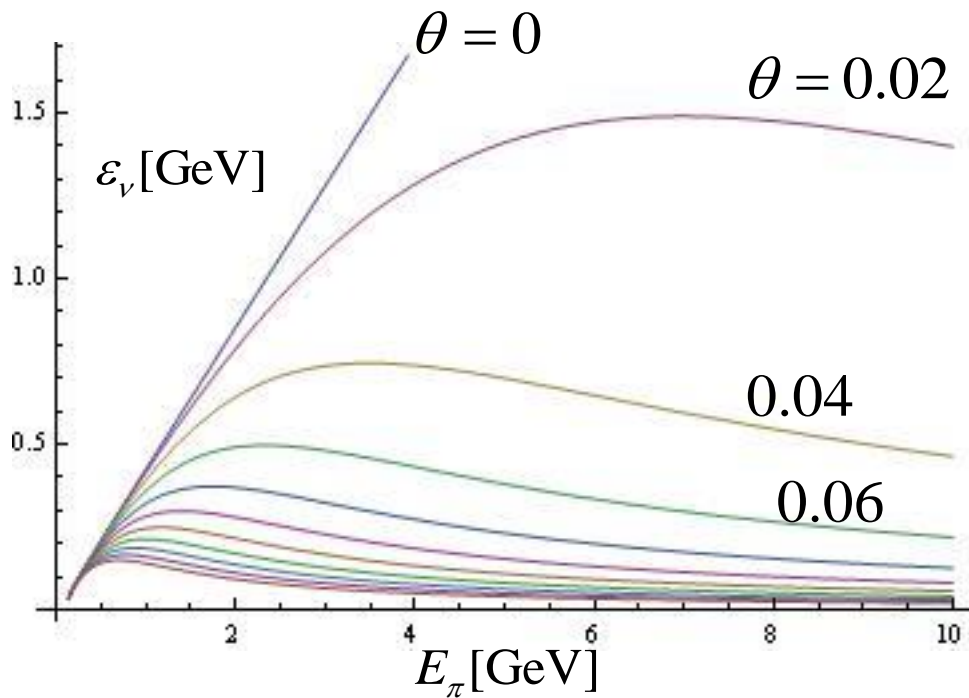
$$p_\mu p_\nu = M \varepsilon_\nu$$

$$P^2 = M^2$$

$$m_\mu^2 + 2 p_\nu p_\mu = M^2$$

$$\varepsilon_\nu = p_\nu = \frac{(M + m_\mu)(M - m_\mu)}{2M}$$

$$\varepsilon_\mu = \frac{M^2 + m_\mu^2}{2M}, \quad T_\mu = \frac{(M - m_\mu)^2}{2M}$$



$$\varepsilon_\nu^L = \frac{\varepsilon_\nu^{CM}}{\gamma_\pi (1 - \beta_\pi \cos \theta)}$$

Lorentz trans. or $Pp_\nu = M\varepsilon_\nu^{CM}$

$$E_\pi \varepsilon_\nu^L - P_\pi p_\nu \cos \theta = M\varepsilon_\nu^{CM}$$

Off-axis method

ニュートリノのエネルギーが揃う角度がある。“Magic angle”の存在。

Define “critical” energies of π and ν ,

and angle such that $\frac{d\varepsilon_\nu}{dE_\pi} = 0$.

$$\sin \theta^c = \frac{1}{\gamma_\pi^c}, \quad \varepsilon_\nu^c = \gamma_\pi^c \varepsilon_\nu^{CM}$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \mu^2 \frac{d\beta}{\beta}, \quad (\mu = \gamma\beta)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta}$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \beta^2 \frac{d\mu}{\mu}$$

直流ホーンの概略設計

From the fundamental formulae of accelerator physics;

$$p[\text{GeV}/c] = 0.3 B[\text{T}] \rho[\text{m}] \quad B \ell / (B \rho) = \theta$$

Using the simplified Ichikawa's formula, $B \ell = \theta \cdot B \rho \approx \frac{0.3}{p} \frac{p}{0.3} = 1$

必要なBI積:
(B: toroidal field) $B \ell = 1 [\text{T} \cdot \text{m}]$ (Independent of p)

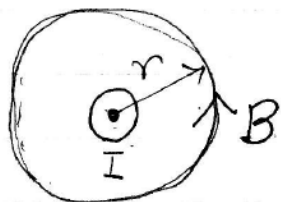
“Exact” Ichikawa's formulaとのずれ(定数項)の補正は、後述。

straw man design

Parameter choice:

(直感的 & 恣意的選択)

$B = 0.2 \text{ T}$, Length of the cylinder = 5 m

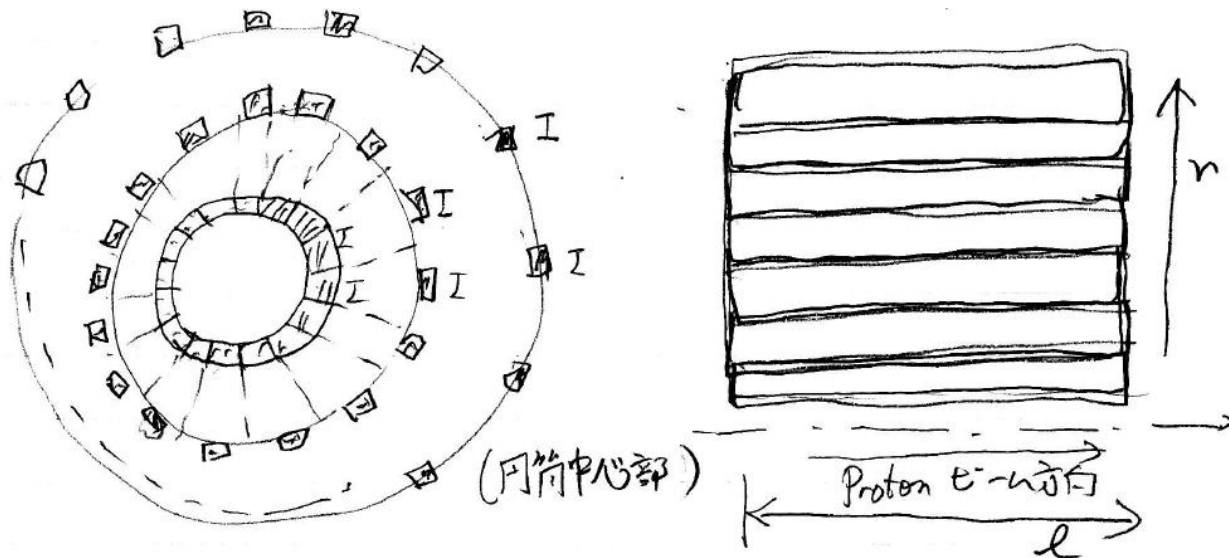


$$B = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \quad \longrightarrow \quad B = 2 \times 10^{-7} I/r \quad I = 2 \times 10^5 B \cdot r$$

ex.) $B = 0.2 \text{ T}$, $r = 0.2 \text{ m} \rightarrow I = 2 \times 10^5 \text{ A}$ **Crazy ?**

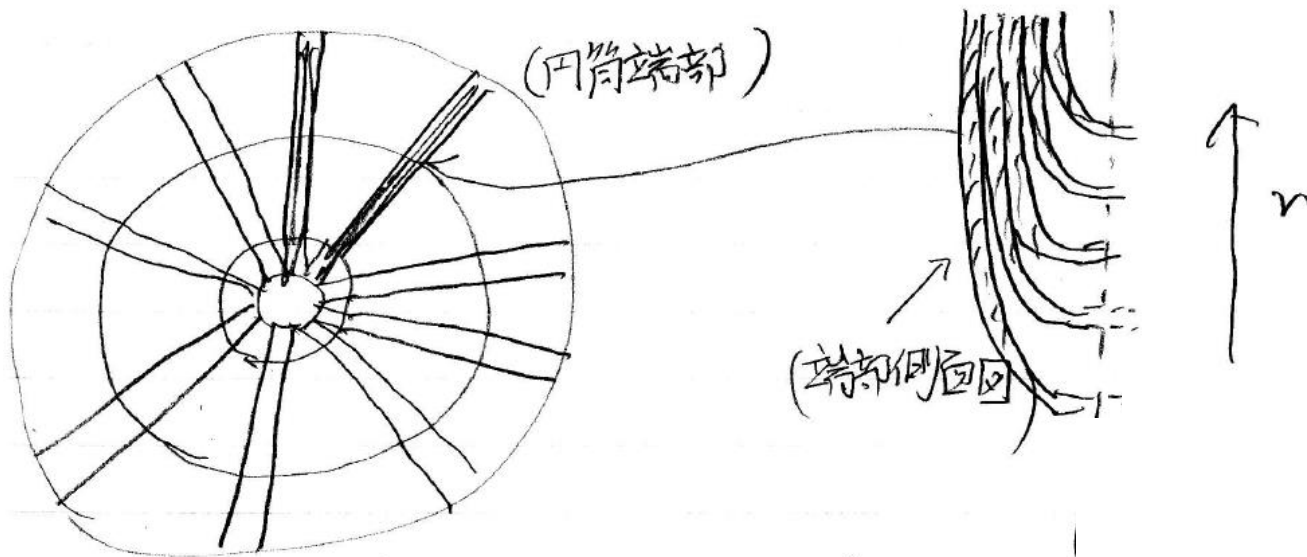
$I(r)$ が r に比例して増加すれば、 $B = \text{const.}$ つまり、 r の単位長さ当たりの電流が一定であれば、 $B = \text{const.}$ となる。

A straw man design of DC horn



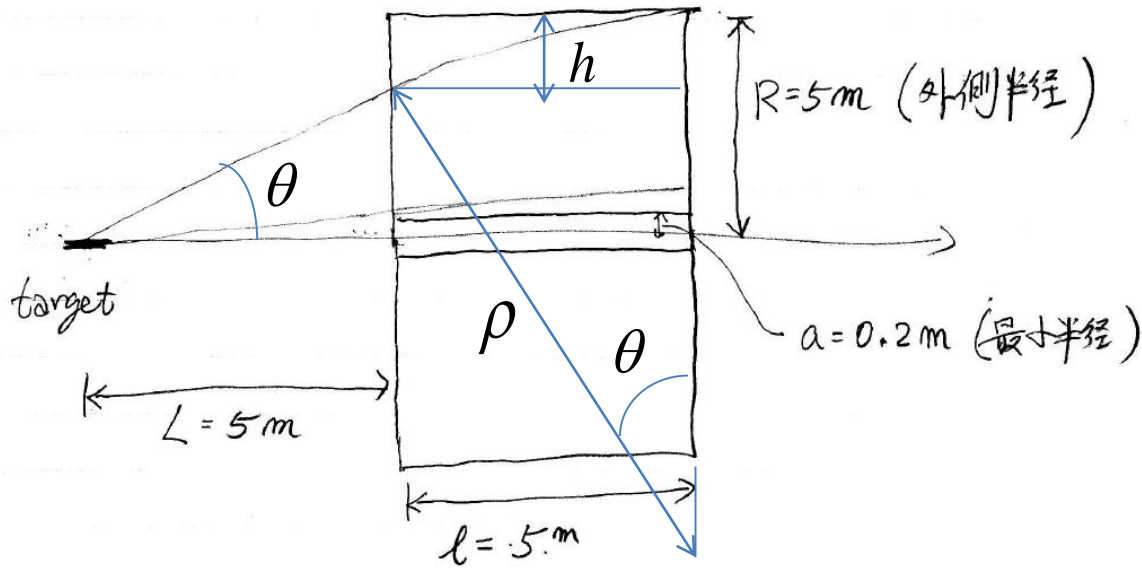
<コメント>

- 一つの導体に流れる電流は同じ
- 一つの円周の上にある導体数は同じ
- 半径方向の層間の距離(ピッチ)は同じ



<コメント>

- コイルはみ出しの“問題”については後述
- 粒子の運動への効果も後述



From elementary geometry,

$$h = \rho(1 - \cos \theta), \quad l = \rho \sin \theta$$

$$\rightarrow h = l \tan \theta / 2$$

$$R = L \tan \theta + l \tan \theta / 2$$

$$R \approx 5.275 \text{ m} \quad (\text{for } p = 0.5 \text{ GeV}/c)$$

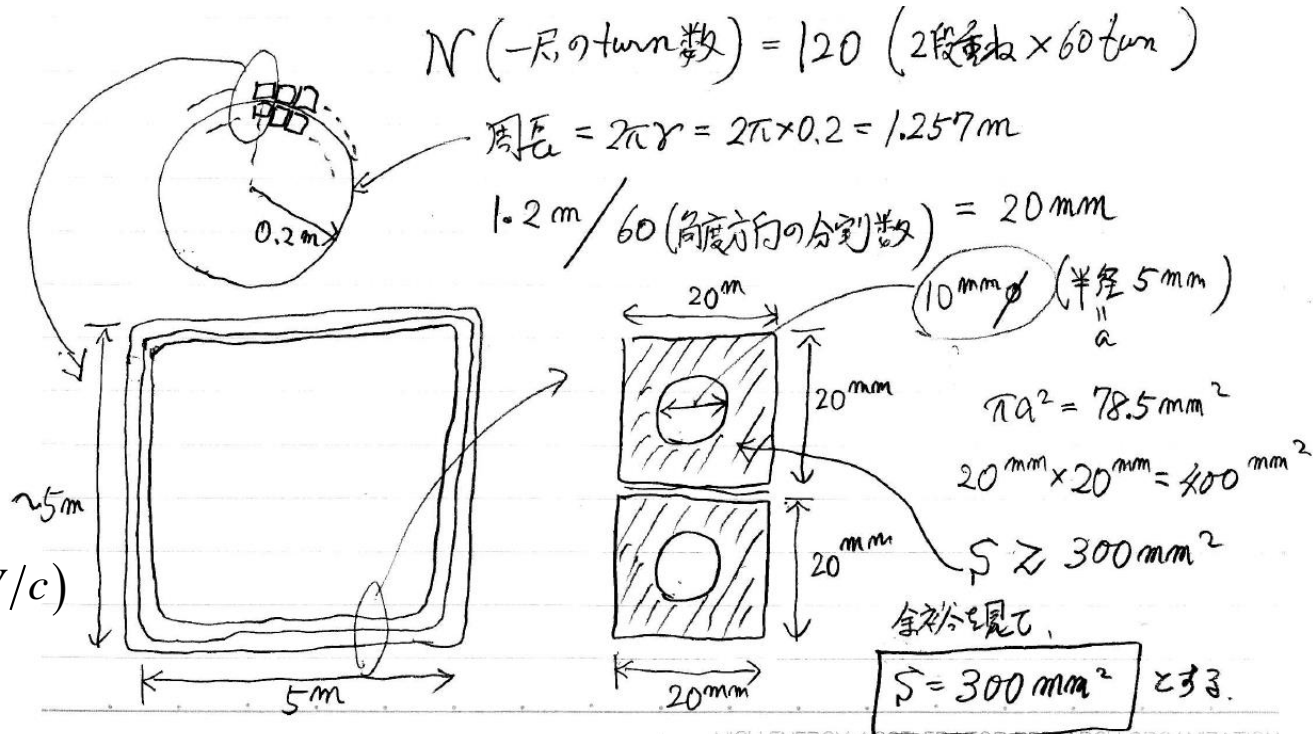
**Conductor design
(独善的デザイン)
(no optimization)**

<細かいコメント>

下段のコイルは、横幅20mmを
十分確保できていないが...

$$L \tan \theta = 0.45 \text{ m} \quad (\text{for } p = 5 \text{ GeV}/c)$$

$$(a = 0.2 \text{ m for this design})$$



導体電流: I_0

$$I_0 = I/120 = 1.667 \times 10^3 \text{ A}$$

「加速器屋」の観点から

Reasonable and conventional !

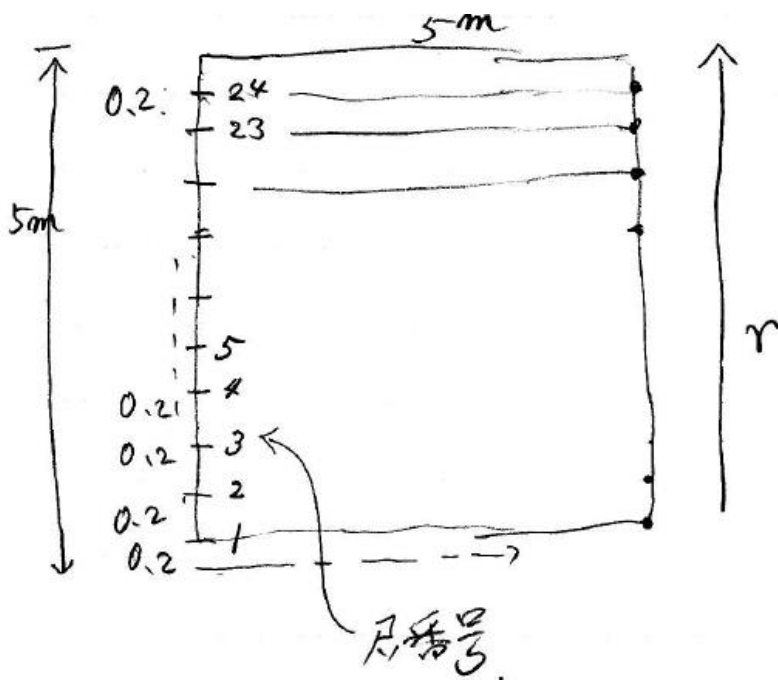
電流密度: J

$$J = \frac{1.667 \times 10^3 \text{ A}}{300 \text{ mm}^2} = 5.56 \text{ A/mm}^2$$

Reasonable and conventional !
(for water cooled conductor)

Conductorの抵抗 (R)

半径方向の導体間隔: 0.2 m => 24層



左図のコイルの長さの和

$$24 \times (2 \times 5^m) + 2 \times 0.2^m \times \frac{24 \cdot 25}{2} = 240^m + 120^m = 360^m$$

$$\text{円筒全体: } 120^{\text{turn}} \times 360^m = 4.32 \times 10^4 \text{ m}$$

$$R(\text{Al}) = \rho \ell / S = \frac{2.65 \times 10^{-8} \times 4.32 \times 10^4}{300 \times 10^{-6}}$$

$$= 3.816 \Omega @ 20^\circ \text{C}$$

$$R(\text{Cu}) = \frac{1.7}{2.65} R(\text{Al}) = 2.448 \Omega @ 20^\circ \text{C}$$

<細かい注>

磁場計算では、第一層を除き、 $(n-1/2)\Delta r$ (n :層番号)にコイルがあるとしている。よって、25層とした方がconsistentかもしれない。

電圧 V

(単一電源とすると) $V(Al) = RI = 3.816\Omega \times 1.667 \times 10^3 \text{ A} = 6.36 \text{ kV}$

(中点接地とすると) $V(Al)/2 = 3.18 \text{ kV}$ まあ、いいか？

$$V(Cu) = 4.08 \text{ kV}, \quad V(Cu)/2 = 2.04 \text{ kV}$$

所要電力(P)

$$P = VI = RI^2$$

$$P(Al) = 10.6 \text{ MW}, \quad P(Cu) = 6.80 \text{ MW}$$

KEK的センスからすれば、OK!?

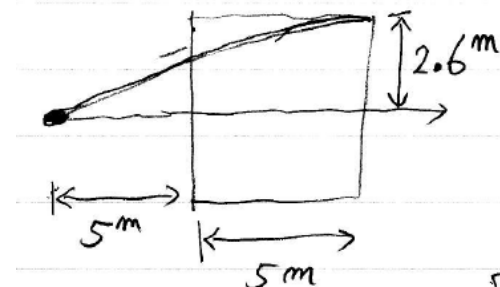
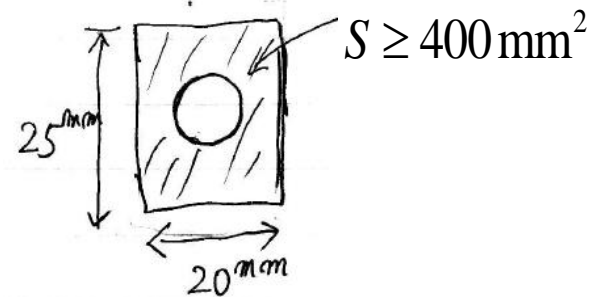
電力を減らす方策

(A) $S = 300 \text{ mm}^2 \rightarrow 400 \text{ mm}^2$
 $\Rightarrow P(Al) \rightarrow 7.95 \text{ MW}, P(Cu) \rightarrow 5.10 \text{ MW}$

(B) Only for $\geq 1 \text{ GeV}/c$ pion $\rightarrow R=2.6 \text{ m}$
 $\Rightarrow P(Al, 400 \text{ mm}^2) = 3.34 \text{ MW}, P(Cu, 400 \text{ mm}^2) = 2.14 \text{ MW}$

(C) 外側の導体を太くする

(D) 等々

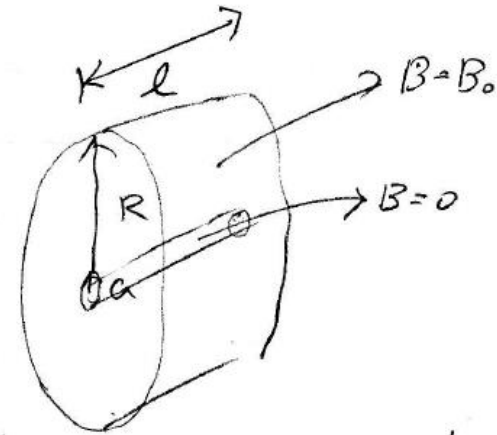


Inductance & Stored energy

Basic equation:
$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{1}{2} LI^2$$

中心付近の磁場ゼロの領域からの体積積分への寄与は無視できる。

コイル近傍の磁場の特異的振る舞いに関する積分は有限で、コイル数が多くなれば、磁場は全領域で一様としてもよい。



$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi R^2 \ell = \frac{1}{2} LI^2 \quad \rightarrow \quad L = \mu_0 \pi R^2 \ell (H/I)^2$$

第一層(各層)のtotal current: $I_1 \rightarrow H = I_1 / 2\pi a \quad I_1 = NI \quad \rightarrow \quad (H/I) = N / 2\pi a$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \ell$$

$$N_{\text{total}} = N \left(\frac{R}{a}\right) \quad \rightarrow \quad L = \frac{\mu_0}{4\pi} N_{\text{total}}^2 \ell$$

$$N = 2 \times 60 = 120, \quad R = 5 \text{ m}, \quad a = 0.2 \text{ m}, \quad \ell = 5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad L = 4.5 \text{ H}$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = 6.25 \text{ MJ}$$

$$\tau = L/R = 1.18 \text{ sec}$$

$$(\tau = 2U/P = 1.18 \text{ sec})$$

It's a conventional value.

DC運転ではなく、パルス運転した場合

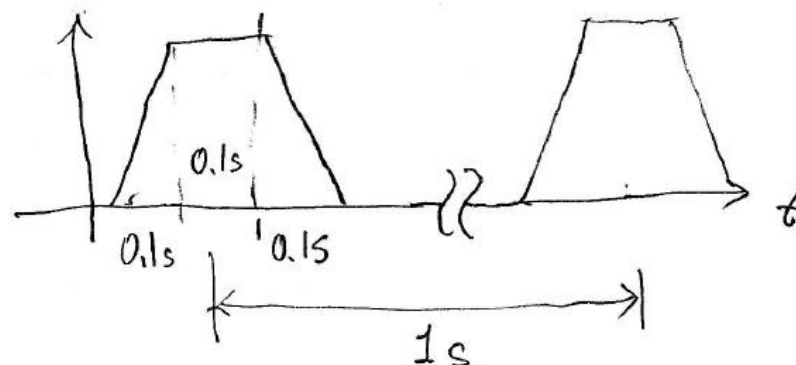
<Example>

repetition rate: □ 1sec

flat top: □ 0.1sec

rise time: □ 0.1sec

fall time: □ 0.1sec



Coilが1 seriesの場合
$$V_L = L \frac{dI}{dt} = 4.5 \times \frac{1,667 \times 10^3 \text{ A}}{0.1 \text{ s}} \approx 75 \text{ kV}$$

$$V_R \square 6 \text{ kV} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{max}} \geq 80 \text{ kV}$$

以下、若干の細かい計算を省略して、

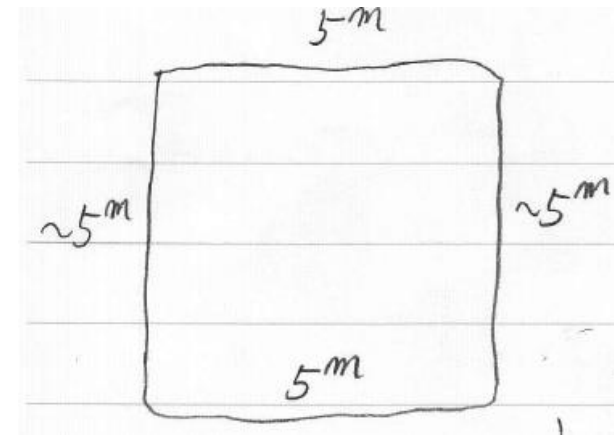
パルス運転用のPower supplyの例を挙げると、

台数: 約700台、 最大電圧(一台当たり): 約250V

(コイルの冷却は、水で行うと仮定すると)

Cooling water requirement (水回路の計算例)

例として、右図のようなコイルを考え、2段重ねのコイルを一つの水回路とする。



→ 水回路の長さ: $20^m \times 2^{turn} = 40^m$

heating power per meter = $10.6 \text{ MW} / 4.32 \times 10^4 \text{ m} = 245 \text{ W/m}$

heating power per water circuit = $40 \text{ m} \times 245 \text{ W/m} = 9.8 \text{ kW} \square 10 \text{ kW}$

Assume that $\Delta t = 15^\circ \text{C} \rightarrow$ water flow $\square 10 \ell / \text{min}$

→ (average) velocity = 2.122 m/s

cross section of water circuit = 78.5 mm^2

$$\text{Reynolds number} = \frac{2.122 \times 10^2 \text{ cm/s} \times 0.5 \text{ cm}}{1 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}} \approx 1.1 \times 10^4$$

よって、次の圧損の式が適用可

$$\Delta P [\text{kgf/cm}^2] = 0.28 \times 40 [\text{m}] (2.122 [\text{m/s}])^{1.75} / (10 [\text{mm}])^{1.25} = 2.35 [\text{kgf/cm}^2]$$

one water circuit: $40 \text{ m} \Rightarrow$ number of water circuit: $\square 1080$

one water circuit, 80 m with the same water velocity

\Rightarrow number of circuit: $\square 540$, $\Delta t = 30^\circ \text{C}$, $\Delta P = 4.7 [\text{kg/cm}^2]$

pionの寿命と直流ホーンでの損失

$$\pi^\pm: \quad Mc^2 = 139.57 \text{ MeV}, \quad \tau = 2.603 \times 10^{-8} \text{ s}, \quad c\tau = 7.8045 \text{ m}$$

$\ell_\tau = \beta\gamma c\tau$	$p [\text{GeV}/c]$	0.5	0.75	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	$\beta\gamma$	3.5824	5.3736	7.1649	14.330	21.495	28.659	35.824
	$\ell_\tau [\text{m}]$	27.96	41.94	55.92	111.84	167.75	223.67	279.59

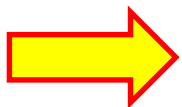
target-horn間の距離が10m程度であれば、low energy pionでも相当数、decayする前に集めることができる。 (70% for 0.5GeV/c)

pionの損失 $\sigma_{TOT}(\pi^\pm p) \approx 30 \text{ mb} (\geq 0.5 \text{ GeV})$ $\sigma_{TOT}(\pi^\pm d) \approx 60 \text{ mb} (\geq 0.5 \text{ GeV})$

$$\frac{1}{\ell_m} = \frac{N_A \rho}{M_p} \sigma \quad (M_p \approx 1 \text{ g}) \quad \longrightarrow \quad \ell_m(\text{Al}) = 20.5 \text{ cm} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} 20\text{mm厚のAlの板を} \\ 0.1\text{radの角度で横切} \\ \text{る長さに相当} \end{array}$$

energy loss of 1GeV/c π in Al: $-dE/dx \approx 1.7 \text{ MeV}/(\text{g}/\text{cm}^2) \quad \longrightarrow \quad -dE/dx \approx 4.6 \text{ MeV}/\text{cm}$

$$\ell_E (10\% \text{ loss for } 1 \text{ GeV}) \approx 22 \text{ cm}$$



- pionのホーン通過効率を求める際には、導体(hollow conductor)をかすめるように横切るpionは失われる仮定する。
- 一方、構造補強材として、例えば数十mmφのAl棒をビームに直角に用いるのであれば、相当数使用しても「実害」はないであろう。

電磁的圧力と電磁力

円筒(ホーン)の側面も端面も、磁場はその面に平行

→ Maxwell's stressは圧力 (円筒を押し広げようとする)

$$P(\text{pressure}) = \frac{1}{2} H B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0.2)^2}{2 \times (4\pi \times 10^{-7})} = 1.59 \times 10^4 \text{ [N/m}^2 \text{ or Pascal]}$$

$$1 \text{ 気圧} \approx 0.1 \text{ MP} = 10^5 \text{ [N/m}^2 \text{]}$$

磁場中のコイルに働く力

$$F = I \times B = 1.667 \times 10^3 \text{ A} \times 0.2 \text{ T} = 3.33 \times 10^2 \text{ [N/m]} = 34 \text{ kgf/m}$$

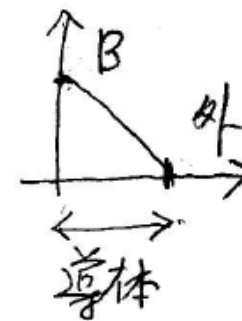
→ 1m毎程度に金属パイプまたは金属線で吊れば、多分、OK ?

<計算のチェック>

第一層に働く「似非」圧力

$$\tilde{P} = F \times N / 2\pi a = 3.33 \times 10^2 \times 120 / 2\pi \times 0.2 = 3.18 \times 10^4 \text{ [N/m}^2 \text{]}$$

「真の」圧力 $P(\text{pressure}) = \tilde{P} / 2$



磁場中の導体の変形

$$EI \frac{d^4 h}{dx^4} = f(x) \quad (f: \text{force per unit length})$$

E : Young's modulus, I : area moment of inertia

$$f(x) = -F(\text{magnetic force}) \quad a = F/EI$$

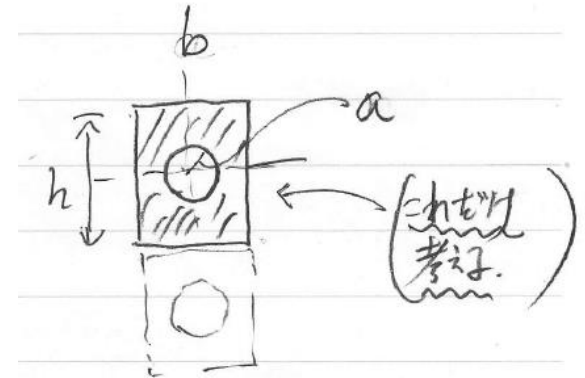
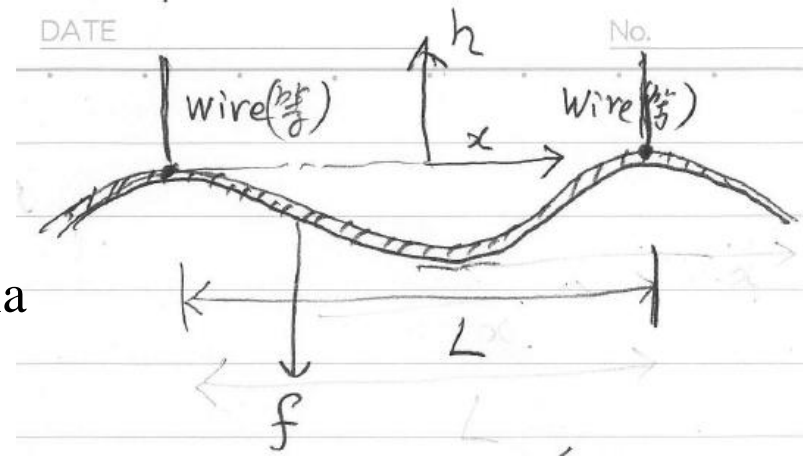
$$\frac{d^4 h}{dx^4} = -a \quad \Rightarrow \quad h(x) = -\frac{a}{4!} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \left(x + \frac{L}{2}\right)^2$$

$$|h|_{\max} = \frac{1}{2^4 4!} \left(\frac{F}{EI}\right) L^4$$

$$I = \frac{h^3 b}{12} - \frac{\pi}{4} a^4 \quad h = b = 20 \text{ mm}, \quad a = 5 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad I = 1.28 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$E(\text{Al}) = 7.03 \times 10^{10} [\text{N/m}^2] \quad E(\text{Cu}) = 12.98 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$$

$$|h|_{\max} = \begin{cases} \frac{3.33 \times 10^2}{2^4 \cdot 4! \cdot 7.03 \times 10^{10}} \frac{1^4}{1.28 \times 10^{-8}} = 0.96 \text{ mm} & (L = 1\text{m}) \\ \square 60 \mu\text{m} & (L = 0.5\text{m}) \end{cases}$$



そうであるすると、次に気になるのは吊り具の強度である？

[仮定]

- 「恣意的に」吊り間隔を20 cmに縮める
- 「吊り棒(支持棒)」の太さは一定
- 負荷加重は連続分布で近似

$$E \frac{dh}{dx} = \frac{F_{total}}{S} (1 - x/L)$$

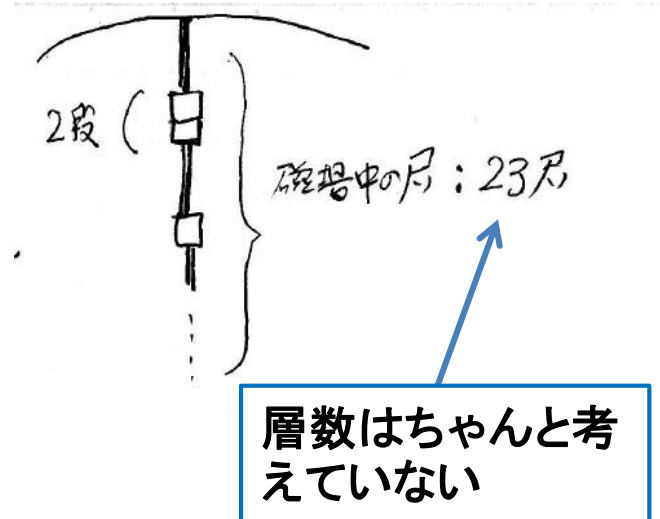
$$h = \frac{F_{total}}{S E} x \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \rightarrow h_{max} = \frac{F_{total}}{S E} L$$

$$F_{total} = 2^{turn} \times 23^{layer} \times 3.33 \times 10^2 \text{ [N/m]} \times 0.2^m = 3.07 \times 10^3 \text{ N}$$

$$L \approx 5 \text{ m}, S = 7.85 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ (10 mm } \phi \text{ bar)}, E \approx 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$h_{max} \approx 0.2 \text{ mm}, F_{total} / S = 39 \text{ (MPa)}$$

多分、OK!



Coilの重量

$$Vol = (400 \text{ mm}^2 - 78.5 \text{ mm}^2) \times 4.32 \times 10^4 \text{ m} = 13.889 \text{ m}^3$$

$$M_{coil} (Al) = 2.7 \text{ ton/m}^3 \times Vol = 37 \text{ ton}$$

$$M_{coil} (Cu) = 8.96 \text{ ton/m}^3 \times Vol = 124 \text{ ton}$$

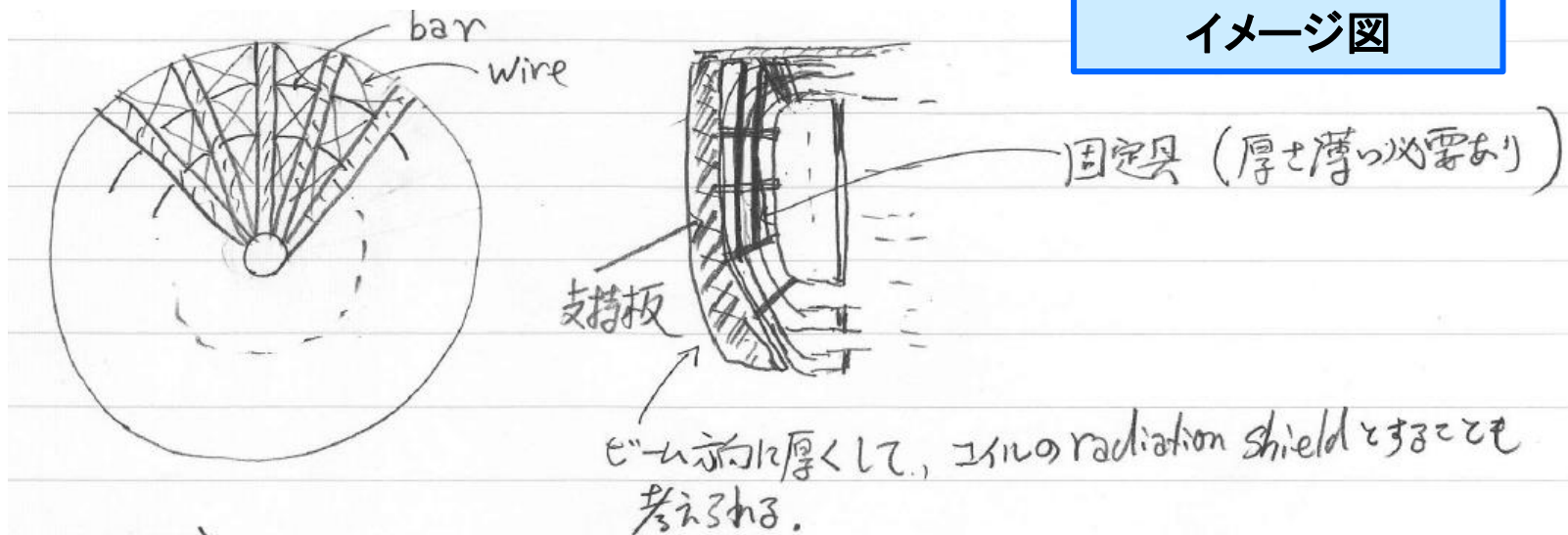
支持棒にかかる最大重量 G_{total}

$$G_{total}(Al) = 5^m \times 23^{layer} \times 2^{turn} \times (400\text{mm}^2 - 78.5\text{mm}^2) \times 2.7 \text{ ton/m}^3 \times 9.8\text{m/s}^2 / 25[\text{number of bar}]$$

$$\approx 200 \text{ kg} \times 9.8\text{m/s}^2 / 25 \approx 78 \text{ N}$$

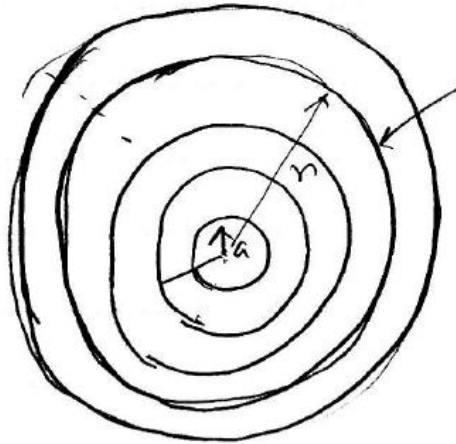
$$G_{total}(Cu) \approx 664 \text{ kg} \times 9.8\text{m/s}^2 / 25 \approx 260 \text{ N}$$

直流ホーンの構造設計のようなことは全くなされていないが……



- コイルの固定、支持等の方法
- コイルの絶縁方法
- 円筒の構造及びリターン・コイルの構造・固定等

磁場の一次元計算(一次元近似)[磁場の一様性について]



- 各円の全電流は同じ
- 各円の半径は、幅aで増加する
- 下図のように、コイルは、ピッチaの半整数倍の所に置く

$$B \propto \frac{I(r)}{r}$$

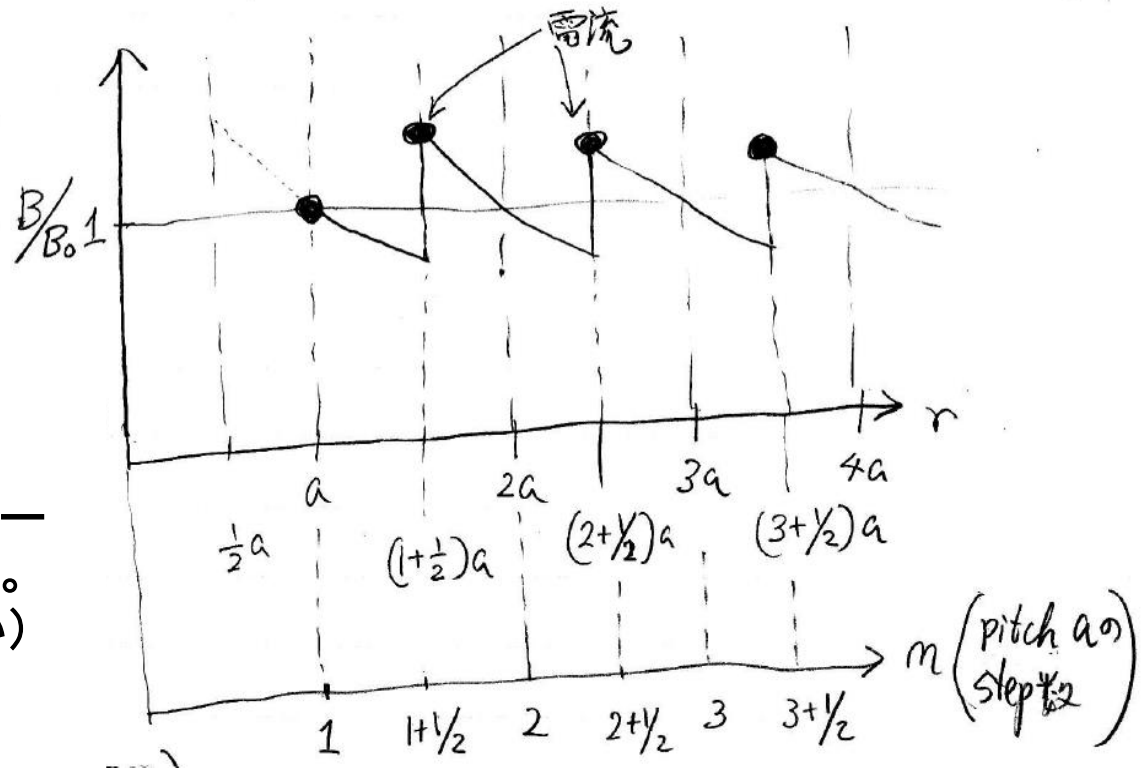
$$\frac{B}{B_0} = f(r) = \frac{[r/a + 1/2]}{r/a} \quad ([] : \text{Gauss記号})$$

ピッチaを単位とすると、

$$\frac{B}{B_0} = f(n) = \frac{[n + 1/2]}{n}$$

ただし、nは連続変数

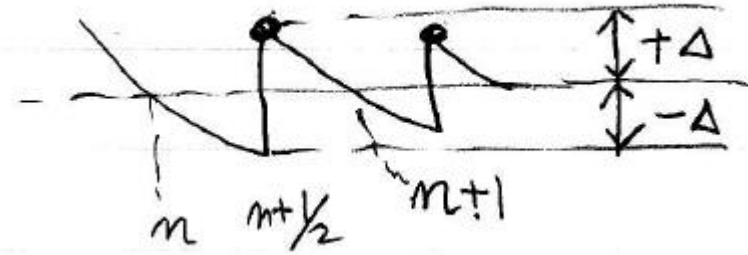
なお、第一層だけは、コイルスペースの関係で、半径aの場所に置く。
($r > a$ の磁場には全く影響はない)



磁場変動

磁場のjump:
$$2\Delta = \frac{n+1}{n+1/2} - \frac{n}{n+1/2}$$

$$\Delta = \frac{1}{2n+1}$$



平均磁場:
$$\delta = \int_n^{n+1} f(x) dx = n \ln \frac{n+1/2}{n} + (n+1) \ln \frac{n+1}{n+1/2}$$

この平均磁場は、半径方向の平均であり、粒子が実際に感じる平均磁場とは異なるが、ピッチaが小さければ、その違いは大きくないであろう。

rが小さいときは、磁場自体の変動は大きいですが、BI積(曲げ角)の変動は小さいことが期待される。

n	±Δ	δ
1	±33%	0.981
2	±20%	0.993
3	±14.3%	0.997
4	±11.1%	0.998
5	±9.1%	0.999
⋮
10	±4.8%	0.9996
20	±2.4%	0.9999

軌道に沿った磁場積分の変動

<仮定>

- 「似非」一様磁場中の粒子の軌道は、円軌道とする。
- sagittalによる有効長の変化も考慮しない(有効長で規格化する)

$$g(\theta) = \int B ds / (B_0 \int ds)$$

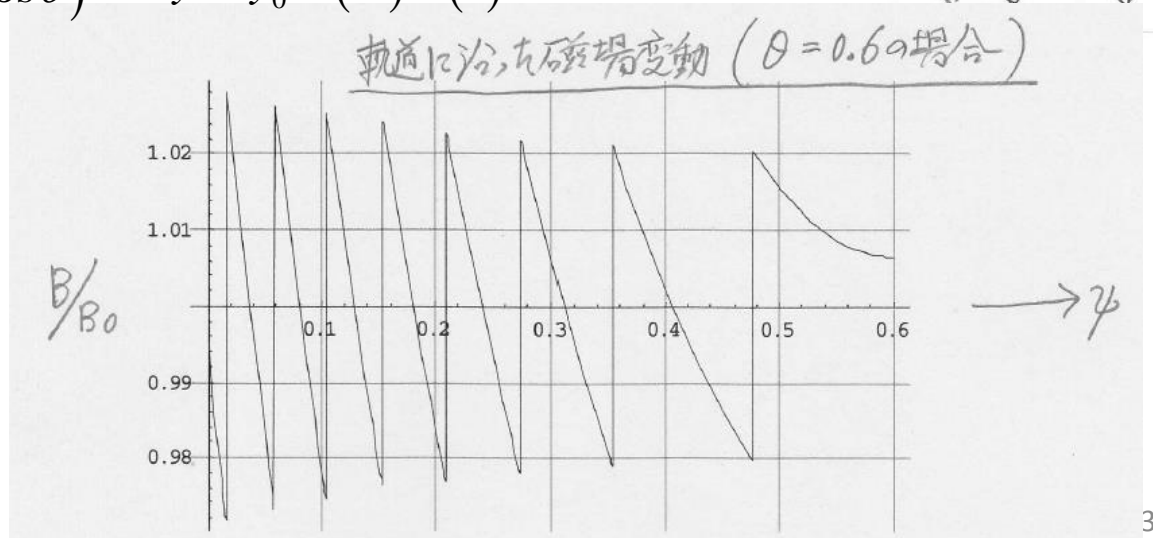
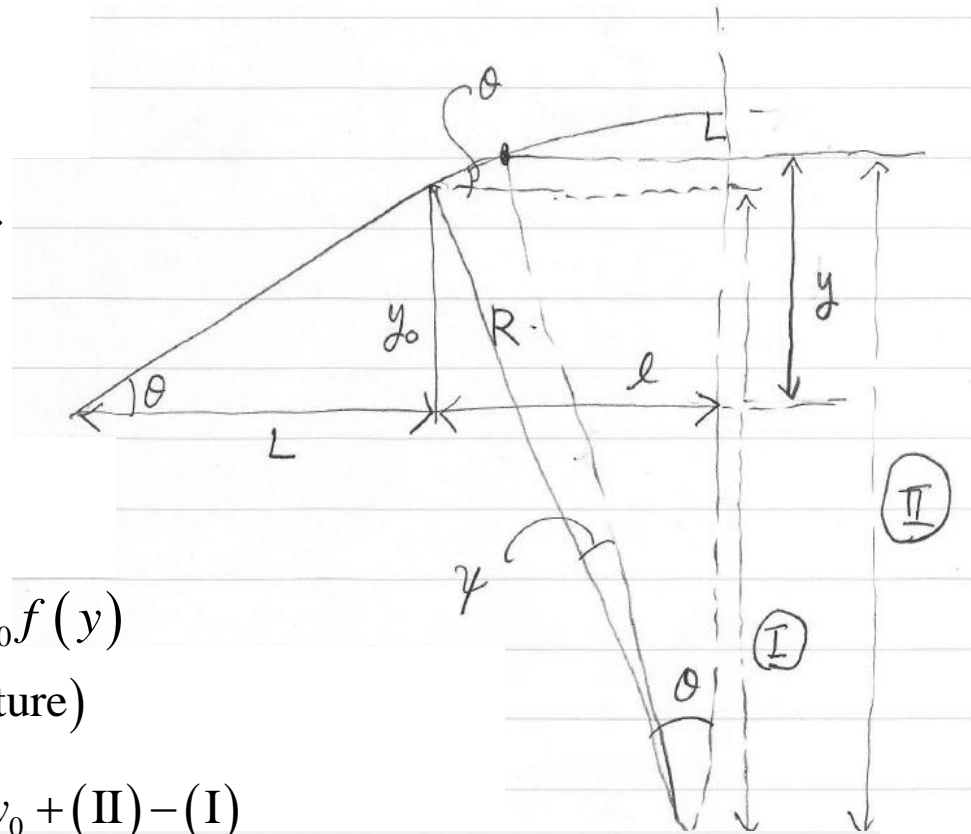
$$ds = R d\psi, \quad B_0 \int ds = B_0 R \theta, \quad B(y) = B_0 f(y)$$

$$R = \rho \text{ (radius of curvature)}$$

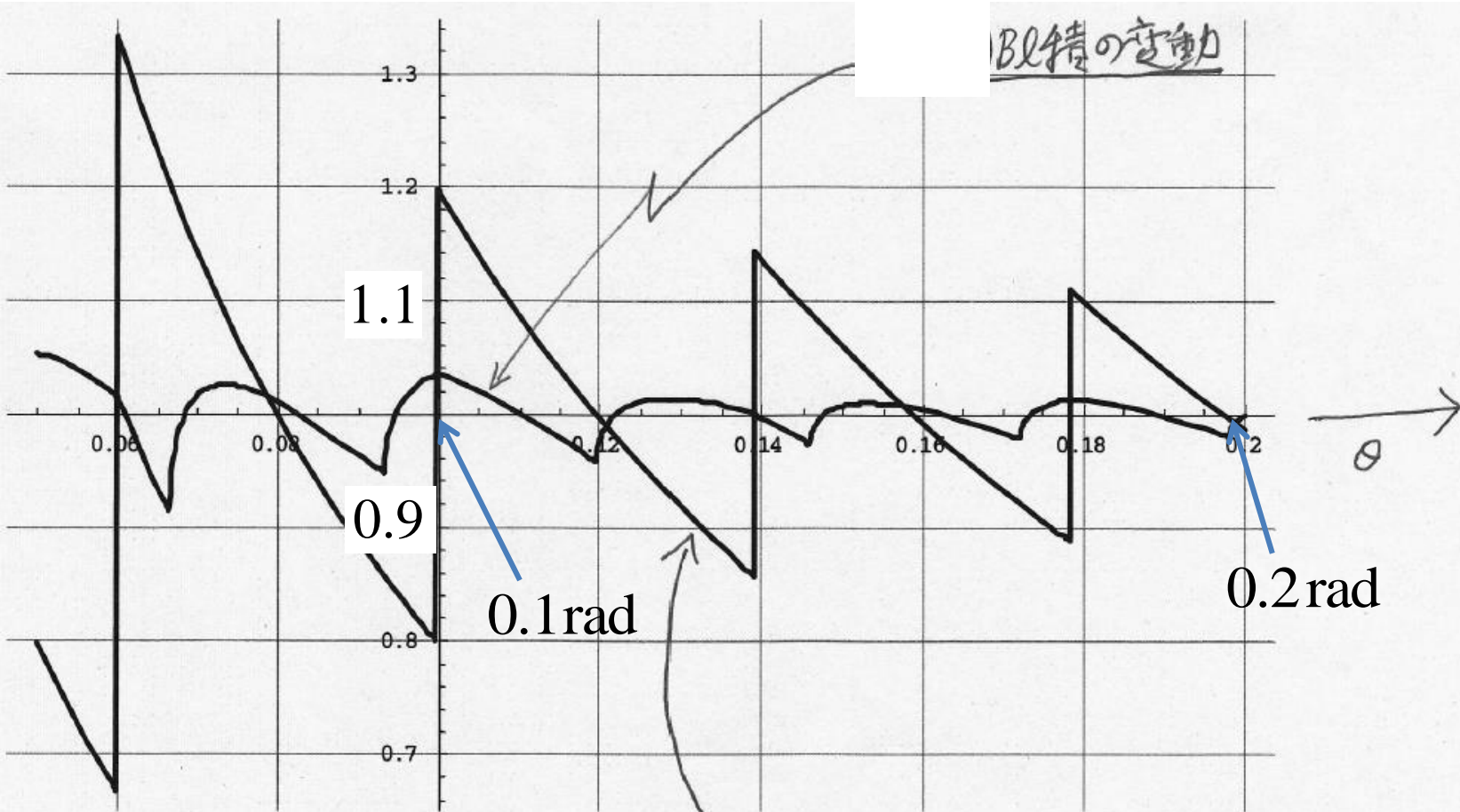
$$y = L \tan \theta + \frac{\ell}{\sin \theta} (\cos(\theta - \psi) - \cos \theta) \quad y = y_0 + (\text{II}) - (\text{I})$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\theta} \int f(y) d\psi$$

$$f(y) = \frac{[y/a + 1/2]}{y/a}$$



9/107
or
 B/B_0



B/B₀の变动

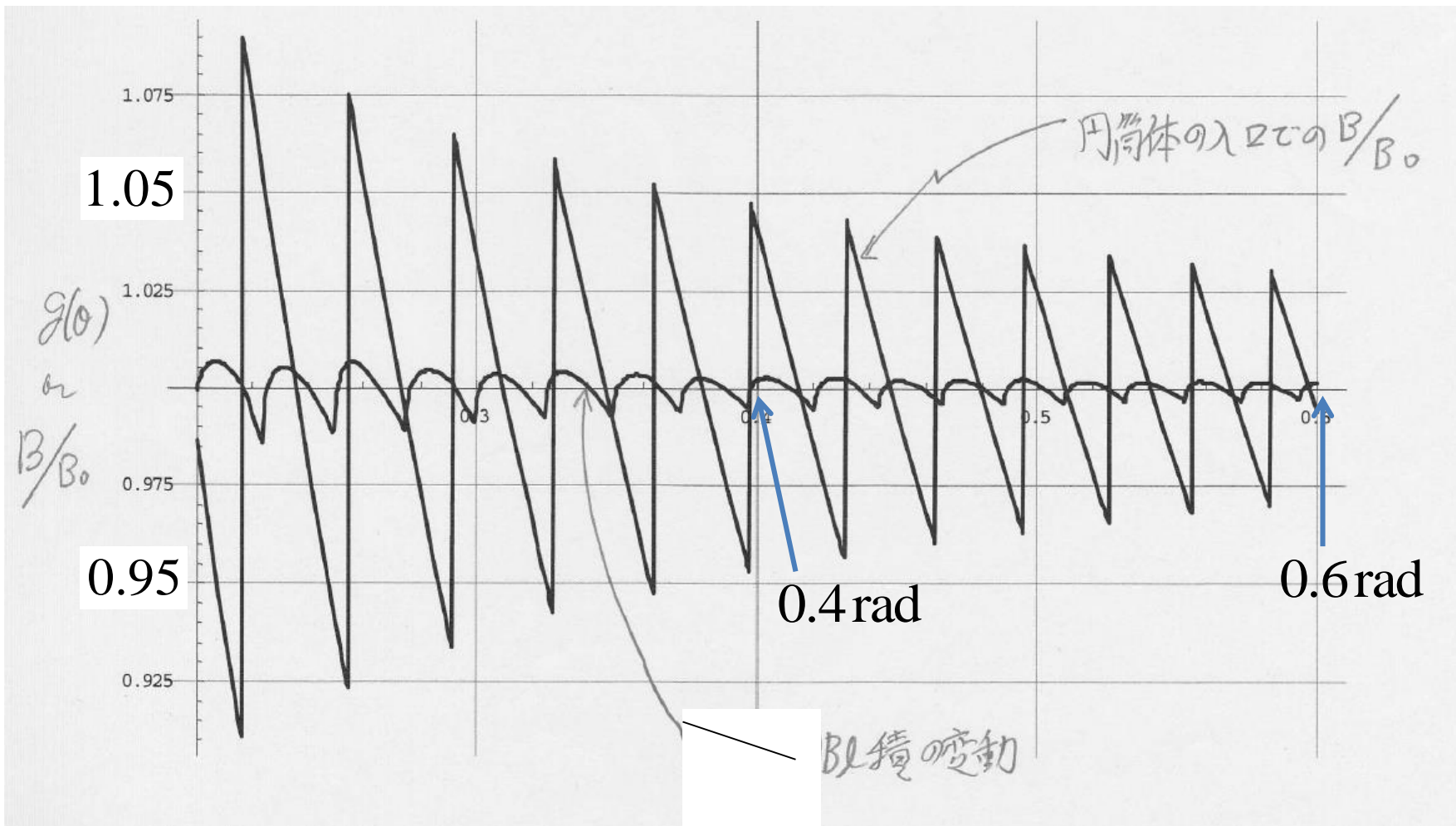
1.1

0.9

0.1 rad

0.2 rad

円筒体の入ロでの B/B_0



磁場の二次元計算(よりrealisticなモデル)

<仮定> (一つのコイルだけでなく)2段重ねのコイルを一つの線電流で置き換える

磁場の複素ポテンシャル

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} f(z) &= \Phi(z) + i\Psi(z) \\ \frac{df}{dz} &= B_x - iB_y \end{aligned}$$

$$B_x = \text{Re}(df_n/dz), \quad B_y = -\text{Im}(df_n/dz)$$

$$B = |\mathbf{B}| = \left| \frac{df_n}{dz} \right|$$

$$f = -i\kappa \log z,$$

$$\kappa = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\frac{df}{dz} = -\frac{i\kappa}{z}$$

$$B_r - iB_\theta = -i\frac{\kappa}{r}$$

$$f_n = \frac{f}{B_0}$$



$$f_n = -i a \log z$$

(ただし、添え字nは後で適当に省略)

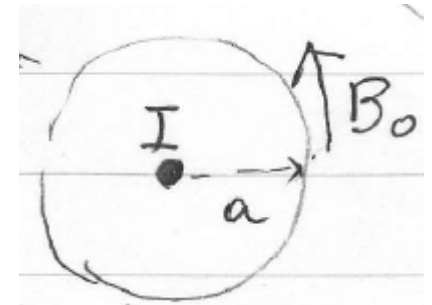
<流体力学>完全流体(非圧縮かつ渦無し)

複素速度ポテンシャル

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} f(z) &= \Phi(z) + i\Psi(z) \\ \frac{df}{dz} &= v_x - i v_y \end{aligned}$$

$$B_x - iB_y = (B_r - iB_\theta) e^{-i\theta}$$

$$B_r - iB_\theta = e^{i\theta} \frac{df_n}{dz}$$



$$B_0 = \mu_0 I / 2\pi a \rightarrow \kappa = B_0 a$$

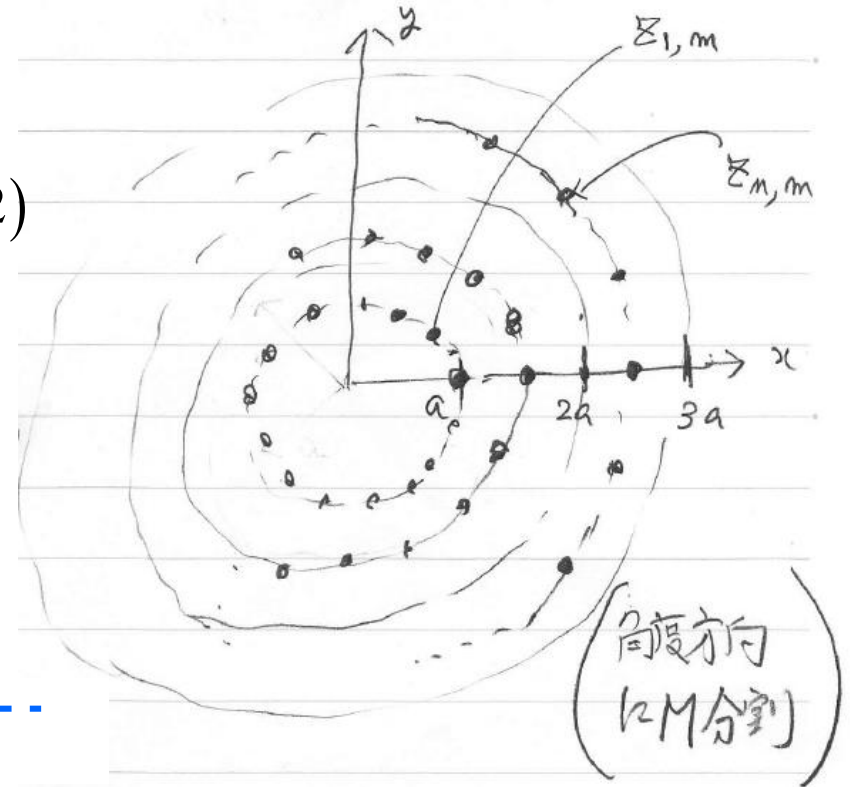
$$\alpha = 2\pi/M \quad (\text{ex. } M = 60)$$

N : number of layers

$$z_{1,m} = a e^{im\alpha}, \quad z_{n,m} = (n-1/2)a e^{im\alpha} \quad (n \geq 2)$$

$$f_n = -\frac{ia}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \log(z - z_{n,m})$$

$$\frac{df_n}{dz} = -\frac{ia}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{z - z_{n,m}}$$



On the unit circle

$$f = -\frac{i}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \log(z - \xi_m) = -\frac{i}{M} \log \prod_{m=0}^{M-1} (z - \xi_m)$$

$$\frac{df}{dz} = -\frac{i}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{z - \xi_m}$$

ξ_m : the m -th zero of $z^M - 1$



$$f = -\frac{i}{M} \log(z^M - 1)$$

$$\frac{df}{dz} = -i \frac{z^{M-1}}{z^M - 1}$$

$$\text{As } M \rightarrow \infty, \quad \frac{df}{dz} \rightarrow \begin{cases} -i/z & (r = |z| > 1) \\ 0 & (r < 1) \end{cases}$$

$$-\frac{ia}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \log(z - z_{n,m}) = -\frac{ia}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left(\log\left(\frac{z}{R} - \xi_m\right) + \log R \right), \quad (R = |z_{n,m}|)$$

$$\rightarrow -\frac{ia}{M} \log\left(\left(\frac{z}{R}\right)^M - 1\right) \quad \text{定数項は省略してもよい}$$

$$f_n = -\frac{ia}{M} \sum_{n=1}^N \log\left(\left(\frac{z}{R_n}\right)^M - 1\right)$$

$$R_n = |z_{n,m}| = \begin{cases} (n-1/2)a & \text{for } n > 1 \\ a & \text{for } n=1 \end{cases}$$

$$\frac{df_n}{dz} = -ia \sum_{n=1}^N \frac{z^{M-1}}{z^M - R_n^M} = -i \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{R_n}\right) \frac{(z/R_n)^{M-1}}{(z/R_n)^M - 1}$$

$\frac{df_n(z)}{dz}$ のイメージ

$$\frac{df_n}{dz} = \sum(\text{region I}) + \sum(\text{region II}) + \sum(\text{region III})$$

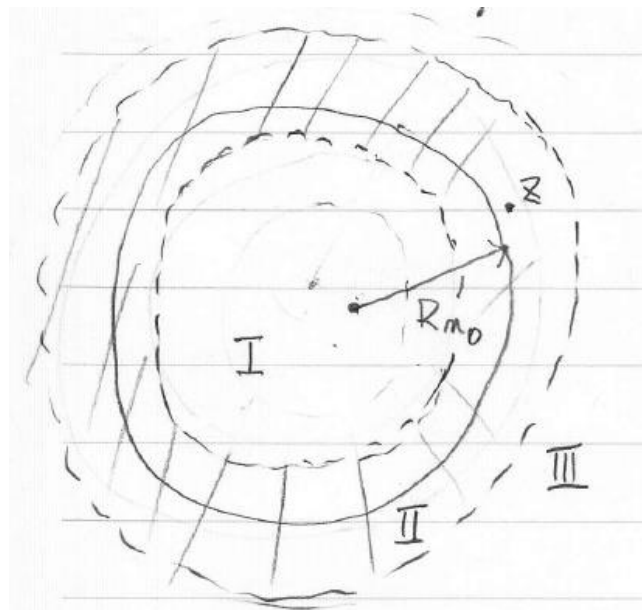
Region Iのコイルからの寄与 $\rightarrow -ia/z$

Region IIIのコイルからの寄与 $\rightarrow 0$

region I: $B_r \approx 0, B_\theta \approx \text{const.}$

region II: largely fluctuating

region III: $B \approx 0$



z がある線電流(位置: z_0)に近い場合

$$\frac{df}{dz} \approx -\frac{ia}{M} \frac{1}{z - z_0} + C + \dots$$

$$C = -\frac{ia}{R_n} \frac{d}{dz} \frac{(z - \xi) z^{M-1}}{z^M - 1} \Bigg|_{z=\xi}$$

$$C = -\frac{ia}{z_0} \left(\frac{M-1}{M} \right) \rightarrow \frac{-ia}{2z_0} \text{ for } M \gg 1$$

軌道にコイル近傍の磁場変動が与える影響

$$\int B_y dx \Big|_{y=const.} : \text{related to focusing}$$

$$\int B_x dx \Big|_{y=const.} : \text{related to bending in the } \theta\text{-direction}$$

$$\int (B_x - iB_y) dx \Big|_{y=const.} = \int_{\text{initial point}}^{\text{final point}} (B_x - iB_y) dz$$

$$\int (B_x - iB_y) dx \Big|_{y=const.} = -\frac{B_0 a}{M} (\pi - 2\varepsilon) \quad \leftarrow \quad \int_{\text{initial}}^{\text{final}} \frac{1}{z - z_0} dz = \log(z - z_0) \Big|_{\text{initial}}^{\text{final}} = i[\varepsilon - (\pi - \varepsilon)]$$

$$\int B_y dx \Big|_{y=const.} = 0 \quad \text{自明な結果}$$

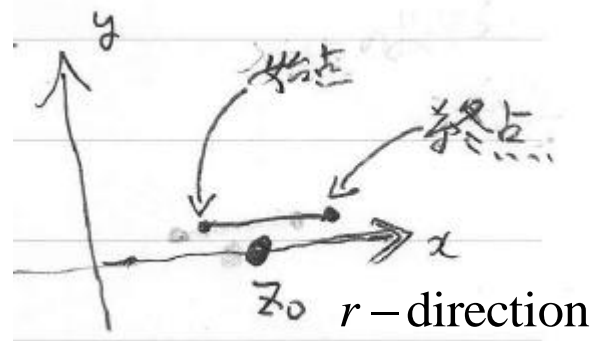
粒子がコイルをすれすれにかすめるとすると、

$$\int B_x dx \Big|_{y=const.} = -\frac{\pi B_0 a}{M}$$

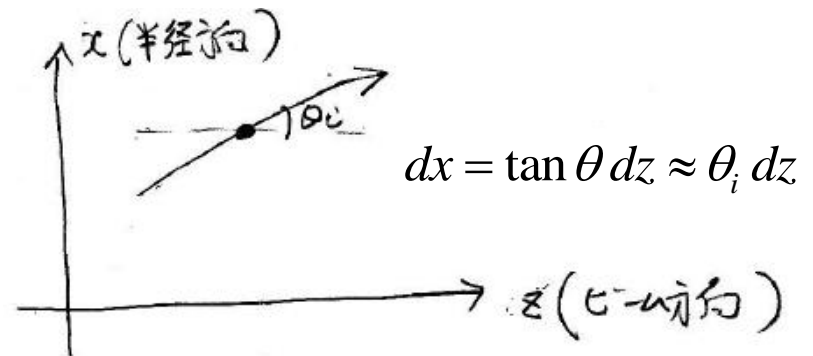
B_x によって、粒子が円周方向に曲げられる角度は、(符号は無視して)

$$\Delta\varphi = \frac{\int B_x dz}{B\rho} = \frac{1}{\theta_i} \int B_x dz \Big/ (B\rho/\theta_0) \quad \left(\theta_0 = \frac{Bl}{(B\rho)} \right)$$

θ -direction



$$\int B_x dx \Big|_{y=const.} = -\frac{\pi B_0 a}{M}$$



$$\Delta\varphi \approx \frac{\theta_0}{\theta_i} \left(\frac{\pi}{M} a \right) / \ell$$

$$\sum \Delta\varphi = \frac{\pi a}{M \ell} \sum \frac{\theta_0}{\theta_i}$$

$$\delta = \ell \Delta\varphi = \frac{\pi a}{M}$$

$$\sum \delta = \frac{\pi a}{M} \sum \frac{\ell_i \theta_0}{\ell \theta_i} \square \frac{\pi a}{M} n$$

(ℓ_i : distance between i-th coil crossing the horn exit)

(n : number of coil crossing)

<数值例>

$$\frac{\pi}{M} a = \frac{\pi \times 0.2^m}{60} = 10.5 \text{ mm}$$

$$\theta_i = \theta_0, \ell = 5^m \rightarrow \Delta\varphi = 10.5 \text{ mm} / 5 \text{ m} = 2.1 \text{ mrad}$$

for $p = 0.5 \text{ GeV}/c$, the number of crossing $\square 8$

$$\rightarrow \sum \delta \approx 84 \text{ mm (large !)}$$

Mitigated by edge focussing !

uniformity of $B\ell$: $g(\theta, \varphi) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta f(y) d\psi \quad \left(f(y) = \frac{B_\theta}{B_0} \right)$

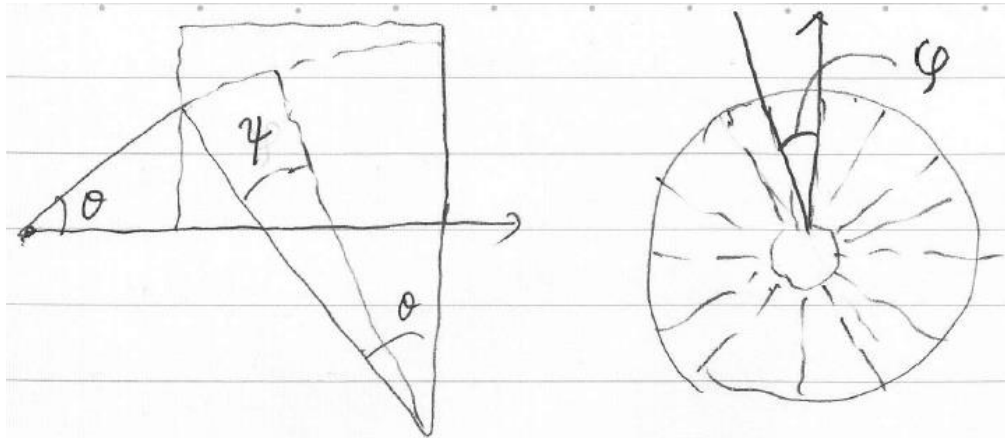
$$y = L \tan \theta + \frac{\ell}{\sin \theta} (\cos(\theta - \psi) - \cos \theta)$$

円周方向の曲げ角 (粒子はデザイン軌道上に固定されていると仮定)

$$\Delta\varphi = \frac{\int B_r dz}{B\rho} = \int h(y) \cos(\theta - \psi) d\psi \quad \left(h(y) = \frac{B_r}{B_0} \right)$$

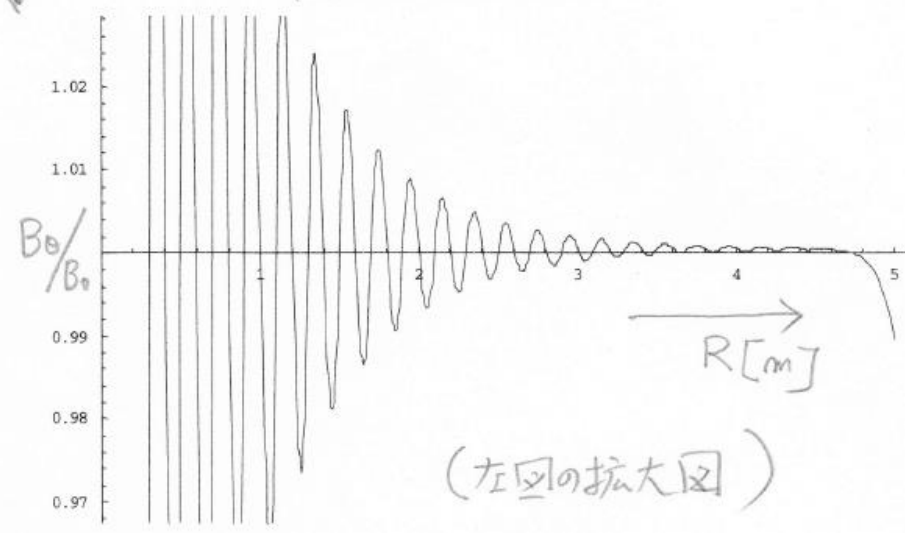
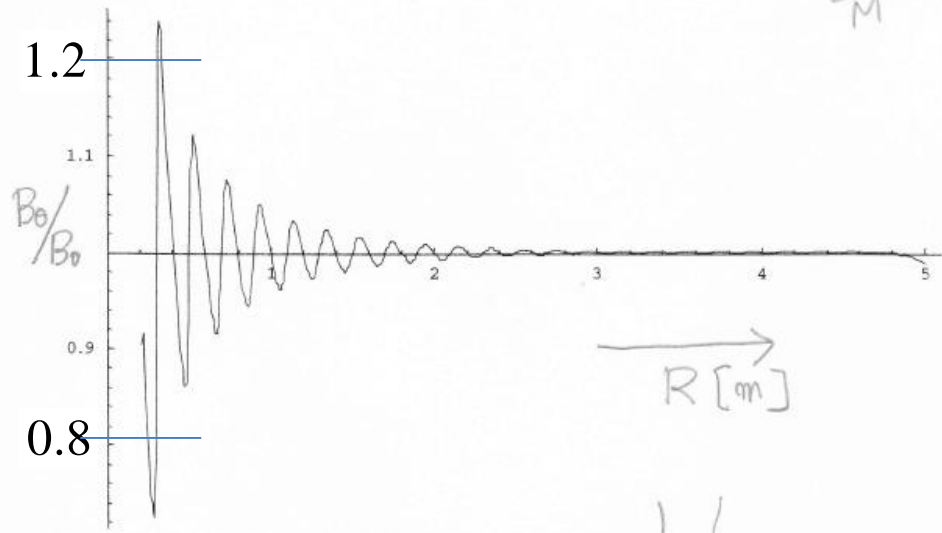
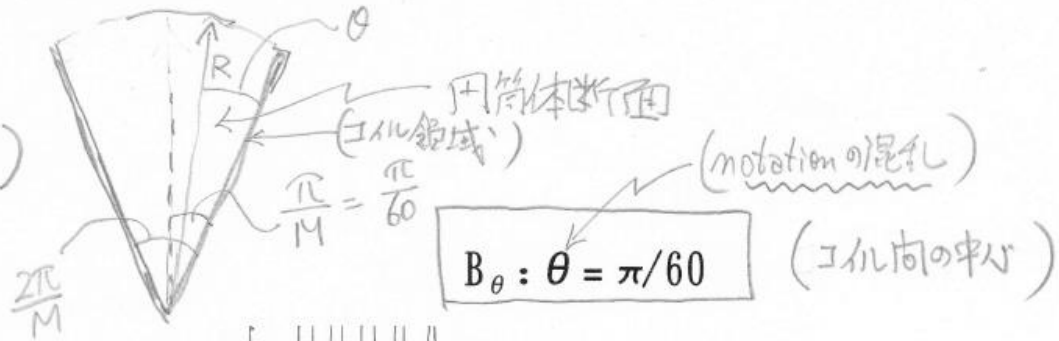
$$dz = R \cos(\theta - \psi) d\psi$$

$$B_r - iB_\theta = -i a e^{i\theta} \sum_{n=1}^N \frac{z^{M-1}}{z^M - R_n^M} = -i e^{i\theta} \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{R_n} \right) \frac{(z/R_n)^{M-1}}{(z/R_n)^M - 1}$$

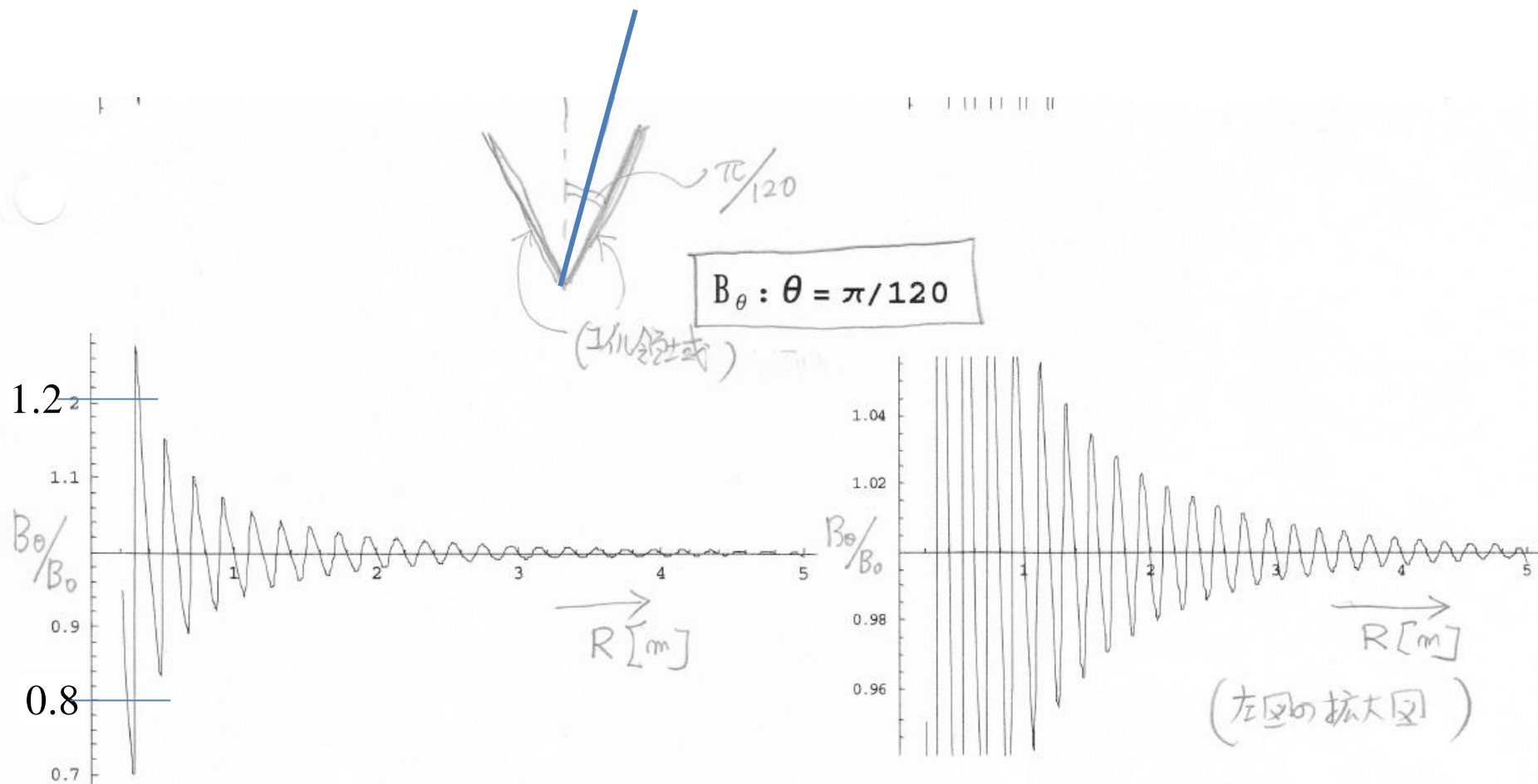


磁場のuniformity (二つのコイル列の中心線上)

$a=0.2$ $l_1=5$ $l_2=5$ $n=25$ $m=60$
 $(a=0.2^m, L=5^m, l=5^m, N=25, M=60)$

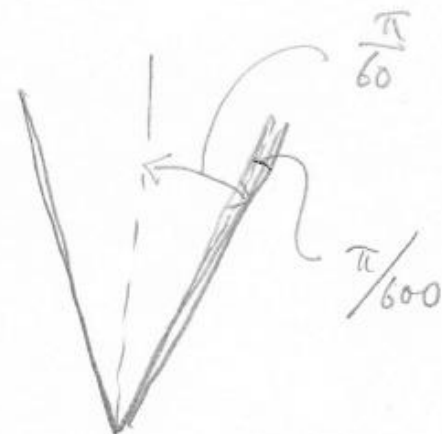
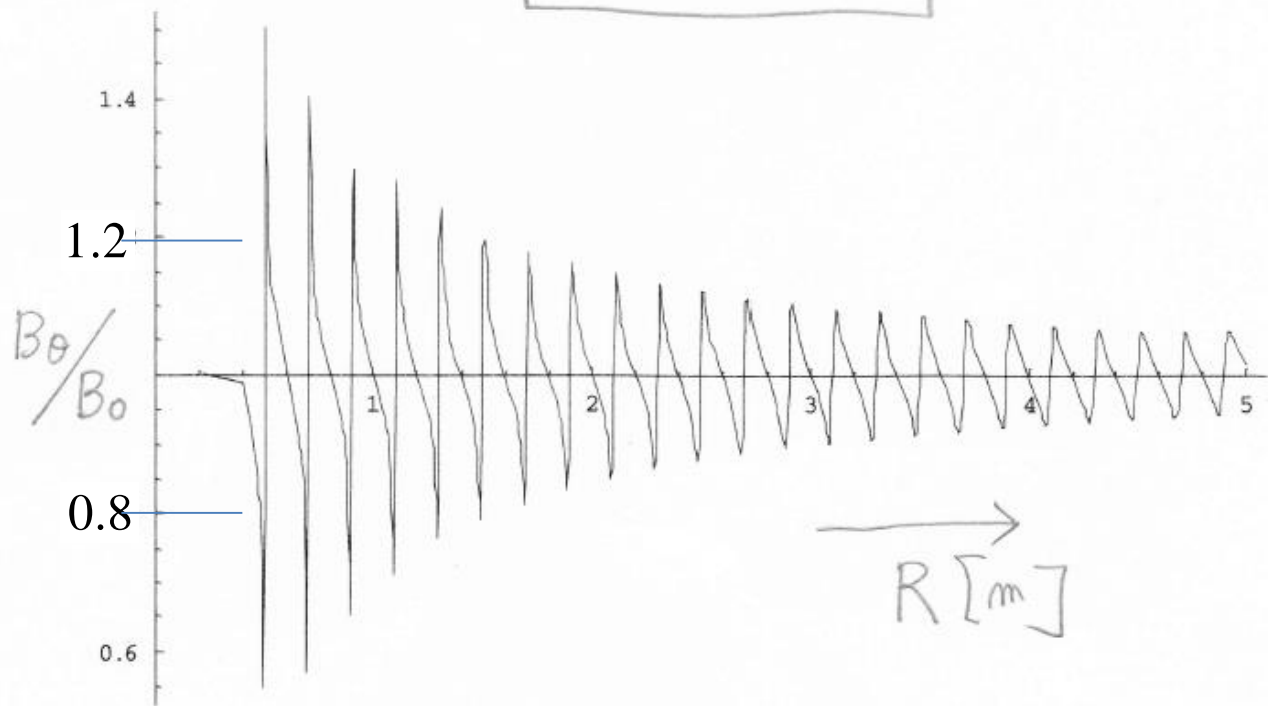


磁場のuniformity (コイル列と中心線との中間線上)

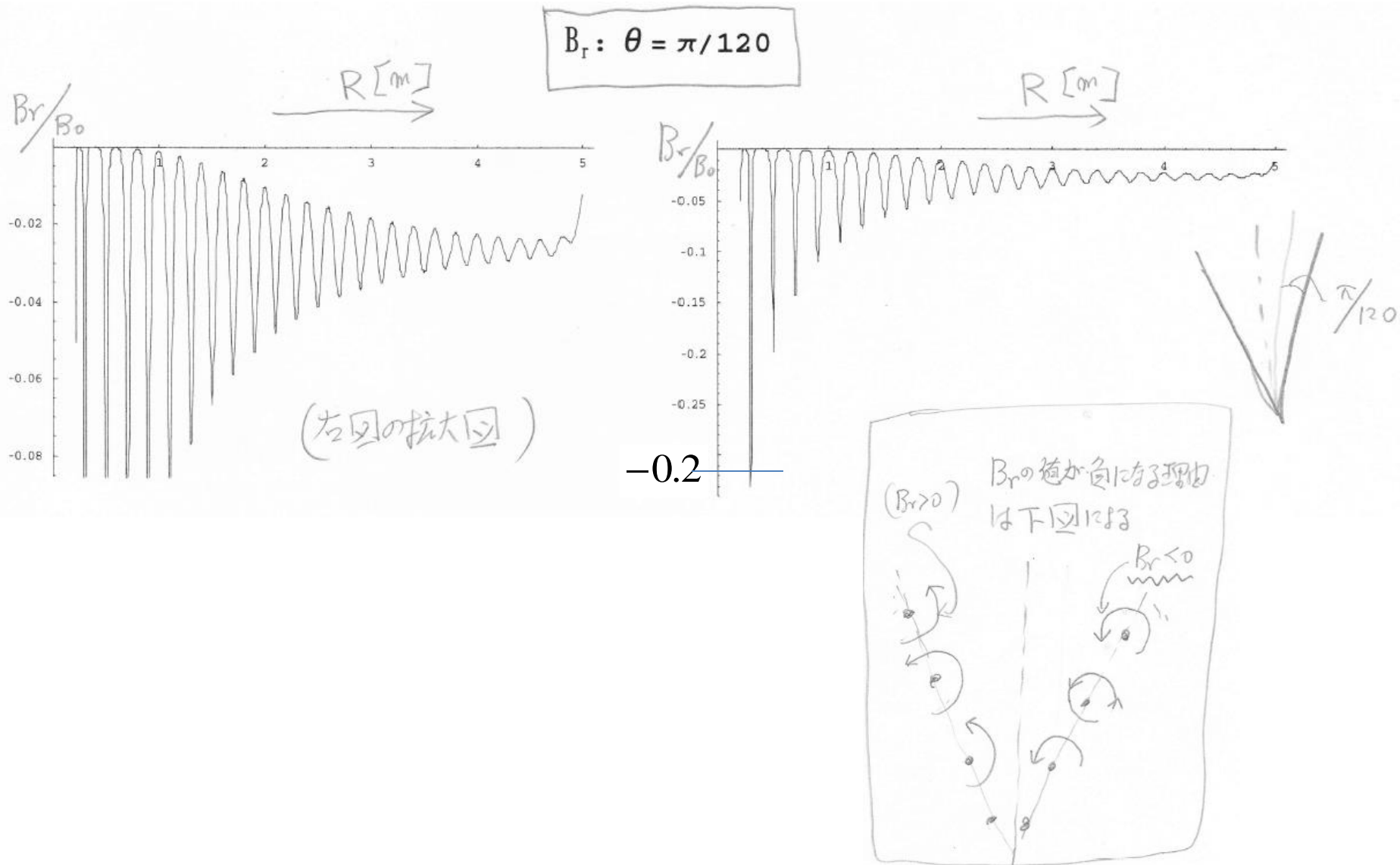


磁場のuniformity (ほとんどコイル列上)

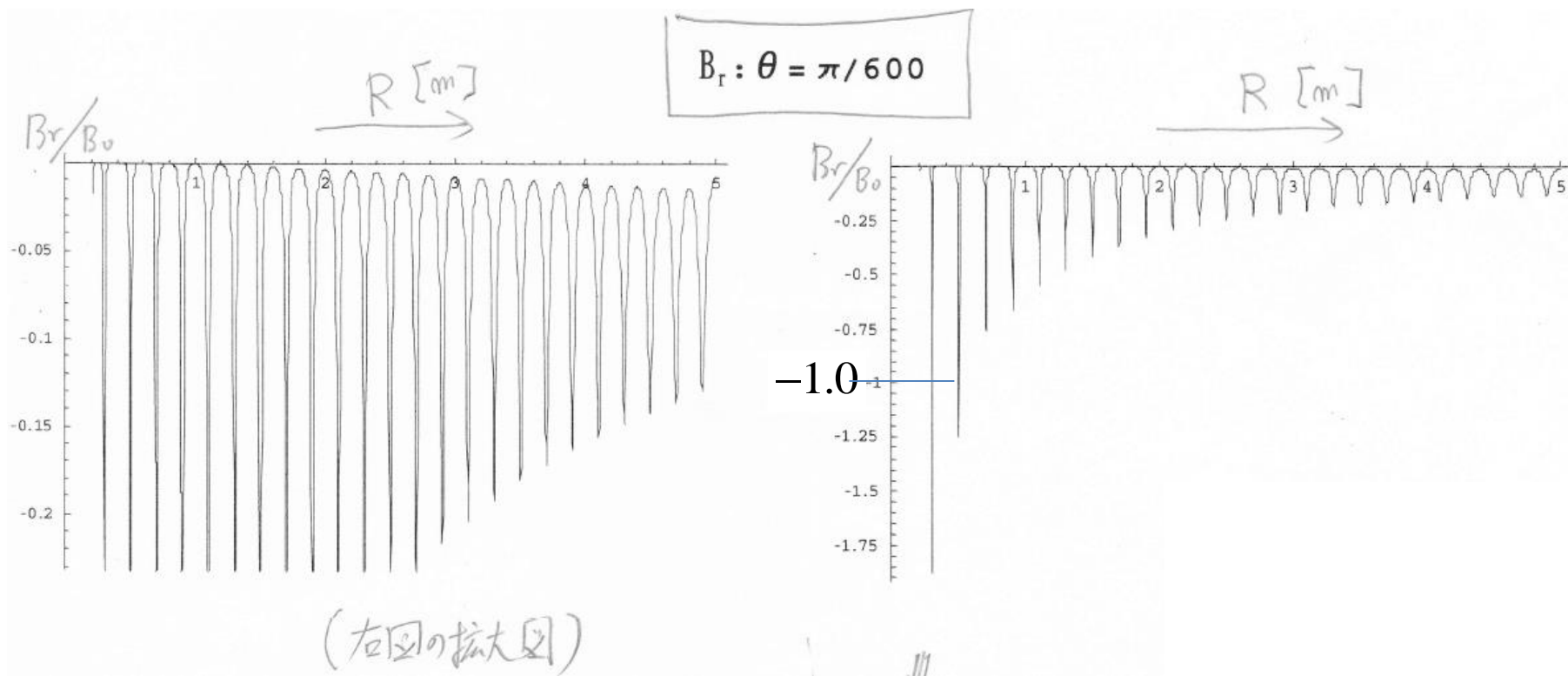
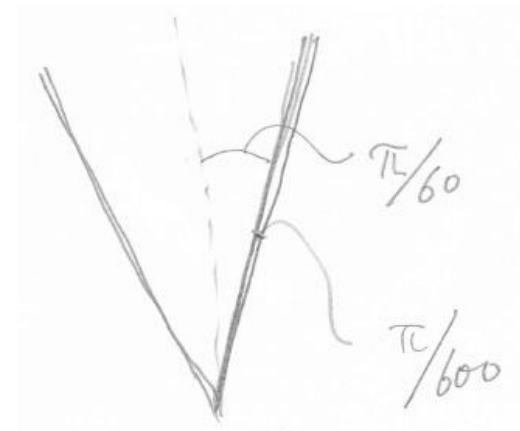
$$B_{\theta} : \theta = \pi/600$$



磁場 B_r (コイル列と中心線との中間線上)

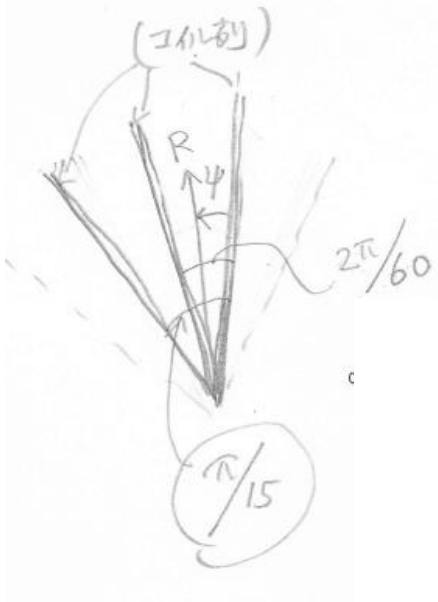


磁場 B_r (ほとんどコイル列上)

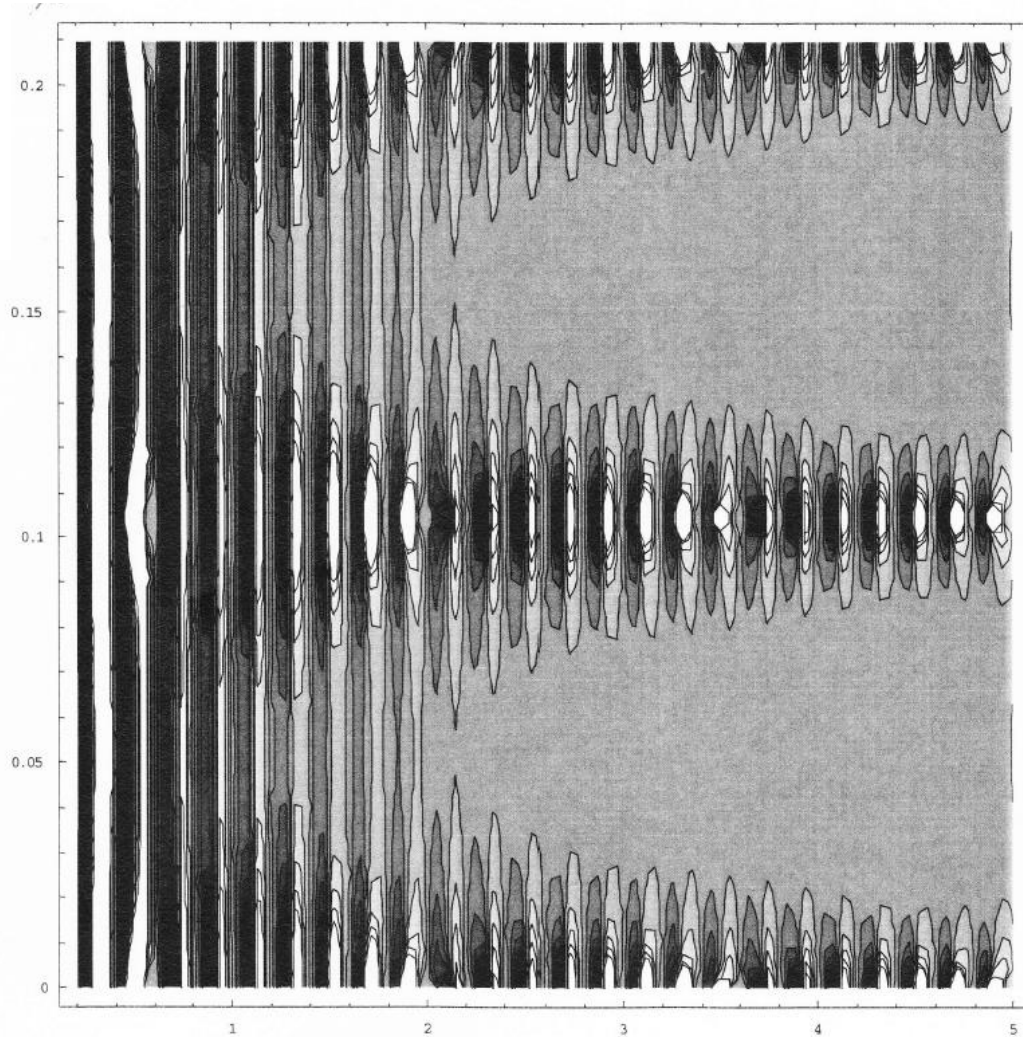


Contour plot of $|B|$

$r = 0.21$ to 5 , $\psi = 0$ to $\pi/15$



ψ ↑

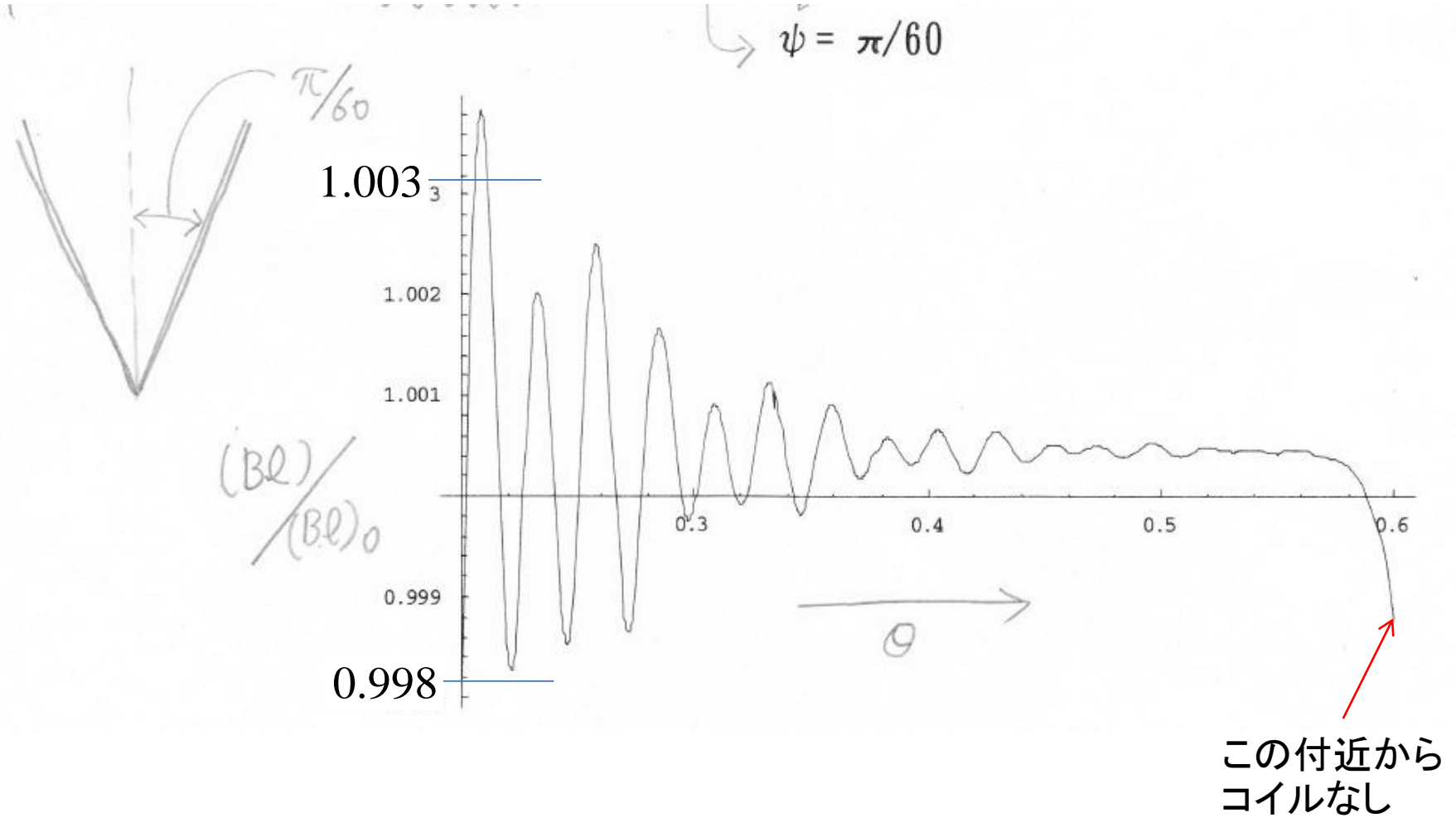


→
 $R[m]$

(工列列)

uniformity of $B\ell$

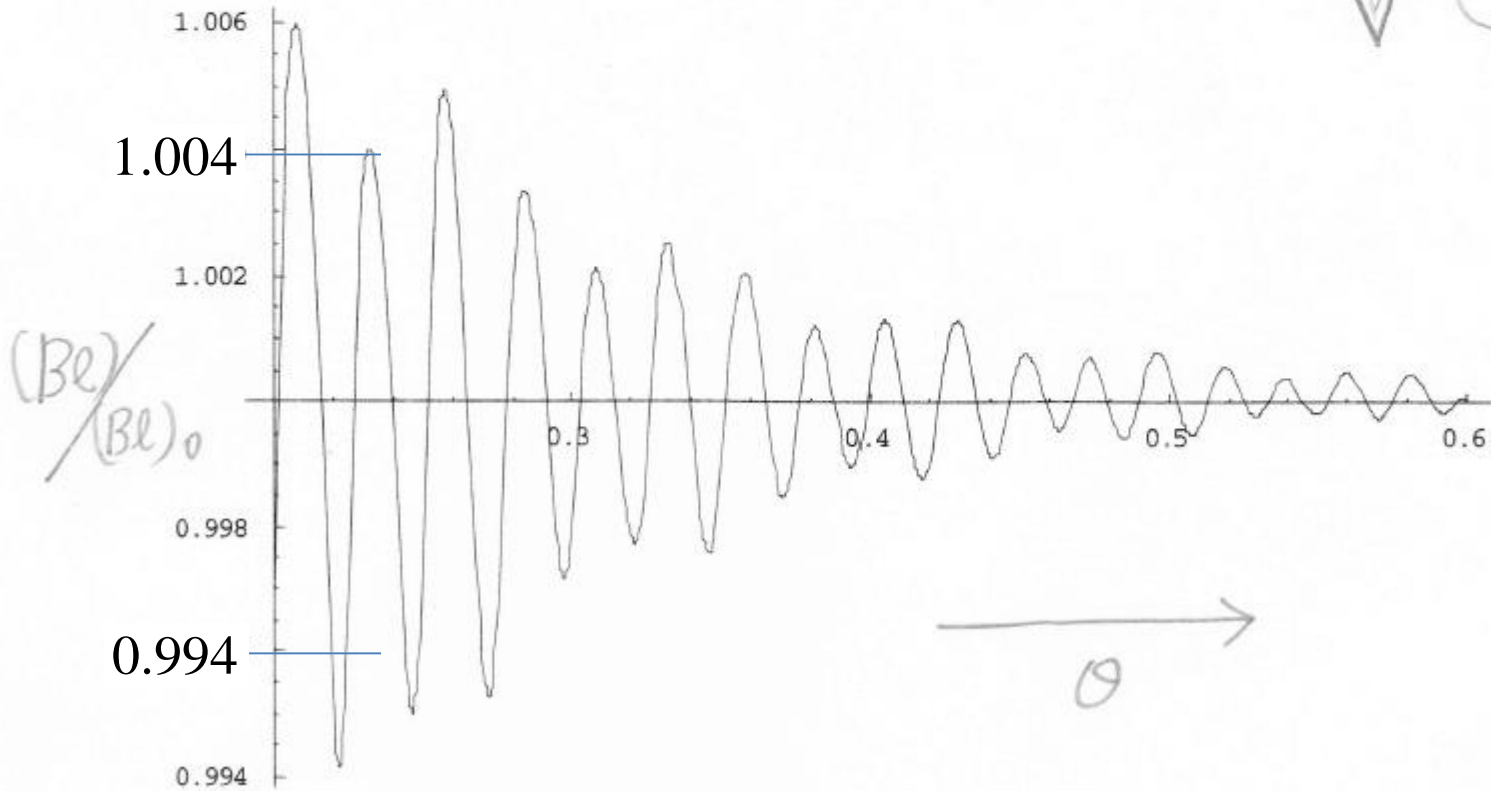
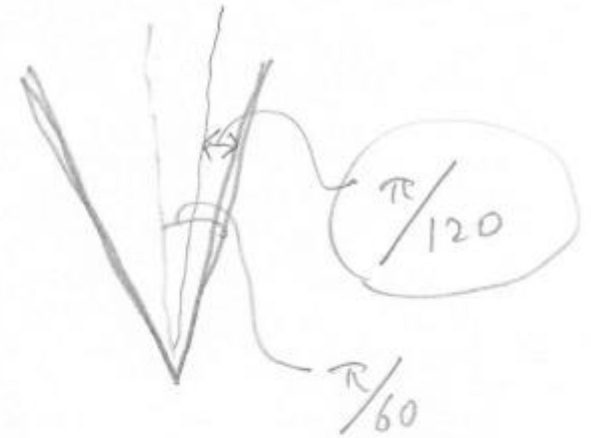
(二つのコイル列の中心線上)



uniformity of $B\ell$

(コイル列と中心線との中間線上)

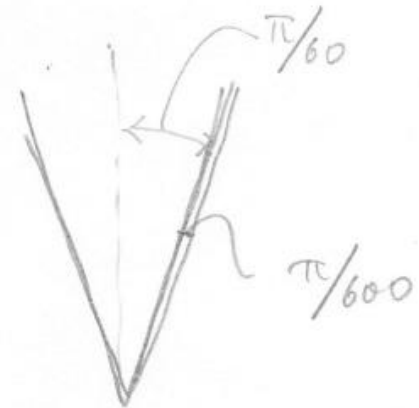
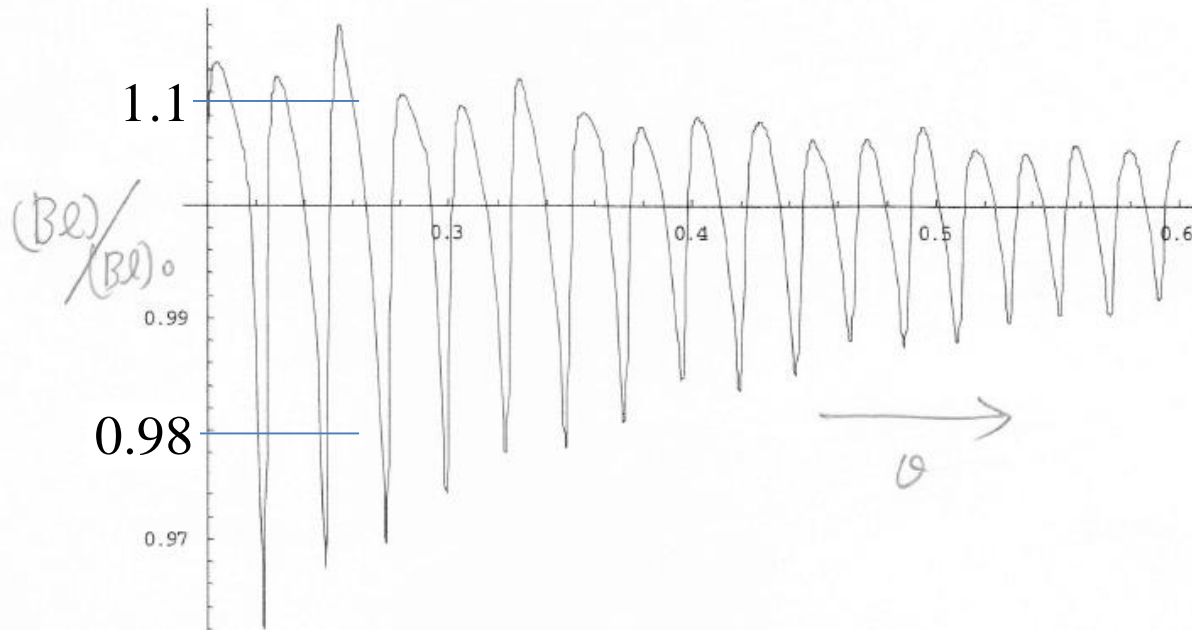
$$\psi = \pi/120$$



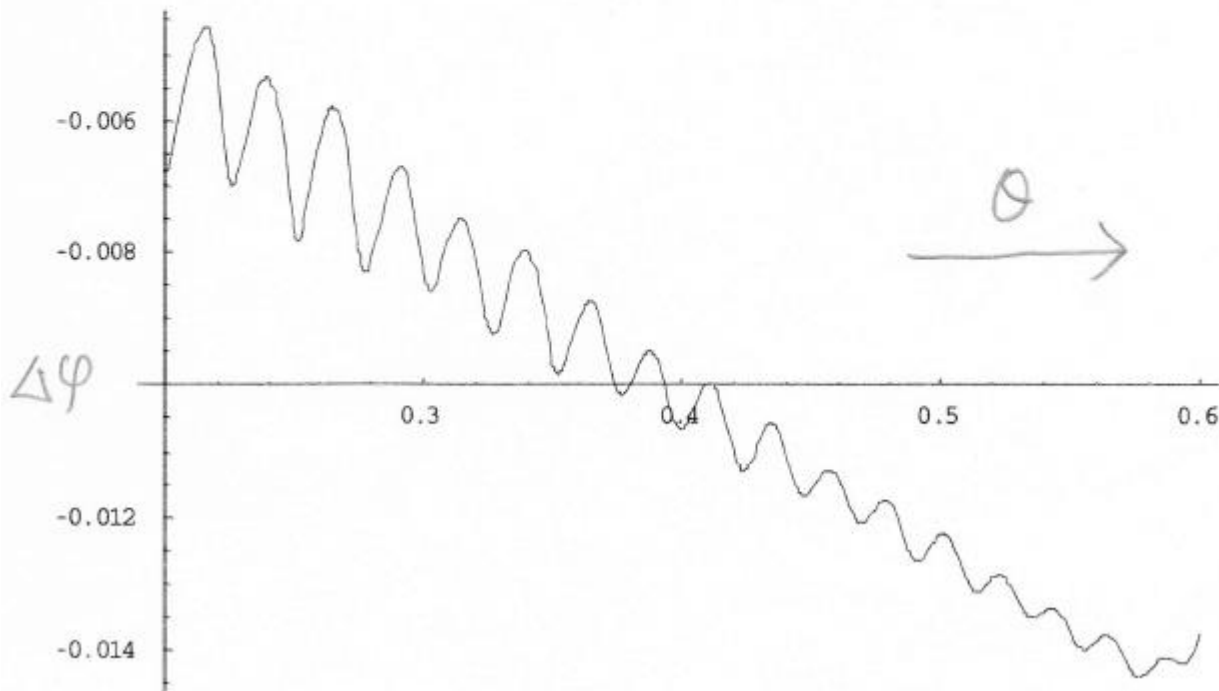
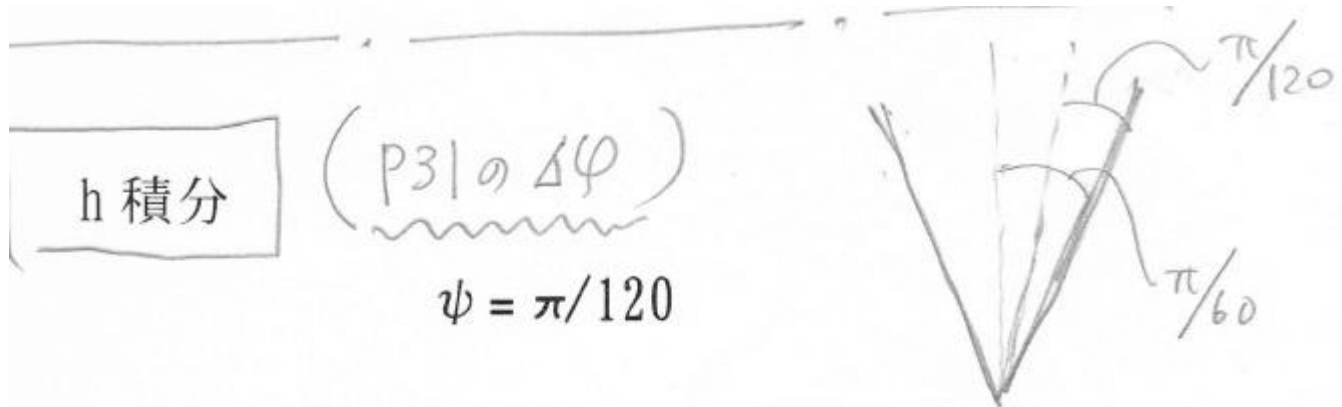
uniformity of $B\ell$

(ほとんどコイル列上)

$$\psi = \pi/600$$



円周方向の曲げ角(粒子はデザイン軌道の上に固定されていると仮定)
(コイル列と中心線との中間線上)

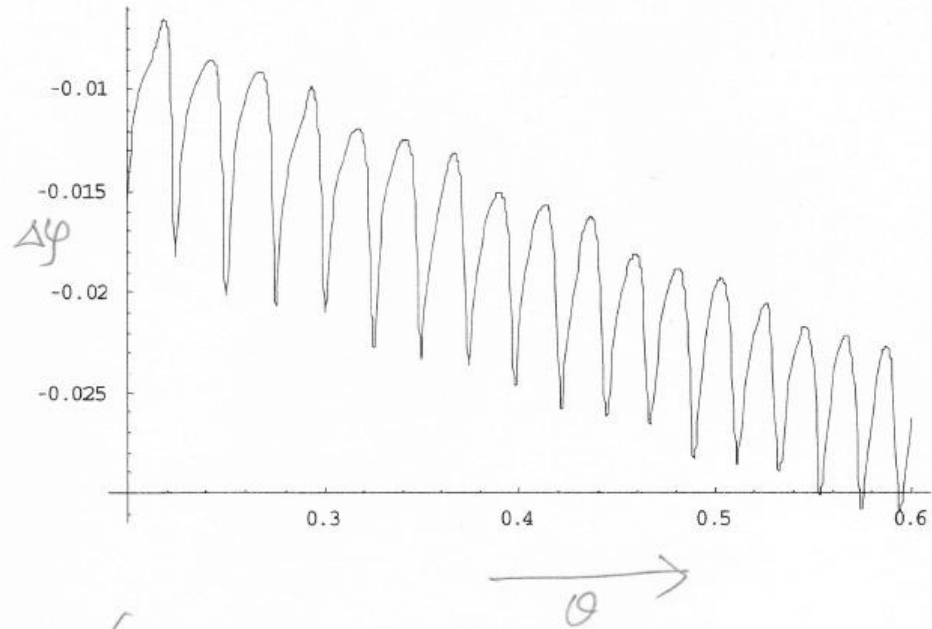
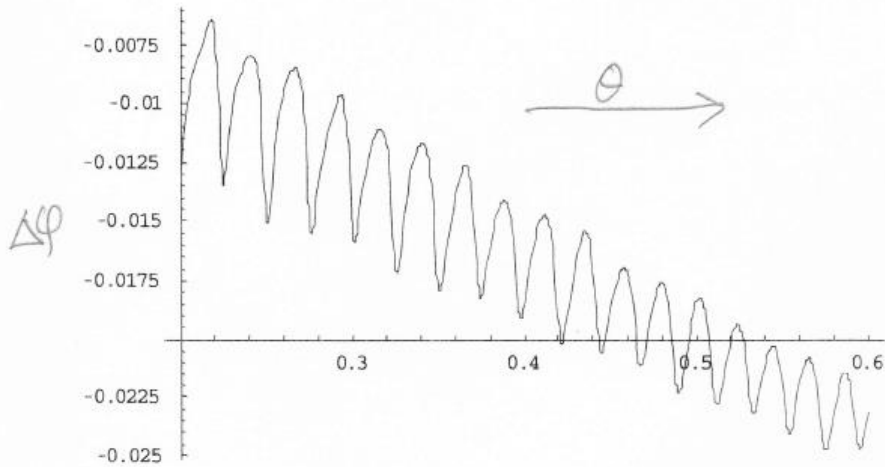


円周方向の曲げ角

$$\psi = \pi/300$$



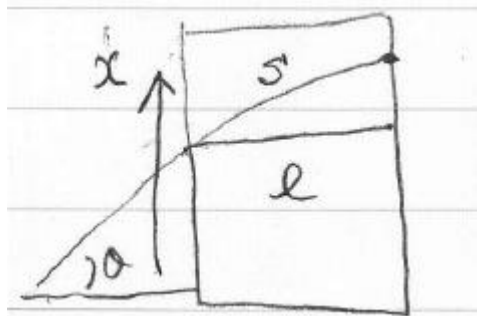
$$\psi = \pi/600$$



(ほとんどコイル列上)

Sagittaによるpath lengthの差

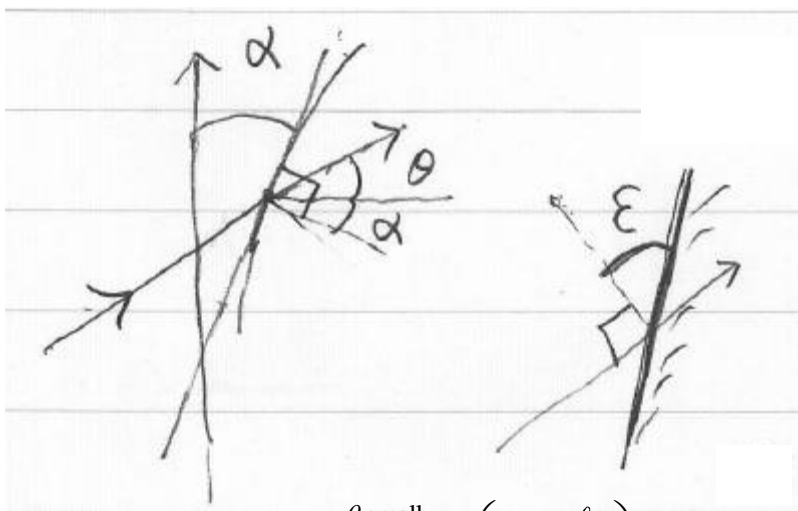
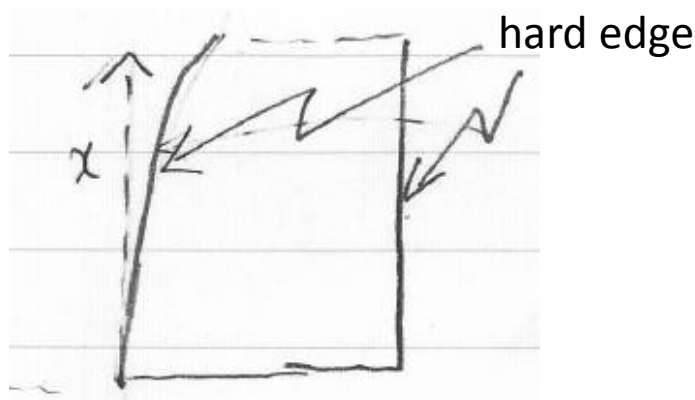
実際には、円筒体端部の形状を変えないで、層電流を変える方がベターであろう。



$$\Delta l = s - l = l \left(\frac{\theta}{\sin \theta} - 1 \right) \approx \frac{\theta^2}{3!} l$$

Path lengthの差を補正するための(仮想的な) hard edgeの形状

$$x = L \tan \theta \rightarrow dx = L(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$



$$\varepsilon = \theta + \alpha \xrightarrow{\theta \text{ small}} \theta \left(1 + \frac{l}{3L} \right)$$

$$\tan \alpha = \frac{d\Delta l}{dx} = \theta \left(\frac{l}{3L} \right) \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \xrightarrow{\theta \approx 0} \theta \left(\frac{l}{3L} \right)$$

< 数値例 >

For $\theta = 0.6$,

$$\ell \left(\frac{\theta}{\sin \theta} - 1 \right) = 0.31 \quad \frac{\theta^2}{3!} \ell = 0.30$$

$$\varepsilon = \theta + \alpha = 0.735 \quad \theta \left(1 + \frac{l}{3L} \right) = 0.8$$

しかし、実際にはhard edgeからは程遠い(?)

<数値例>

about 18 layers around $\theta = 0.6$

→ width of coil section: $\square 18 \times 2 \times 20^{mm} = \square 72 \text{ cm}$

かなりの厚さ!(crazy!?)

直円筒の端面、hard edge、coilの配置 around $\theta = 0.6 \text{ rad}$

At the outermost side of horn ($\theta = 45^\circ = 0.785 \text{ rad}$),

path length correction: $\square 55 \text{ cm}$

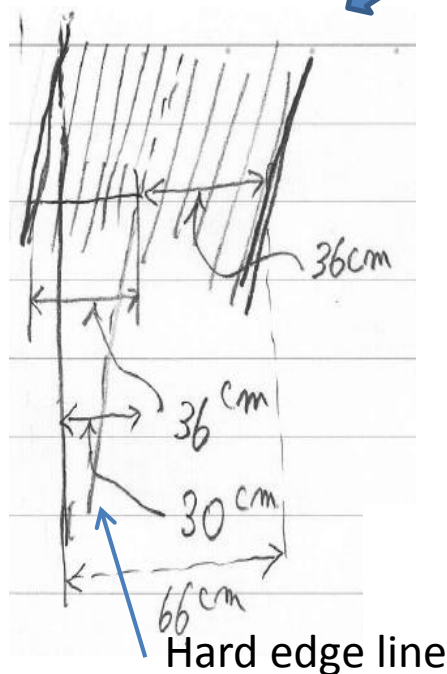
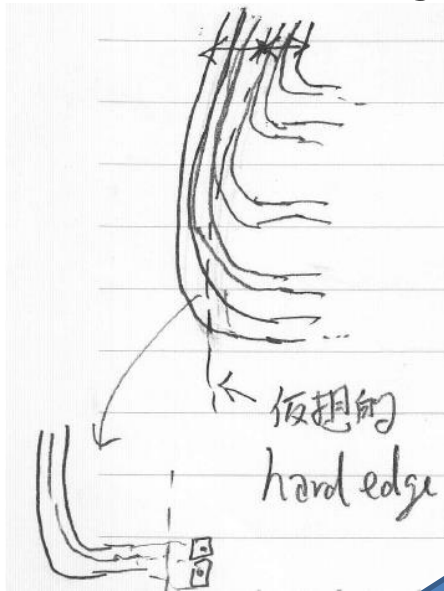
total width of coil section: $\square 96 \text{ cm}$

この「いやらしさ」を解消するためには、ホーンの外周付近では、コイルを積み上げないで、ばらして配置するののも一つの方策。

(円筒端面では、**一個のコイル内の粒子の飛程は大きくないので、OKだろう。**)

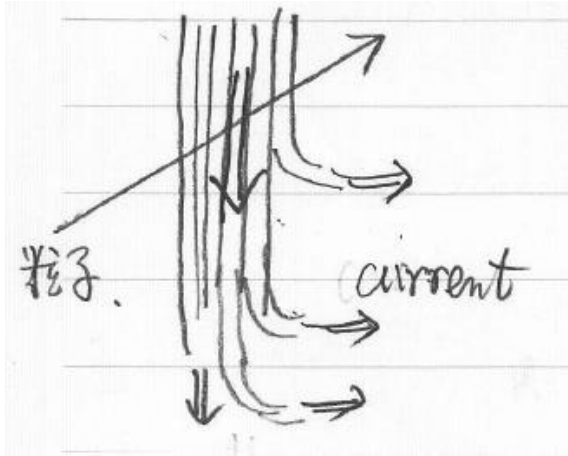
<しかし、こうすると、**edge focusingは期待できない?**>

(なお、**リターン・コイルは、円筒側面に一様に配置するのがベストであろう**)

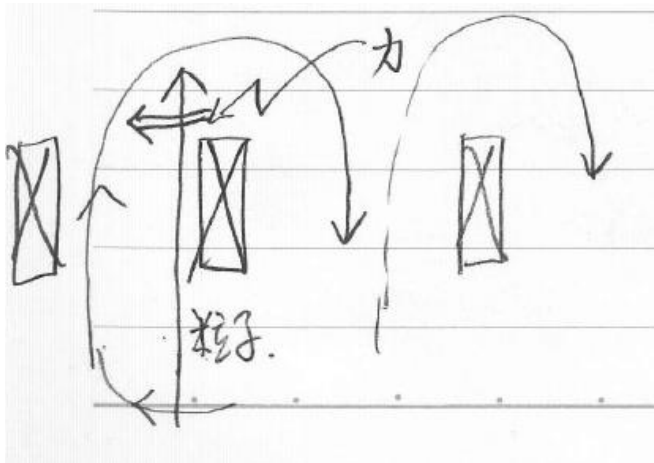


Edge focusing

左図から、粒子が円筒端面を横切るとき、コイルから斥力を受けることがわかる。



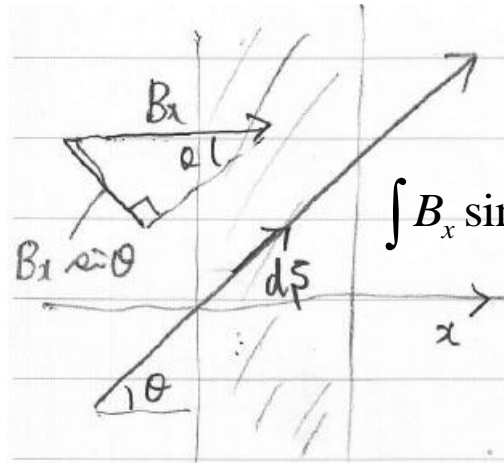
円筒体端面での粒子と電流の関係



上図を上から見たときのイメージ



コイル間の中心から見れば、引力 (focus力) になっている。



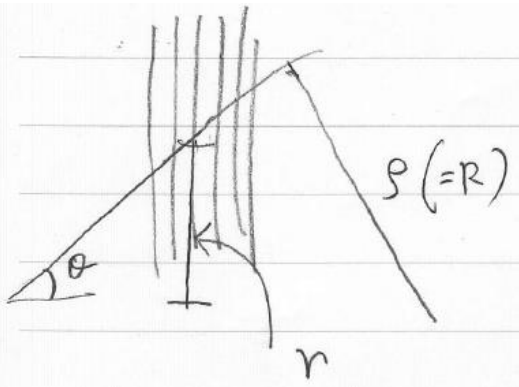
$$dx = ds \cos \theta$$

$$\int B_x \sin \theta ds = \int B_x \tan \theta dx \approx \tan \theta \int B_x dx$$

<粒子がコイル表面をかすめると仮定>

n: 粒子が横切るコイル数

$$\frac{\int B_x dx}{B_0} = \frac{\pi a}{M} n$$



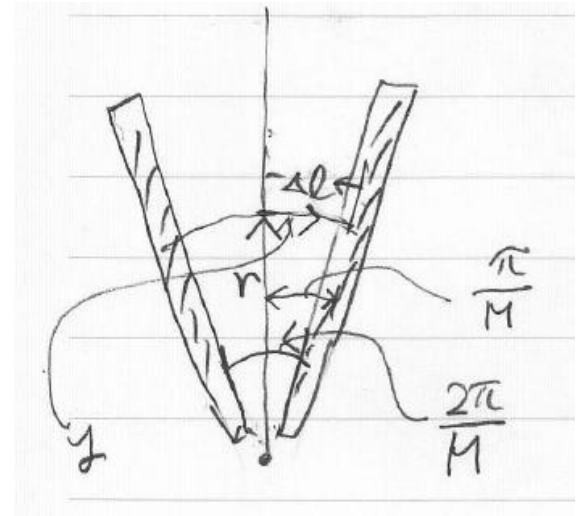
Edge focusingによる粒子の振れ角

$$\Delta\psi(\text{edge focusing}) = \tan\theta \cdot \frac{1}{B_0 R} B_0 \cdot \frac{\pi a}{M} n = \frac{\tan\theta}{R} \left(\frac{\pi}{M} na \right)$$

$$r \approx na \quad \longrightarrow \quad \Delta\psi = \frac{\tan\theta}{R} \left(\frac{\pi}{M} r \right)$$

$$\Delta\psi = \frac{\tan\theta}{R} \Delta\ell \quad \longleftarrow \quad \Delta\ell = \frac{\pi}{M} r$$

右図より



Edge focusingがコイル間の中心からの距離に比例していると仮定すると、

$$-\Delta\psi = -\frac{\tan\theta}{R} y \quad (R = \rho)$$

<参考>

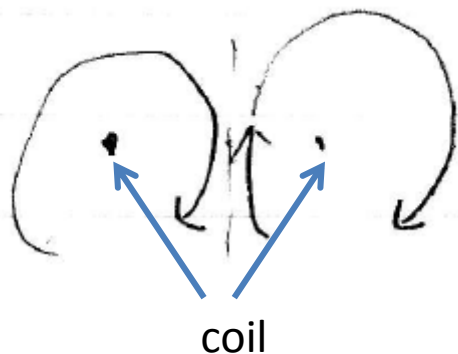
edge focusing of bending magnet

$$= -\frac{\tan\theta}{\rho} y$$

$$f \propto \log(z-a)(z+a) = \log\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) + const.$$

$$\rightarrow -\frac{z^2}{a^2} + const,$$

$$B_x - iB_y = \frac{df}{dz} \propto -\frac{2z}{a^2} \quad \longleftarrow \text{Quadrupole field}$$



“inside” currentのfocusing effect vs. edge effect

At $r = L \tan \theta$,

$$(\Delta\psi)_{\max} = \frac{\tan \theta}{R} \left(\frac{\pi}{M} \right) r = \frac{\sin \theta \tan \theta}{\ell} \left(\frac{\pi}{M} \right) r \approx \frac{\theta^2}{\ell} r \left(\frac{\pi}{M} \right) \approx \frac{\pi}{M} \theta^3 \left(\frac{L}{\ell} \right)$$

$$\left(\sum \Delta\varphi \right)_{\max} = \left(\frac{\pi}{M} \right) \frac{a}{\ell} \sum \frac{\theta_0}{\theta_i} \approx \frac{\pi}{M} \frac{a}{\ell} \cdot 2n \approx \frac{\pi}{M} \frac{2}{\ell} \ell \tan \theta \approx \frac{\pi \theta}{M}$$

Typical value

$$\longrightarrow \left(\sum \Delta\varphi \right)_{\max} [\text{typical value}] : (\Delta\psi)_{\max} = 1 : \theta^2$$

注： θ が比較的大きくても、edge effectは大きくないが、これはhornの入りで働くので、粒子が円筒体内のコイルから遠ざかることになる。

円周方向の粒子の運動

ここでは、きちんとした取り扱いではなく、初等的な議論を行い、かつ円周方向のみについて考える。

(加速器屋のセンスからすると、若干、稚拙な取り扱い?)

$$y' = \frac{dy}{ds}$$

$$dy' = d(\Delta\varphi) = h(r, y) \cos(\theta - \psi) d\psi$$

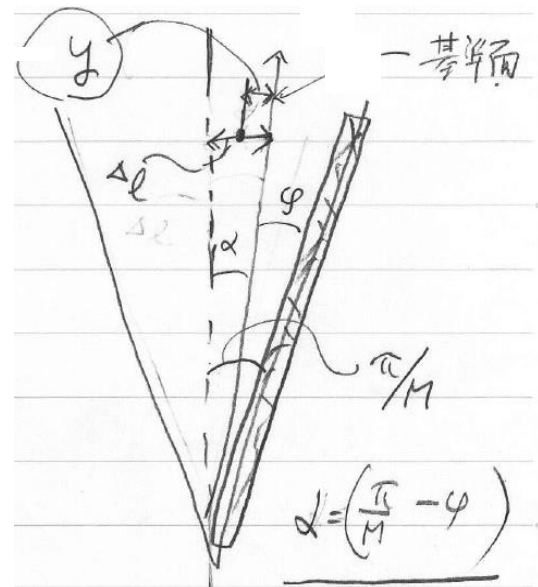
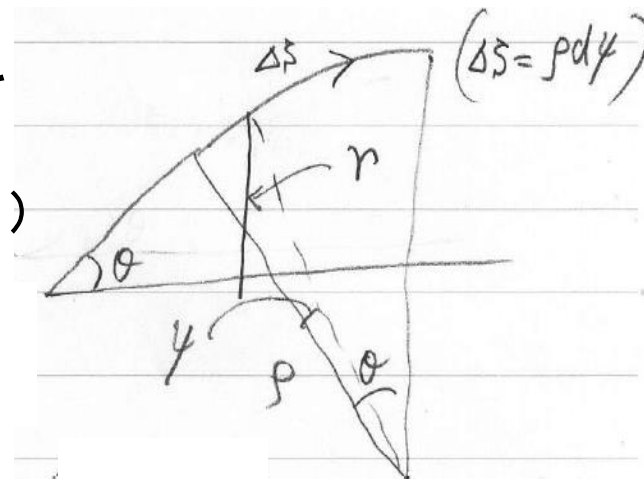
$$\frac{d}{d\psi} y' = h(r, y) \cos(\theta - \psi)$$

$$y' = \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\psi} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{d\psi} = \rho y' \quad \left(= \frac{l}{\sin \theta} y' \right)$$

初期条件 (edge effectを含める)

$$y'_0 = \frac{\tan \theta_c}{\rho} \Delta l \quad (\theta_c = \varepsilon = \theta + \alpha)$$

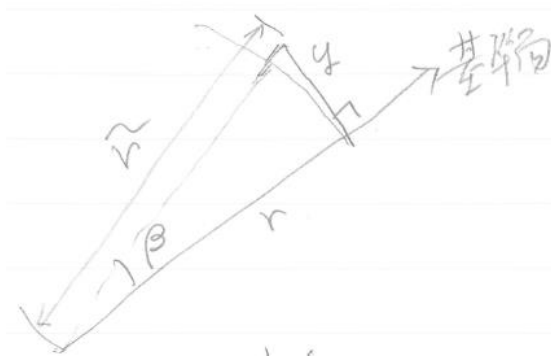
$$\Delta l = L \tan \theta \cdot \alpha \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{M} - \varphi \right)$$



$$y'_0 = \left(\frac{L}{\ell}\right) \sin \theta \tan \theta_c \cdot \left(\frac{\pi}{M} - \varphi\right) \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \approx \frac{y}{r}$$

$$\tilde{r} = r / \cos \beta \approx r$$

$$(B_r - iB_\theta) / B_0 = -ie^{i\varphi} \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{R_n}\right) \frac{(\tilde{z}/R_n)^{M-1}}{(\tilde{z}/R_n)^M - 1} \quad (\tilde{z} = \tilde{r}e^{i\tilde{\varphi}}, \tilde{\varphi} = \varphi + \beta)$$



円周方向の運動に伴い、粒子がコイルのぶつからないための条件

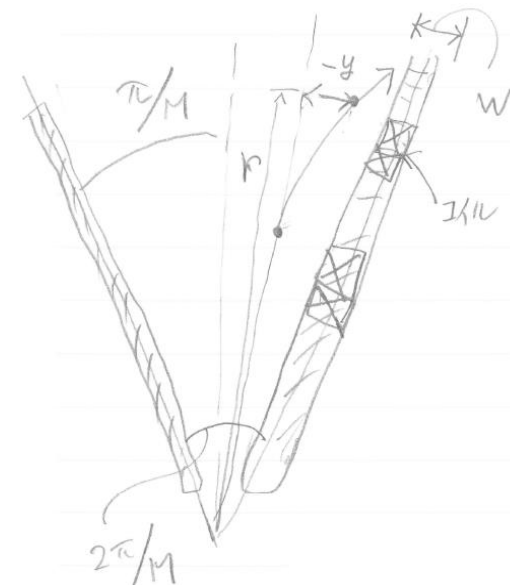
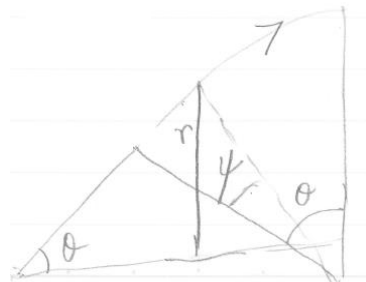
(コイル以外の場所も含め)右図の斜線部の領域に粒子が入ると粒子はなくなると仮定する

図の(右側の)斜線部領域に粒子が入らないための条件

$$r\varphi + y - w/2 > 0 \text{ for all } \psi$$

rとyはpsiの関数

この条件を使って、粒子の通過効率を求めることができる



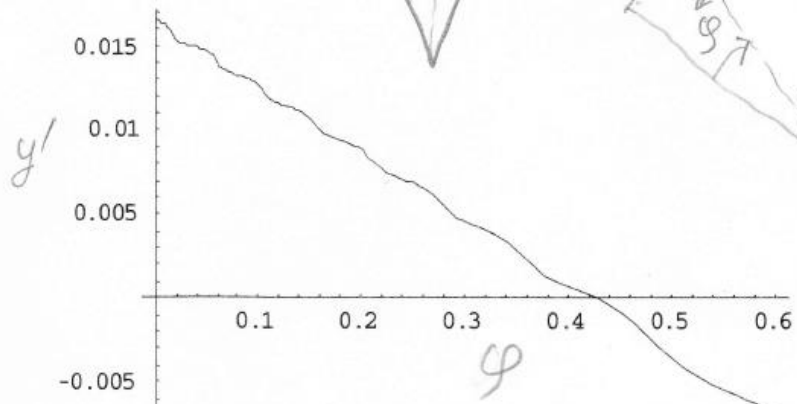
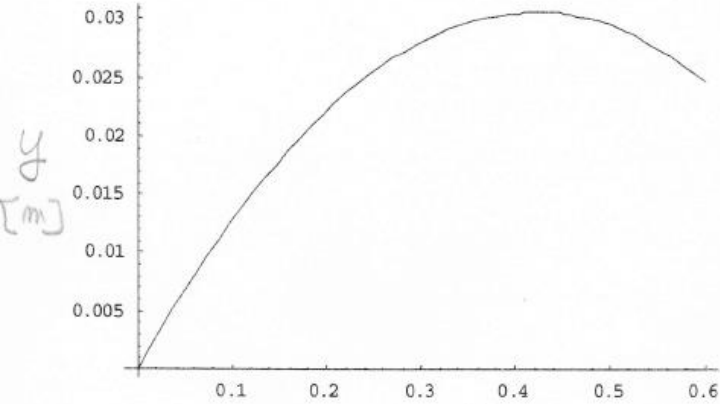
Example of particle tracking

(大角度入射 & ほとんどコイル列上)

$a=0.2^m, L=5^m, \ell=5^m, N=25, M=60$
 $a=0.2 \quad l_1=5. \quad l_s=5. \quad n=25 \quad m=60$

$\theta = 0.6 \quad \psi = \pi/600$

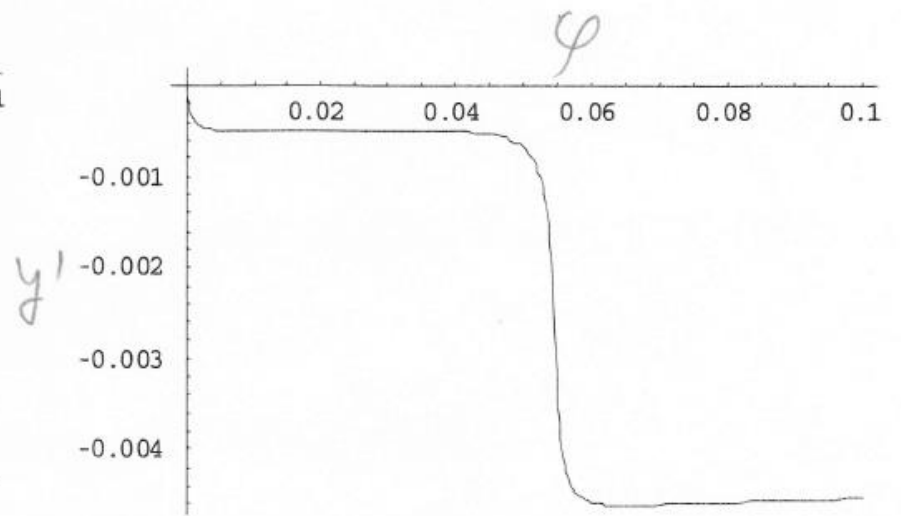
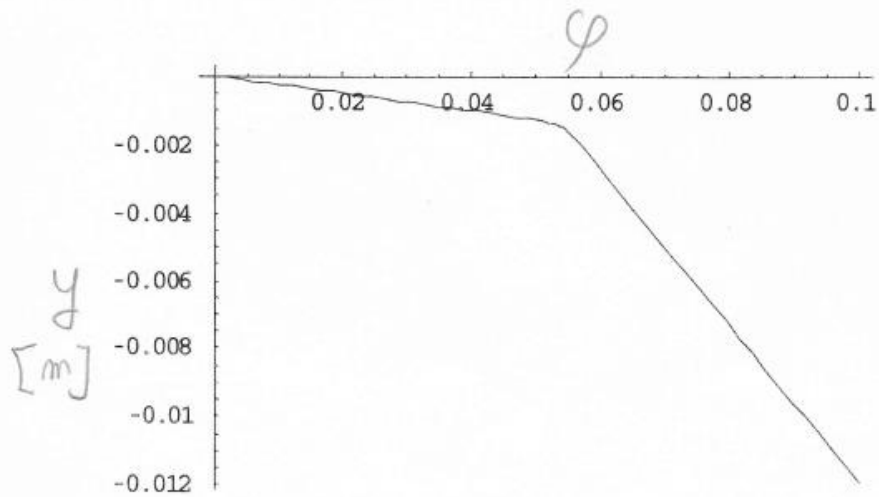
(括弧内 notation の混在あり)



(y'_0 が正であるのは, edge focusing によるもので, θ が大きいときのみ) に交わり有り.

Example of particle tracking (小角度入射 & ほとんどコイル列上)

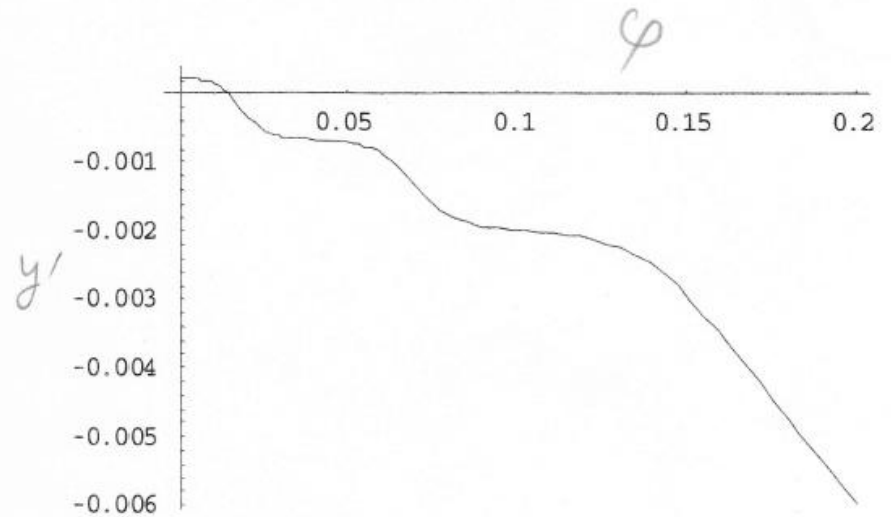
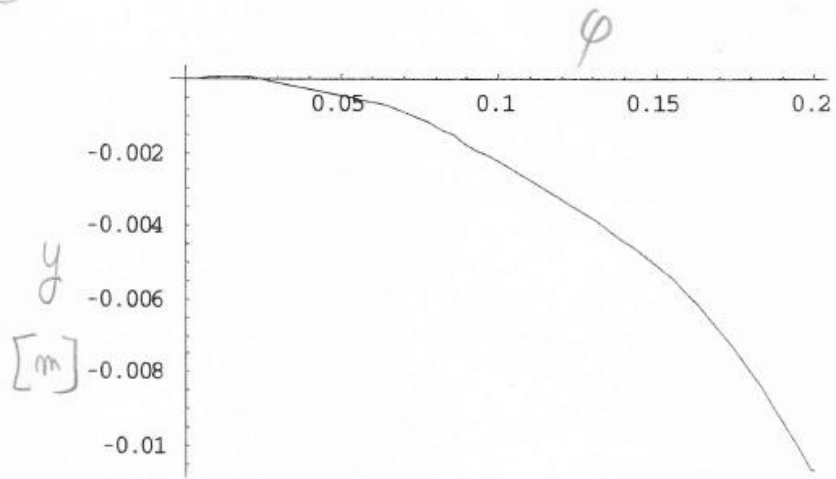
$$\theta = 0.1 \quad \psi = \pi/600$$



Example of particle tracking

(「中」角度入射 & 二つのコイル列の「適当な」場所)

$\theta = 0.2$ $\psi = \pi/100$

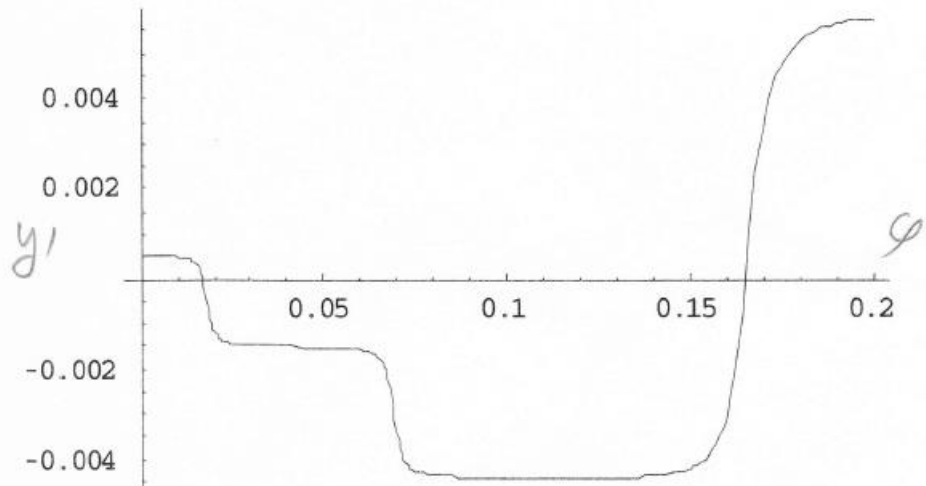
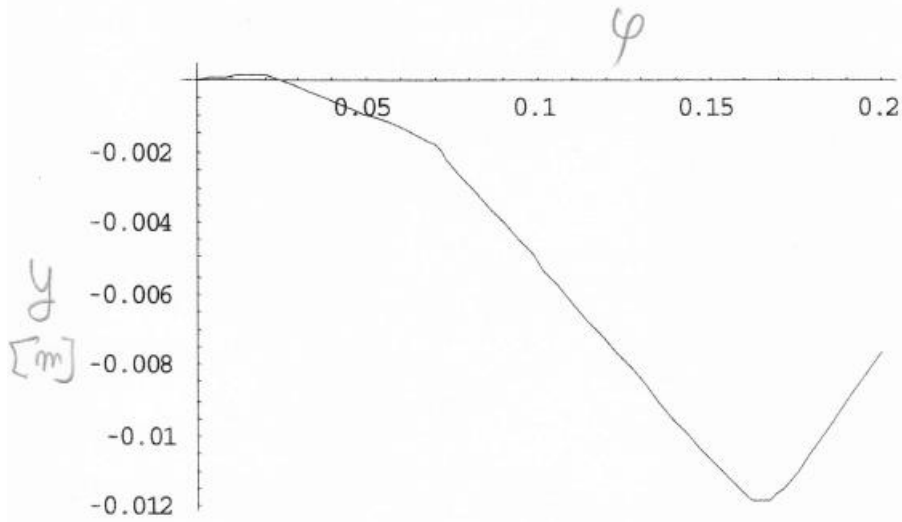


Example of particle tracking

(「中」角度入射 & &ほとんどコイル列上)

$$\theta = 0.2$$

$$\psi = \pi/600$$



ホーンの通過効率

Physical aperture: 幾何学的形状で決まるアパーチャ

Dynamic aperture: 粒子の軌道で決まるアパーチャ

$$a = 0.2m, M = 60, N = 25$$

入射角 Θ [rad] (P[GeV/c])	Dynamic aperture (w=20 mm)	Physical aperture (w=20 mm)	Physical aperture (w=40 mm)
0.1 (3)	50%	61.93%	23.86%
0.2 (1.5)	62.5%	81.16%	62.31%
0.3 (1.0)	70%	87.65%	75.30%
0.4 (0.75)	80%	90.97%	81.93%
0.5 (0.6)	> 90%	93.01%	86.02%

$$a = 0.1m, M = 120, N = 50$$

入射角 Θ [rad]	Dynamic aperture (w=20 mm)
0.1	> 20%
0.2	~ 57%
0.3	~ 67%

粒子の角度の統計的拡がり、Ichikawa's formulaの補正項、初期の位置のずれ

Simplified Ichikawa's formulaに従う軌道をdesign orbitとする。

角度拡がり $\delta\theta$ のエネルギー依存性

[小林隆氏の提供データ (proton energy=5GeV)]

➡ 大きさの目安として(勝手に)

$$\delta\theta = \pm \frac{c_1}{p} \quad (c_1 = 0.1) \quad \delta\theta(p = 0.5 \text{ GeV}/c) = \pm 0.2$$

Ichikawa's formula $\theta = c + \frac{0.3}{p}$ ($c = 0.03$)

角度拡がりの初期値、 $\Delta\theta$

$$\Delta\theta = c + \delta\theta$$

位置のずれの初期値 x_0

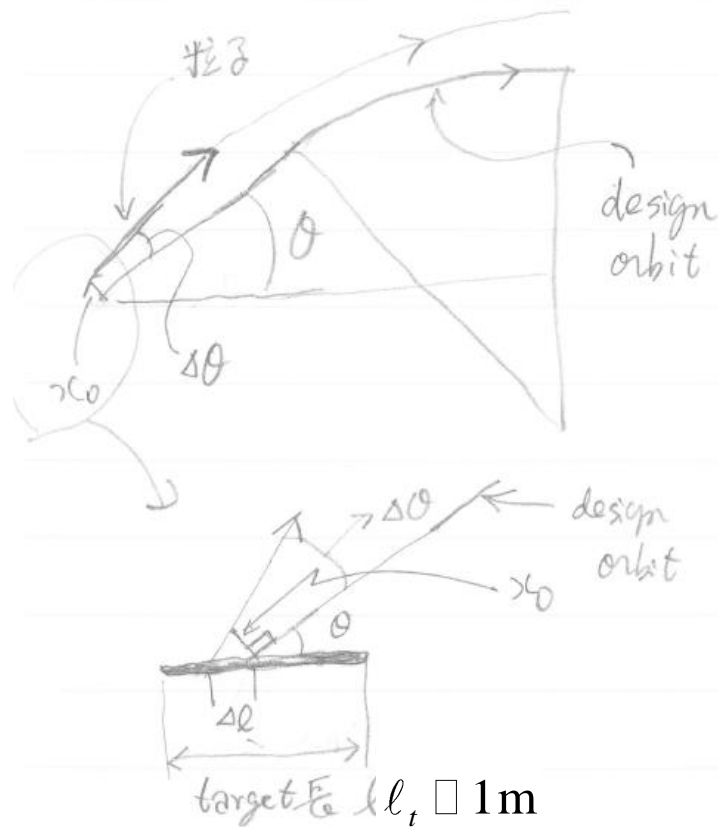
$$x_0 = \pm \frac{l_t}{2} \sin \theta \quad (\square \pm 0.3 \text{ m for } \theta = 0.6)$$

大雑把には、ホーンの出口までdrift spaceと考えることができる。

➡ 角度拡がりほぼ一定

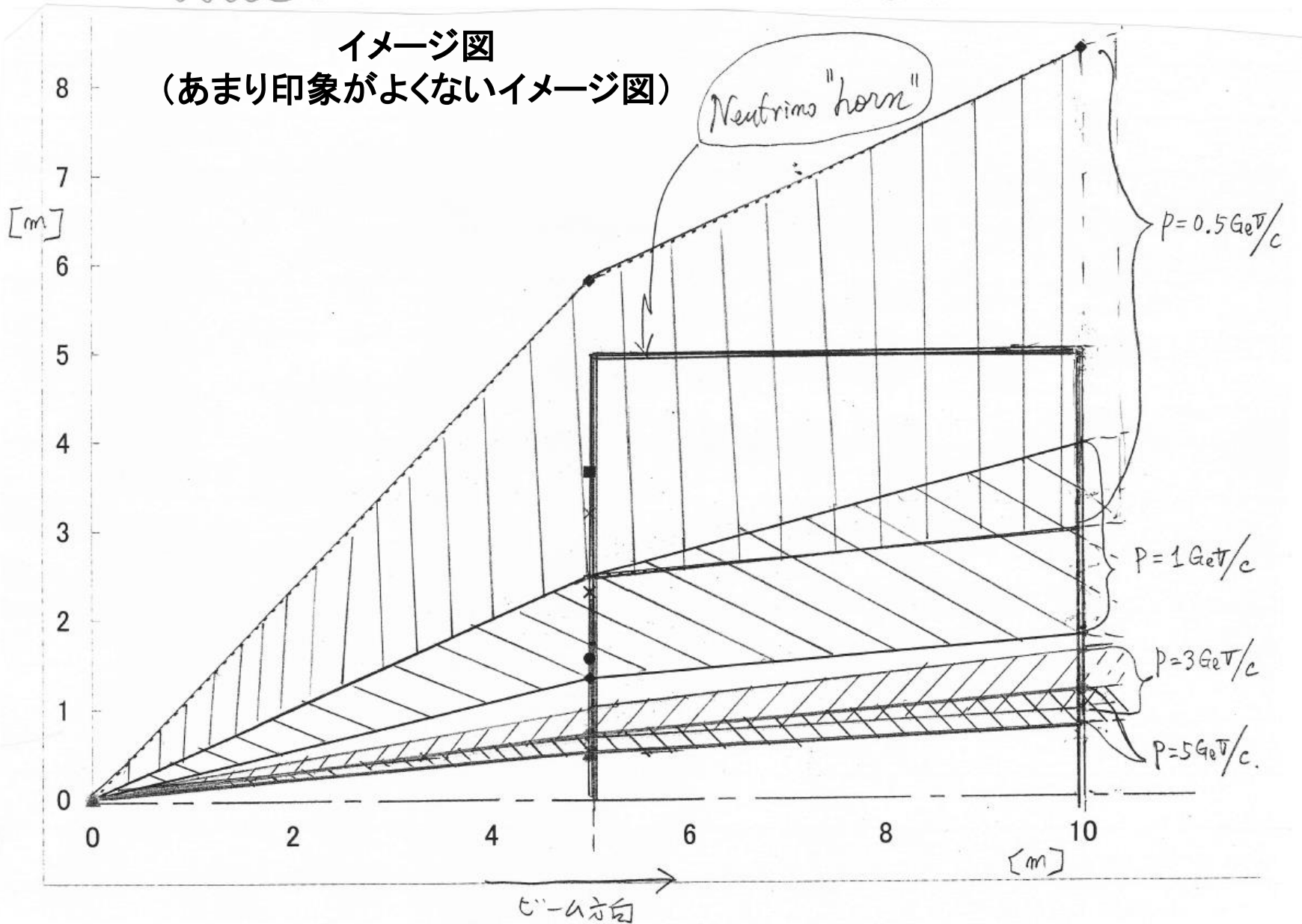
ホーンの出口では、角度拡がりによる位置のずれの方がその初期値より大きい

➡ 大雑把には、初期値、 x_0 は無視できる

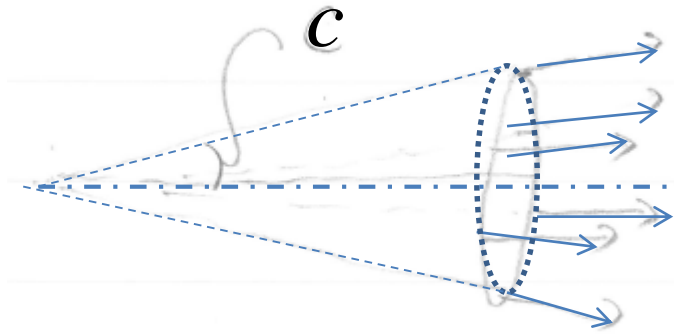


角度拡がりをもつ粒子が空間を占める様子 (イメージ図)

イメージ図
(あまり印象がよくないイメージ図)



Simplified Ichikawa formulaへの補正項について



Ichikawa formula

$$\theta = c + 0.3/p \quad (c = 0.03) \quad c: \text{補正項}$$

After the neutrino horn, **all particles** (satisfying the Ichikawa formula) have the **same angle, independent of their energy.**

角度、 c がたまたまoff-axis methodの”magic angle”に等しいか、または近いならば、この角度を補正しないことにすると、実際は、**on-axisでoff-axisの実験**が可能。

または、角度、 c を調整することができれば、**on-axisのまま、様々な角度のoff-axisの実験**が可能となるだろう。

$$p\theta = 0.3 \left(1 + \frac{c}{\theta - c} \right) \quad p\theta = 0.3 \left(1 + \frac{c}{\theta} + \frac{c^2}{\theta^2} + \dots \right) \quad B\ell = 1 + \frac{c}{\theta} + \frac{c^2}{\theta^2} + \dots \approx 1 + \frac{c}{\theta} [\text{T} \cdot \text{m}]$$

この補正項を補正する「収束系」として、

Case A: 円筒体と収束系を組み合わせる場合 (combined function)

Case B: 円筒体と収束系を別にする場合 (separated function)

Case A

BI積の補正量

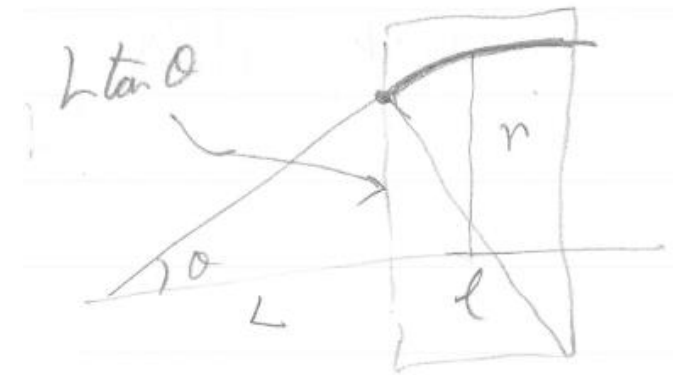
p[GeV/c]	5	4	3	2	1	0.75	0.5
θ	0.09	0.105	0.130	0.180	0.330	0.430	0.630
ΔBI [T m]	0.333	0.286	0.231	0.167	0.091	0.070	0.048

円筒体の“中心”に、これまでのデザインでの一層分の電流の0.75倍の電流を追加

0.75/n	0.333	0.285	0.229	0.165	0.088	0.065	0.041
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

実際に粒子が感じるBI積は、軌道上の平均である。また、combined型であるので、軌道は円軌道ではないが、単純に右図のrの平均値での磁場を粒子が感じると近似する。

$$n = L \tan \theta / a$$



$$\bar{r} / L \tan \theta = 1 + \frac{\ell}{L} \frac{(\sin \theta / \theta - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \approx 1 + \frac{\ell}{3L} + O(\theta^2)$$

$$\ell = L \quad \Rightarrow \quad \bar{r} / L \tan \theta \approx 4/3$$

円筒体の中心付近に一層を余分に追加すれば、cを(ほぼ)補正することができる。

Case B 大雑把には、 $\Delta B l \approx c / \theta \propto 1/r$

$$\Delta B l (\theta = 0.1) = \frac{0.03}{0.1} = 0.3$$

若干、お疲れ気味の
のスケージングで

コイル半径

5m -> 2.5m

Required current: $0.3 \cdot \frac{0.75^m}{0.2^m} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 0.5625$ 倍

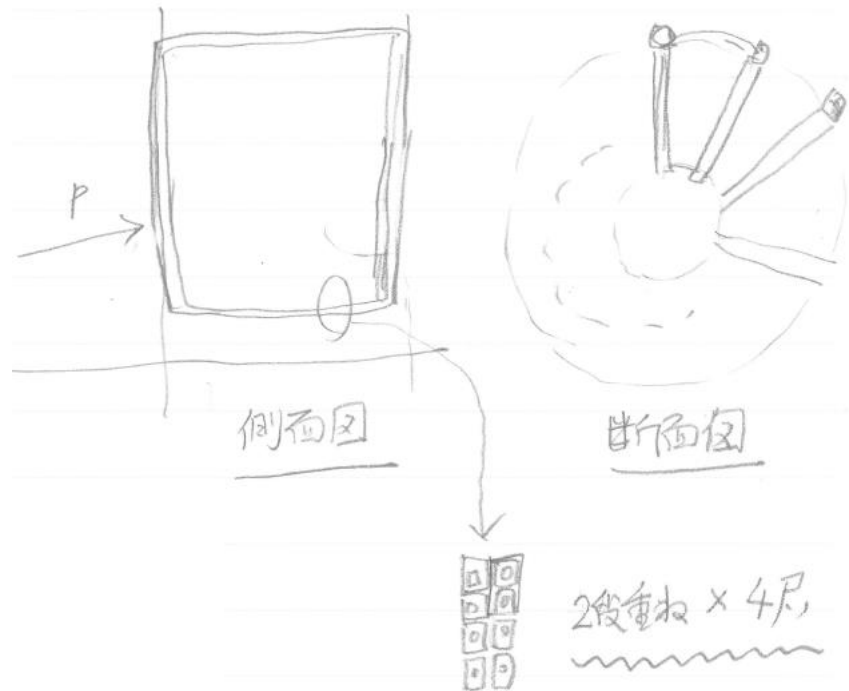
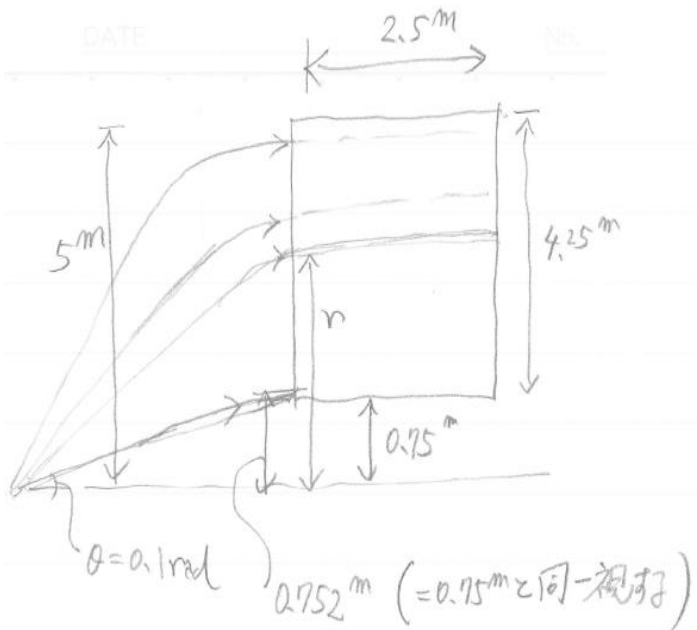
a

4 layers

$\rightarrow I = 937.5 \text{ A}$

$I_{total} = 4.50 \times 10^5 \text{ A}$

$B = 0.12 \text{ T}, B l = 0.3 \text{ T} \cdot \text{m}$



length of coil per turn: $4,25 \times 2 + 2.5 \times 2 = 13.5^m$

total length of coil: $13.5^m \times 4 \times 2 \times 60 = 6.48 \text{ km}$

$$R(\text{Al @ } 20^\circ\text{C}) = \frac{2.65 \times 10^{-8} \times 6.48 \times 10^3}{300 \times 10^{-6}} = 0.572 \Omega$$

単一電源とした場合の電圧 $V = 536.6 \text{ V}$

power loss: $P = VI = 503 \text{ kW}$

$$\text{stored energy: } \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{1}{2} LI^2 \quad B = B_0 \frac{r_0}{r}$$

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B_0^2 r_0^2 \frac{2\pi r}{r^2} dr \cdot \ell = \frac{\pi}{\mu_0} B_0^2 r_0^2 \ell \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = 9.604 \text{ J}$$

$$L = \frac{2 \times 9.604}{I^2} = 0.2186 \text{ H} \quad L/R = 0.38 \text{ sec}$$

Backup

懐古的小話を二つ

- 個人的には深刻であった話と一つの小話
- 加速器屋にとって重要な一つのformulaについて

閑話休題 A bit of Mathematical Flavor

一老人の「素人的、説教的」無駄話

青春の貴重な時間(?)を無駄に費やしたテーマ

- 4次元以上の空間の (visualな) 描像 $\Rightarrow \times$
- 量子力学の直感的、感覚的認識 $\Rightarrow \times$
- なぜ、 $-1 \times -1 = 1$ なのか? $\Rightarrow \bigcirc$ (It's a rule, and **very natural** rule.)

Individual & continuum [人間の認識力、感性の限界]

Natural number (自然数): 1, 2, 3 ... [神が賦与したもの]

Integer (整数), Rational (有理数): 人間のtools : 社会生活に (or 研究でも?)
必要十分 \rightarrow mathematical objects

Continuum (連続体) とは?

数値化 (番号付け) \Rightarrow Real(s) (実数) (Dedekindの認識 by 切断の概念)

人間は、本当に実数を理解しているか?

圧倒的な没個性的な連続体の海 (闇) の中で...

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 等の代数的数 (algebraic number)

π , e 等の「超重要な」超越数 (transcendental number)

ボケ防止のために...

$\pi = 3.14159265358979323846264338328\dots$ ある俳優は50桁、世界一は10万桁

$e = 2.71828182845904523536028747135\dots$ 蛇足: $c := 2.99792458 \times 10^8$ [m/s]

実数を理解したつもりになると、複素数の理解はsimple! ? $z = x + yi$
The world of complex number is (probably) one of the most beautiful and elegant world.

One of the most important consequences is,
どんな代数方程式(多項式=0)も複素数の範囲で解くことができる。 [Gauss]
($x^2 = -1$ の解である i を追加しただけなのに・・・)

正則関数(holomorphic function)とは、「拡張された」多項式(べき級数)である(で書ける。)(より正確には、これをつないだものである。)

- z を実数部と虚数部に分けずに考えると、 z^n は、明らかに微分可能
- よって、 z の多項式も微分可能
- 収束する(一様収束する)べき級数も微分可能
- Cauchyの積分公式 \rightarrow 正則関数は、Taylor展開可能(べき級で書ける)
(Laurent seriesはどこに行ったの?)

ここで基本的(決定的)に重要なのは、次の最も基本的な(初等的な)関係式である。

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

[復習]

Cauchyの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt$$

Cauchy-Riemann relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

個人的な趣味的考察

Consider,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x+\dots+x^{n-1}} = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^n} & (x \neq 1) \\ \frac{1}{n} & (x=1) \end{cases} \quad \text{For } x \geq 0,$$

Uniformly convergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1-x & (x < 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

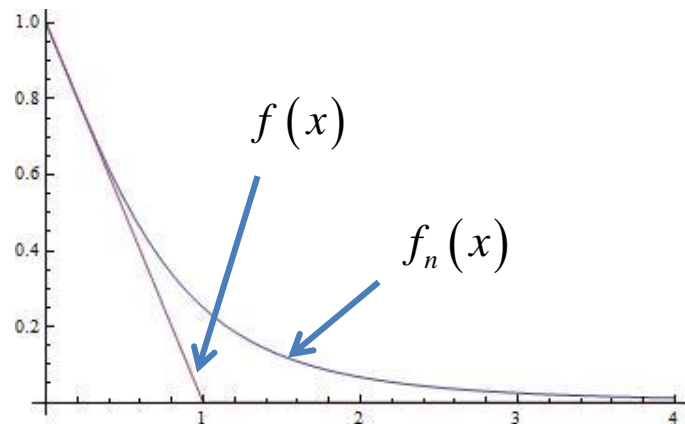
$x \rightarrow z$

$f_n(z)$: holomorphic (except isolated poles) for every n .

Namely, meromorphic (有理型)

But, $f(z)$ is not a holomorphic nor meromorphic function.

($1-z, 0$ are holomorphic functions.)



このような変な現象が起こるのは、 n が大きくなるに従って、単位円上の特異点が周密になってくるためである。

$n \neq \infty$ である限りは、全複素平面で一つの meromorphic function で表されるが、 $n = \infty$ になると、単位円の内と外が分離される。

Cooling water requirement

(A) よく使われる単位: water flow: G_w [ℓ/min] power loss: P [kW]

$$G_w [\ell/\text{min}] \approx P [\text{kW}] \quad \text{for } \Delta t = 15^\circ\text{C}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1\ell = 10^3 \text{ cm}^3, 1\text{ min} = 60 \text{ sec}, 1\text{ cal} = 4.18 \text{ joule} \approx 4 \text{ joule} \\ 1\ell/\text{min} \rightarrow \frac{10^3}{60} \cdot 15 \cdot 4 = 10^3 [\text{joule/s}] = 1\text{kW} \end{array} \right)$$

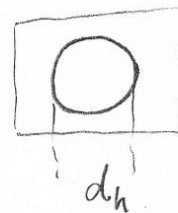
“Academic” formula: $G_w [\ell/\text{s}] = \frac{P [\text{kW}]}{4.2 \Delta t [^\circ\text{C}]}$

(B) $\Delta P [\text{kgf}/\text{cm}^2] ([\square \text{ atm}]) = 0.28 L_c [\text{m}] (V [\text{m}/\text{s}])^{1.75} / (d_h [\text{mm}])^{1.25}$

L_c : length of conductor

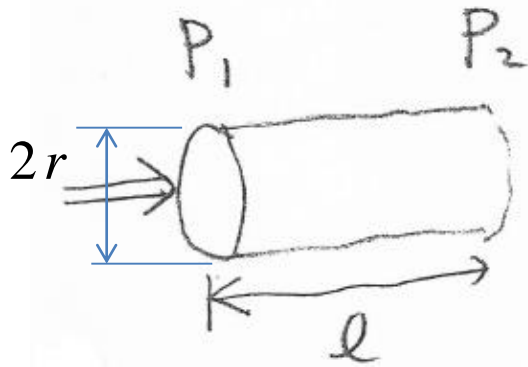
d_h : hydraulic diameter

($d_h = 4 A_F / \text{perimeter}$, A_F : flow area)



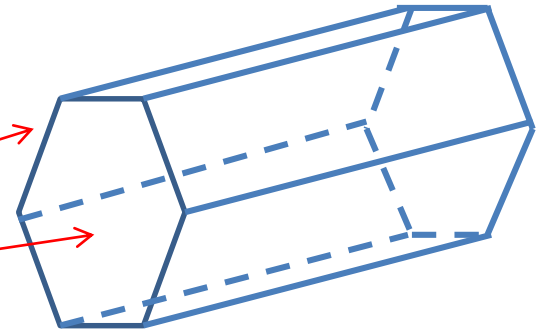
断面が円の場合

$$A_F = \pi a^2, \text{ perimeter} = 2\pi a \quad (a : \text{radius}) \quad \longrightarrow \quad d_h = 2a$$



$$2\pi r \tau L = \pi r^2 (P_1 - P_2)$$

$$\text{perimeter} \cdot \tau L = A_F (P_1 - P_2)$$



$$\tau = \frac{1}{2} \psi \rho u_m^2$$

$$\psi = \begin{cases} 8R_e^{-1} & (R_e < 1.2 \times 10^3) \\ 0.0665 R_e^{-1/4} & (2 \times 10^3 < R_e < 5 \times 10^4) \end{cases}$$

u_m : 平均速度

ψ : 管の抵抗係数

$R_e = u_m a / \nu$ (ν : 動粘性係数)

$$\Delta P / L = 0.0665 \rho \nu^{1/4} a^{-5/4} u_m^{7/4}$$

$$\Delta P [\text{atm}] \approx \Delta P [\text{kgf/cm}^2] \approx \frac{0.0665 (\rho \nu^{1/4})}{\square 1000 \times 10^3} \frac{2^{5/4}}{(0.1)^{5/4}} \frac{(100)^{7/4} (u_m [\text{m/s}])^{7/4}}{(d [\text{mm}])^{5/4}} 100 L_c [\text{m}]$$

$$\nu (@ 20^\circ\text{C}) = 1.0038 [\text{cSt}] \approx 1 \times 10^{-2} [\text{cm}^2/\text{s}] \quad \rho \approx 1 \text{g/cm}^3$$

$$\Delta P [\text{kgf/cm}^2] \approx 0.28 L_c [\text{m}] (u_m [\text{m/s}])^{7/4} / (d [\text{mm}])^{5/4}$$

$$G_w [\ell/\text{s}] \approx 1.63 \times 10^{-3} (d_h [\text{mm}])^{19/7} (\Delta P_w / L_c)^{4/7}$$

以上、

研究支援戦略推進部の

神谷が提供しました。

Caution: 研究支援戦略推進部がニュートリノ直流ホーンを作って、研究を支援することは、**絶対**にあり得ません！