

FEL, EEHG and their variations for ERL

K. Ohmi

March, 2, 2012

ERL利用研究準備会

Introduction

- 進行方向ビーム集団不安定性によるエネルギーロス



- 電磁場側から見れば、コヒーレント放射



- **FEL**

電子の運動

- 運動方程式、H gauge: $\phi = 0$

$$H = (1 + \delta) - \sqrt{(1 + \delta)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{a}}{\gamma}\right)^2} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{a_z}{\gamma}$$

$$\mathbf{a} = \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = \frac{c}{E_0} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \quad \delta = \frac{E - E_0}{E_0}$$

$z = s - ct$ 後で変更するがとりあえずこの定義

- 電磁場

- アンジュレータ磁場 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_L$

$$a_{u,x} = a_u \cos k_u s \quad \frac{cB_{u,y}}{E_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial a_{u,x}}{\partial s} = -\frac{a_u k_u}{\gamma} \sin k_u s$$

$$\frac{a_u}{\gamma} = \theta_u : \text{ビーム軌道の最大スロープ}$$

電磁場

- Maxwell方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{a} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) = -\frac{e\mu_0}{mc} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{e}{mc} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- レーザー場

$$a_{L,x} = \hat{a}_L \cos(k_L s - \omega t + \phi) = \hat{a}_L \cos(k_L z + \phi)$$

- ビームにより変化するレーザー場

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{a} = -\frac{e\mu_0}{mc} \mathbf{j}$$

- 強度が s に対して変化していく。

$$a_{L,x}(s) = \hat{a}_L(s) \cos(k_L s - \omega t + \phi) = \hat{a}_L(s) \cos(k_L z + \phi)$$

1次元モデル

$$\begin{aligned} H &= (1 + \delta) - \sqrt{(1 + \delta)^2 - \frac{(\mathbf{a}_u + \mathbf{a}_L)^2}{\gamma^2}} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{a_z}{\gamma} \\ &= (1 + \delta) - \sqrt{(1 + \delta)^2 - \frac{1 + a_u^2}{\gamma^2} - \frac{2\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2}} \\ &= -\frac{1}{2\gamma_z^2} \delta + \frac{1}{2\gamma_z^2} \delta^2 + \frac{\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2} + \frac{a_z}{\gamma} \quad \frac{1}{\gamma_z^2} \equiv \frac{1 + a_u^2}{\gamma^2} \end{aligned}$$

- ビーム-レーザー相互作用

$$\frac{\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2} = \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} [\cos(k_u s + k_L z + \phi) + \cos(k_u s - k_L z - \phi)]$$

1次元運動方程式

$$z(s + ds) - z(s) = \frac{\partial H}{\partial \delta} ds = -\frac{ds}{2\gamma_z^2} + \frac{ds}{\gamma_z^2} \delta$$

$$\begin{aligned} \delta(s + ds) - \delta(s) &= -\frac{\partial H}{\partial z} ds \\ &= \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} k_L ds [\sin(k_u s + k_L z + \phi) - \sin(k_u s - k_L z - \phi)] \end{aligned}$$

- ビーム粒子はs進むごとに $s/2\gamma_z^2$ 遅れる(zが減少)。
 $-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial a_z}{\partial z}$
- a_z の項は空間電荷、当面無視。

Slippage修正

- 正準変換(変数変換)

$$F_2(z, \bar{\delta}) = \left(z + \frac{k_u}{k_L} s \right) \bar{\delta}$$

$$\delta = \frac{\partial F_2(z, \bar{\delta})}{\partial z} = \bar{\delta} \quad \bar{z} = \frac{\partial F_2(z, \bar{\delta})}{\partial \bar{\delta}} = z + \frac{k_u}{k_L} s$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2(z, \bar{\delta})}{\partial s} = \left(k_u - \frac{k_L}{2\gamma_z^2} \right) \frac{\bar{\delta}}{k_L} + \frac{1}{2\gamma_z^2} \bar{\delta}^2 + \frac{\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2}$$

$$\frac{\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2} = \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} [\cos(k_L \bar{z} + \phi) \boxed{+ \dots}]$$

2項めはsに対して速く変化するので無視

以降上線を外す。 $\bar{z} \rightarrow z \quad \bar{\delta} \rightarrow \delta \quad \bar{H} \rightarrow H$

Hと運動方程式

$$H = \left(k_u - \frac{k_L}{2\gamma_z^2} \right) \frac{\delta}{k_L} + \frac{1}{2\gamma_z^2} \delta^2 + \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} \cos(k_L z + \phi) + \frac{a_z}{\gamma}$$

- 波長関係によりHを δ の1次項をなくすることができる。

$$k_u = \frac{k_L}{2\gamma_z^2}$$

$$H = \frac{1}{2\gamma_z^2} \delta^2 + \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} \cos(k_L z + \phi)$$

- RFに類似
- 小振幅の場合、シンクロトロン位相変化

$$H = \frac{1}{2\gamma_z^2} \delta^2 + \frac{k_L^2 a_u a_L}{4\gamma^2} z^2 \quad \left(\frac{\Delta\phi_z}{L} \right)^2 = \frac{k_L^2 a_u a_L}{2\gamma^2 \gamma_z^2}$$

例

- $E=1.2\text{GeV}$, $\delta=1.25\times 10^{-4}$, $\lambda_L=240\text{ nm}$

$$\lambda_L = \frac{\lambda_u(1 + a_u^2)}{2\gamma^2} \quad \frac{a_u}{\gamma} = \theta_u$$

- $a_u=5.046$, $\lambda_u=10\text{ cm}$

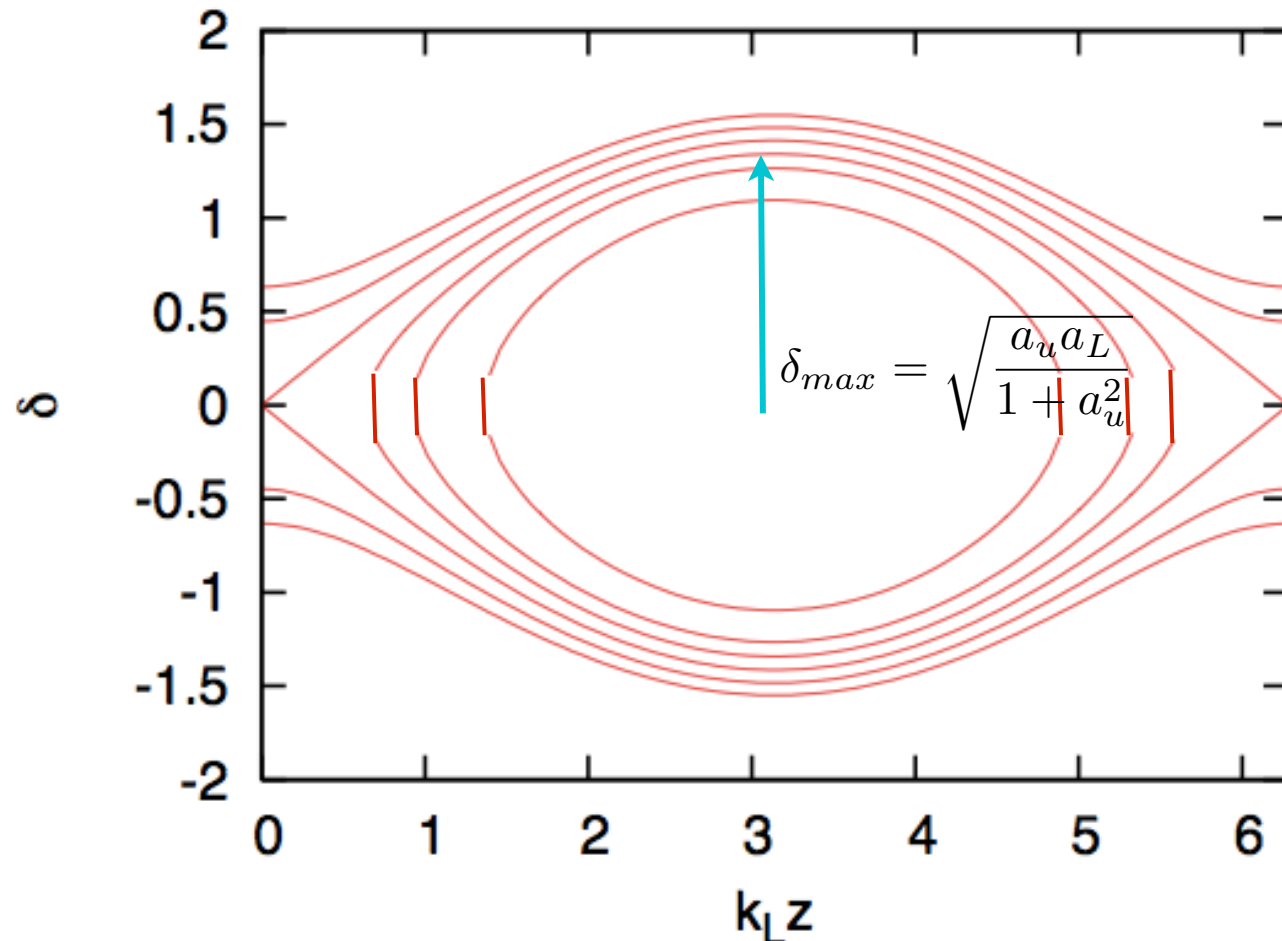
$$\delta(L_u) - \delta(0) = \Delta\delta(L_u) \sim \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} k_L L_u$$

- $\Delta\delta=1\times 10^{-3}$, $L_u=5\text{m}$, $a_L=1.68\times 10^{-5}$.

$$\delta(L_u) - \delta(0) \sim \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} k_L L_u$$

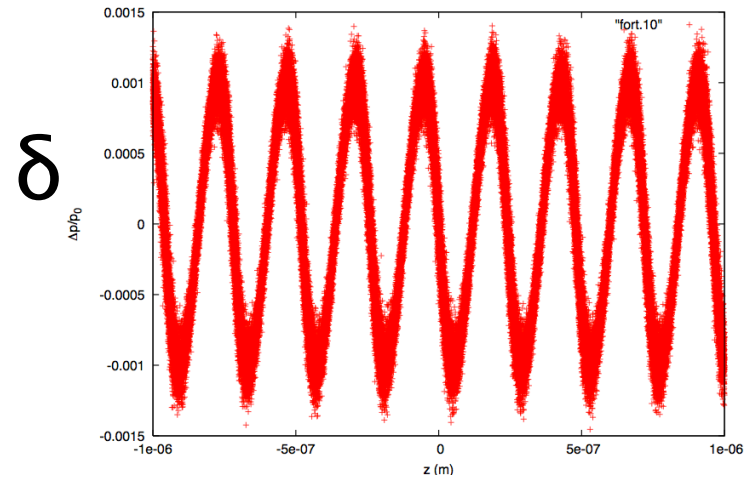
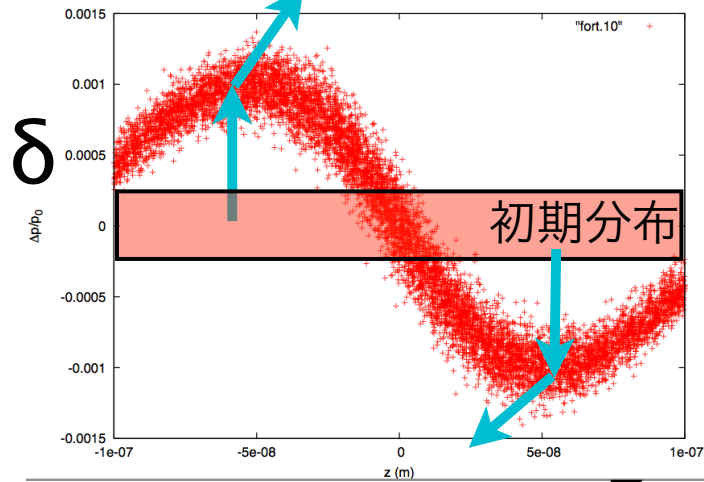
$$\left(\frac{\Delta\phi_z}{L}\right)^2 = \frac{k_L^2 a_u a_L}{2\gamma^2 \gamma_z^2} = 0.159 \quad \begin{array}{l} \text{シンクロトロン位相} \\ L=10\text{mで}\pi/2\text{回転} \end{array}$$

位相空間

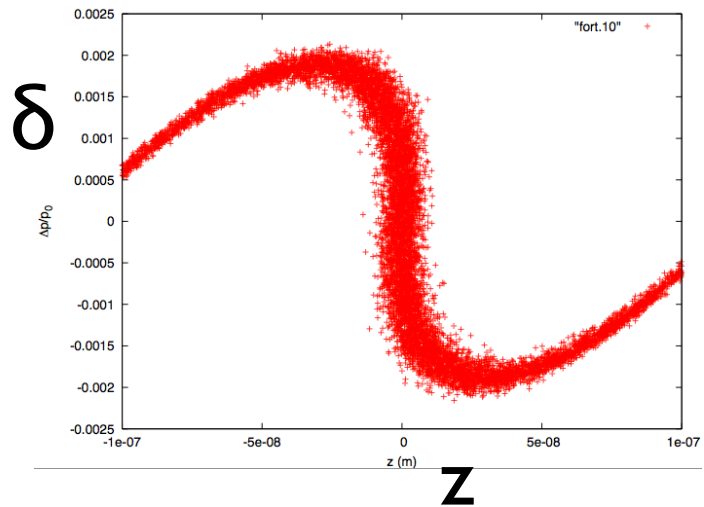


位相空間分布 (simulation)

● L=5m



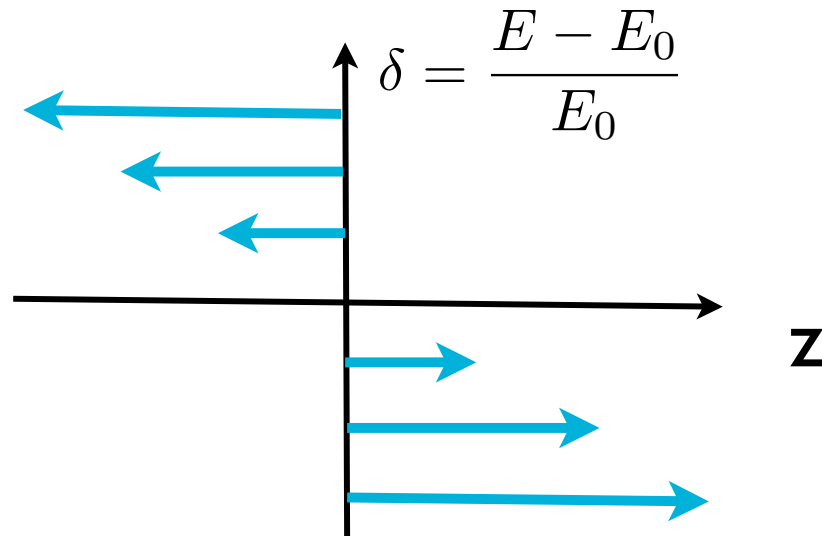
● L=10m



Dispersive section

$$\begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} R_{55} & R_{56} \\ R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_1$$

- RF deviceが無い場合、 $R_{65}=0, R_{66}=1, R_{55}=1$.
- R_{56} : energyが基準より大きいときの到着時刻送れ、軌道長の延び。



Echo seeding FEL

G. Stupakov

$$\Psi_0(z, \delta) = \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2} \right]$$

- Step 1: レーザー相互作用

$$\delta \Rightarrow \delta - a_1 \sin k_L z$$

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\delta - a_1 \sin k_L z)^2}{2\sigma_\delta^2} \right]$$

- Step 2: Slippage

$$z \Rightarrow z - R_{56}^{(1)} \delta$$

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\delta - a_1 \sin k_L (z - R_{56}^{(1)} \delta))^2}{2\sigma_\delta^2} \right]$$

- Step 3: レーザー相互作用

$$\delta \Rightarrow \delta - a_2 \sin k_L z$$

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\left\{ \delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z + \phi) - a_1 \sin \left(k_L^{(1)} z - k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} (\delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z + \phi)) \right) \right\}^2}{2\sigma_\delta^2} \right]$$

- Step 4: Slippage

● Step 4: Slippage $z \Rightarrow z - R_{56}^{(2)} \delta$

$$\begin{aligned} \Psi(z, \delta) &= \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \left\{ \delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_1 \sin \left(k_L^{(1)} z - k_L^{(1)} R_{56}^{(2)} \delta - k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} (\delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi)) \right) \right\}^2 \right] \\ &\approx \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \left\{ \delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta}{\sigma_\delta^2} \left\{ a_1 \sin \left(k_L^{(1)} z - k_L^{(1)} (R_{56}^{(1)} + R_{56}^{(2)}) \delta + a_2 k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

1行目: 全体的にsinで波打っている部分

2行目: 複雑な構造

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \left\{ \delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. \left[1 + \frac{\delta}{\sigma_\delta^2} a_1 \sin \left(k_L^{(1)} z - k_L^{(1)} (R_{56}^{(1)} + R_{56}^{(2)}) \delta + a_2 k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right) \right] \right] \end{aligned}$$

高周波成分

$$\Psi(z, \delta) = \frac{\lambda_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \left\{ \delta - a_2 \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right\}^2 \right] (1 + \Delta\Psi(\delta, z))$$

$$\Delta\Psi = \frac{\delta}{\sigma_\delta^2} a_1 \sin \left(k_L^{(1)} z - k_L^{(1)} (R_{56}^{(1)} + R_{56}^{(2)}) \delta + a_2 k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} \sin(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right)$$

$$= \frac{\delta}{\sigma_\delta^2} a_1 \sum_{h=-\infty}^{\infty} J_h(a_2 k_L^{(1)} R_{56}^{(1)}) \sin \left(k_L^{(1)} z - k_L^{(1)} (R_{56}^{(1)} + R_{56}^{(2)}) \delta + h(k_L^{(2)} z - k_L^{(2)} R_{56}^{(2)} \delta + \phi) \right)$$

$$= \frac{\delta}{\sigma_\delta^2} a_1 \sum_{h=-\infty}^{\infty} J_h(a_2 k_L^{(1)} R_{56}^{(1)}) \sin \left[(k_L^{(1)} + h k_L^{(2)}) z + h\phi - \left(k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} + (k_L^{(1)} + h k_L^{(2)}) R_{56}^{(2)} \right) \delta \right]$$

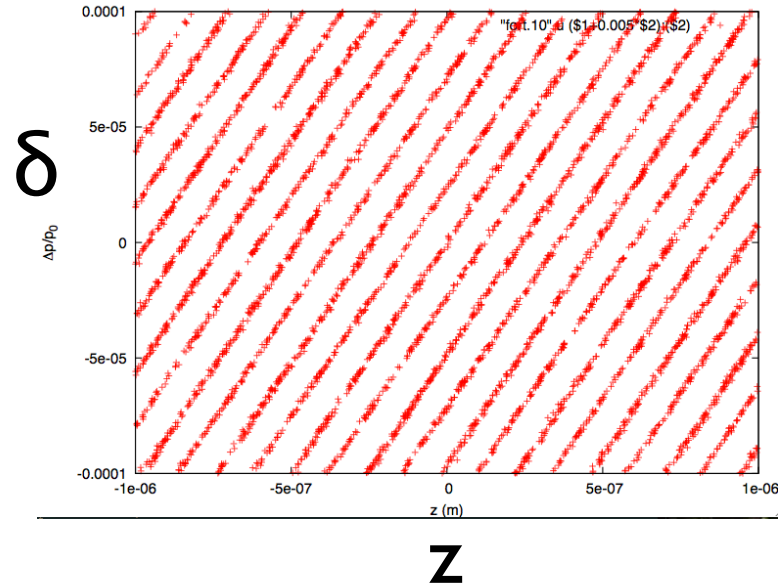
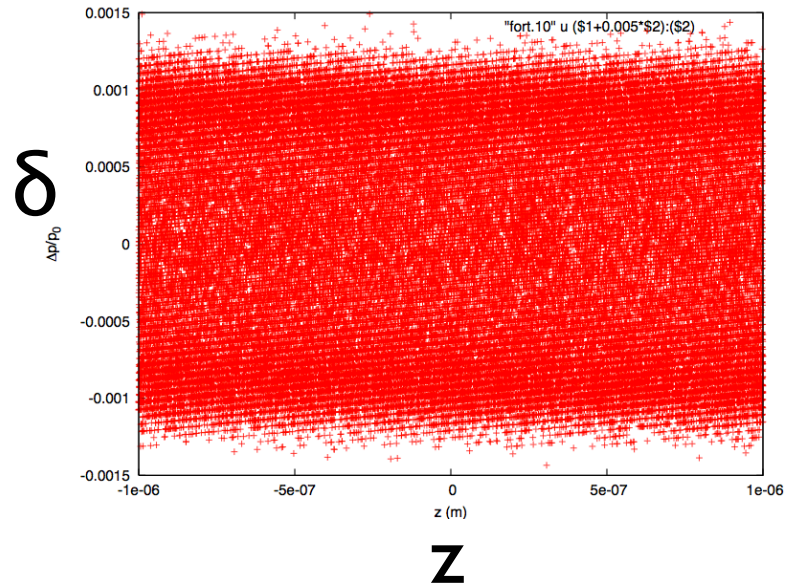
$$\begin{aligned} \Delta \int \Psi d\delta &= \frac{\lambda_e a_1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\delta^2} \sum_h J_h \int e^{-\delta^2/2\sigma_\delta^2} \delta \sin(-k\delta + k'z + h\phi) d\delta \\ &= -\lambda_e a_1 \sum_h J_h e^{-k^2 \sigma_\delta^2 / 2} k \sigma_\delta \cos(k'z + h\phi) \int e^{-\delta^2/2\sigma_\delta^2} \delta \sin(-k\delta + y) d\delta = -\sqrt{2\pi} e^{-k^2 \sigma_\delta^2 / 2} k \sigma_\delta^3 \cos(y) \end{aligned}$$

$k = k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} + (k_L^{(1)} + h k_L^{(2)}) R_{56}^{(2)}$

- 最大 $k\sigma_\delta = \left[k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} + (k_L^{(1)} + h k_L^{(2)}) R_{56}^{(2)} \right] \sigma_\delta = 1$ $k' = k_L^{(1)} + h k_L^{(2)}$
- J_h の引数が $a_2 k_L^{(1)} R_{56}^{(1)} = h + 0.81h^{1/3}$ のとき、最大値 $J_h \sim 0.67/h^{1/3}$

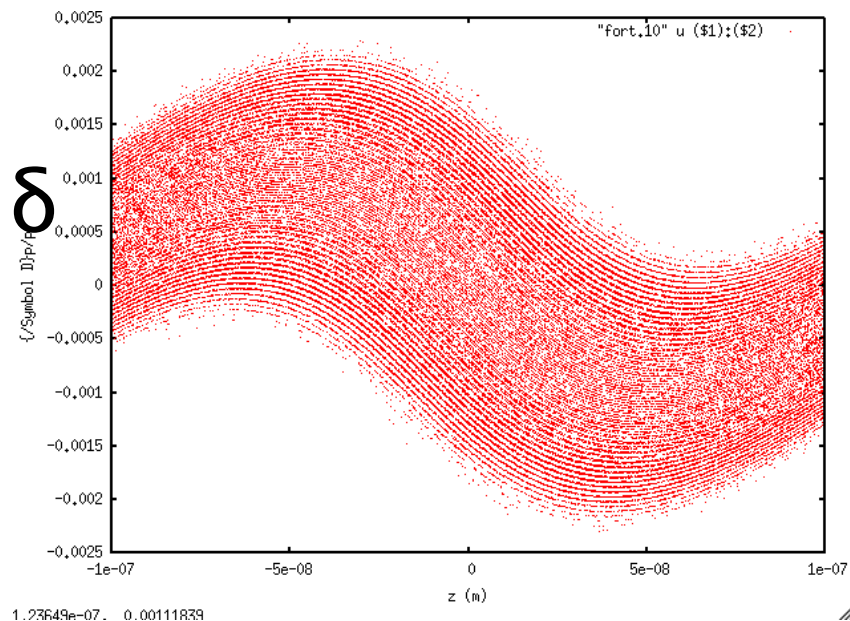
式により $R^{(1,2)}$, 高周波成分 k がおよそ見積もれる

Step 2 : $R_{56}=5\text{mm}$ (simulation)

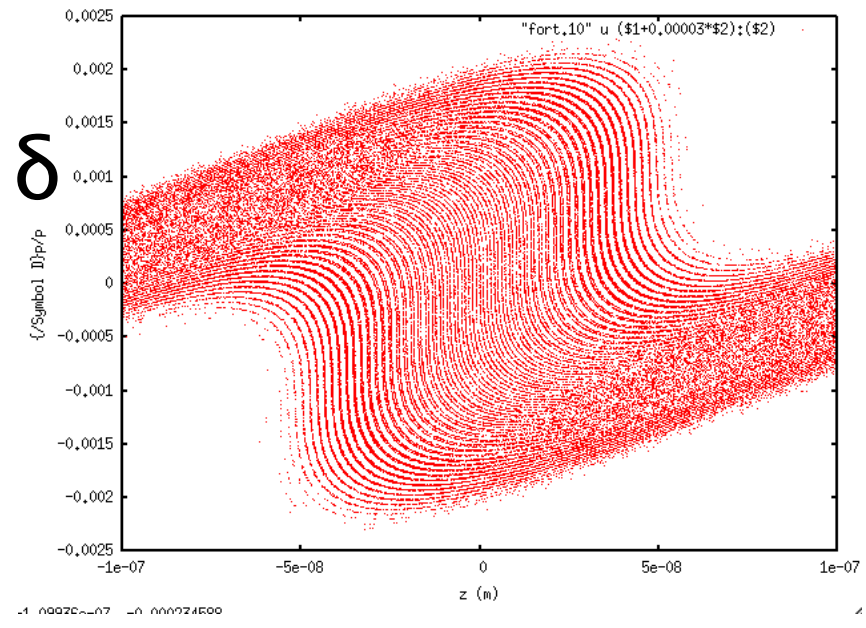


- sin形のenergy modulationを横縞に変える。

Step 3: Laser interaction & slippage (R56=0.03mm)



Z



Z

Step 4: Radiation

- 与えられた分布での放射：電磁場は距離に対してリニアに増える。

$$2ik_L \frac{\partial \hat{a}(s, \omega)}{\partial s} \approx -\frac{e^2 \mu_0 a_u}{2\gamma} \sum_i e^{-ik_L z_i} = \text{const}$$

- 自己増幅：電磁場は指数関数的に増え、その後飽和。

$$2ik_L \frac{\partial \hat{a}(s, \omega)}{\partial s} \approx -\frac{e^2 \mu_0 a_u}{2\gamma} \sum_i e^{-ik_L z_i} = A \hat{a}(s, \omega)$$

電磁場の変化(1次元モデル)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) a_{L,x} = -\frac{e\mu_0}{mc} j_x \quad \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{a}) = 0$$

$$a_{L,x}(s) = \int \hat{a}_L(s, \omega) \exp(k_L s - \omega t) d\omega$$

$$\frac{\partial^2 \hat{a}(s)}{\partial s^2} \approx 0 \quad k_L = \omega/c$$

- Source: beam motion

$$j_x(s, t) = \sum_i e \frac{a_u c}{\gamma} \cos k_u s \delta(s - s_i(t))$$

$$2i \int k_L \frac{\partial \hat{a}(s, \omega)}{\partial s} e^{i(k_L s - \omega t)} d\omega \approx - \sum_i \frac{e^2 \mu_0 a_u}{2\gamma} (e^{i k_u s} + e^{-i k_u s}) \delta(s - s_i(t))$$

- Integral over $e^{i\omega t} dt$

$$2ik_L \frac{\partial \hat{a}(s, \omega)}{\partial s} \approx - \sum_i \frac{e^2 \mu_0 a_u}{2\gamma} (e^{-i(k_L s - \omega t_i - k_u s)} + e^{-i(k_L s - \omega t_i + k_u s)})$$

$$2ik_L \frac{\partial \hat{a}(s, \omega)}{\partial s} \approx - \frac{e^2 \mu_0 a_u}{2\gamma} \sum_i e^{-ik_L z_i} \quad z = s - ct + \frac{k_u}{k_L} s$$

Bunching factor

$$\sum_{i=1}^{N_e} e^{-ik_L z_i} \quad k_L z = k_L s - \omega t + k_u s$$

- 波長域で一様ランダムに進行方向に分布

$$\sum_{i=1}^{N_e} e^{-ik_L z_i} \propto \sqrt{N_e}$$

- 波長域で周期的な分布構造を持つ

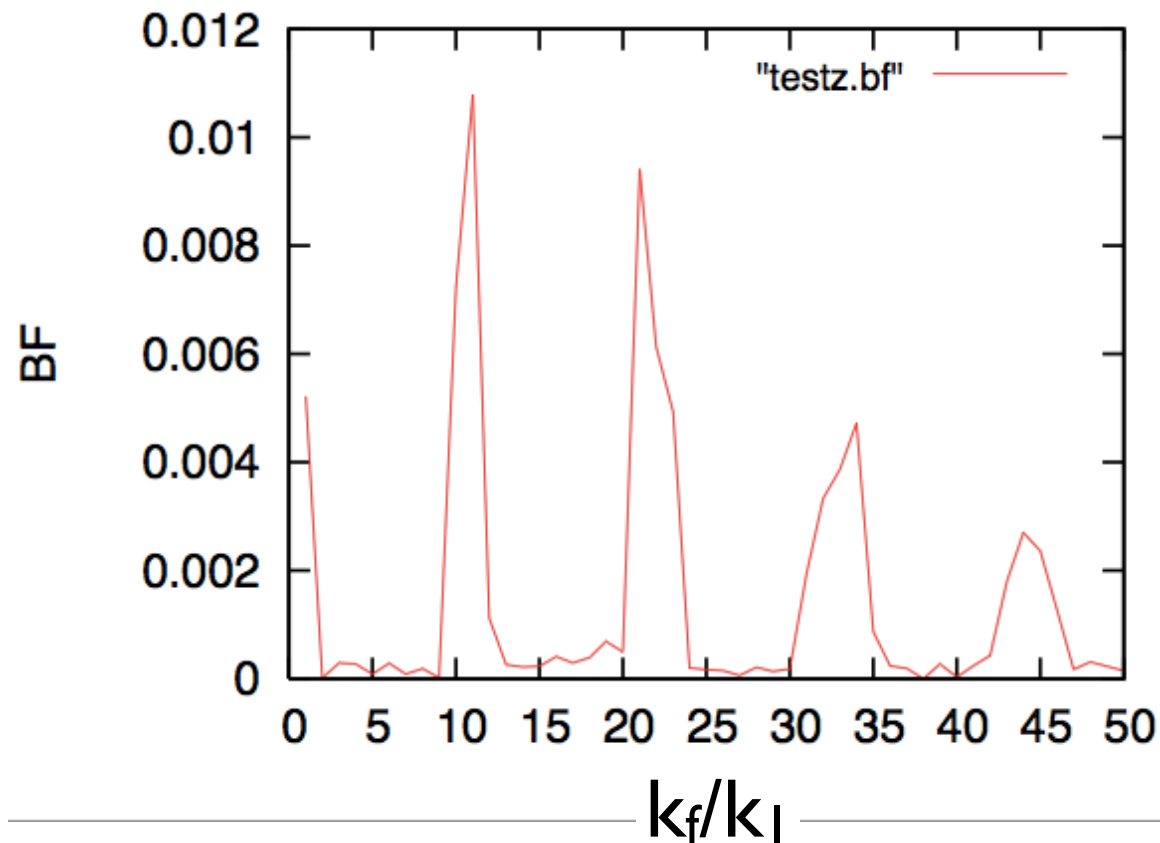
$$\sum_{i=1}^{N_e} e^{-ik_L z_i} \propto N_e$$

- シミュレーションでは統計ノイズに注意。

EEHGの場合はbunching factorを与えているのでノイズの心配は少ない。

Bunching factor (simulation)

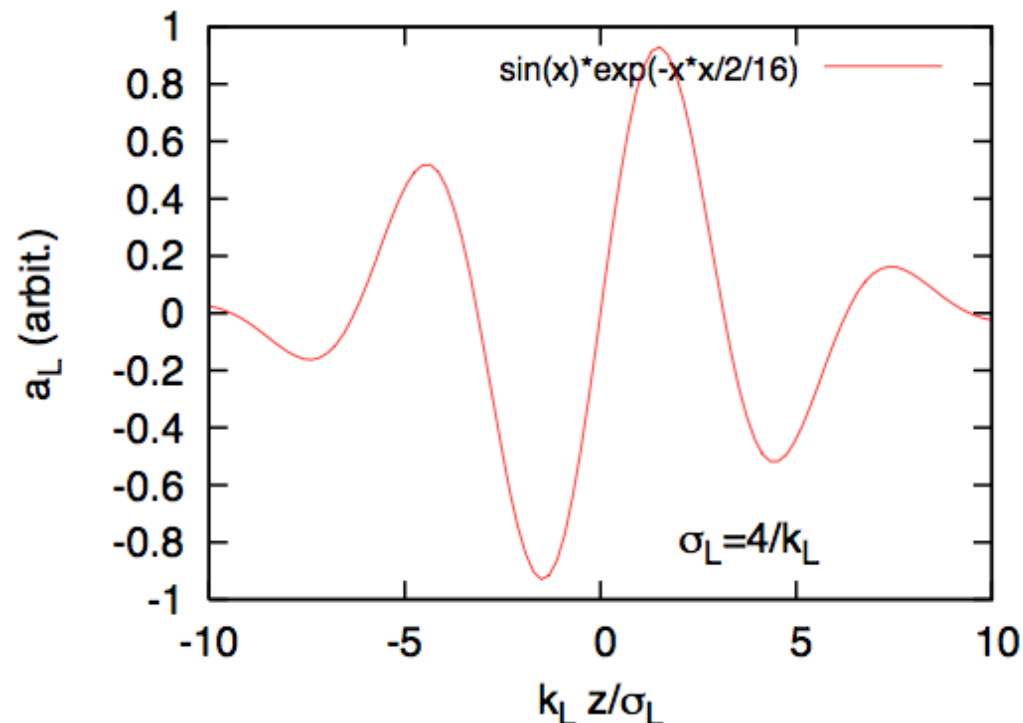
$$BF(h) = \sum_{i=1}^{N_e} e^{-ihk_L^{(1)} z_i}$$



Two attosecond pulses production

A. Zholents, G. Penn

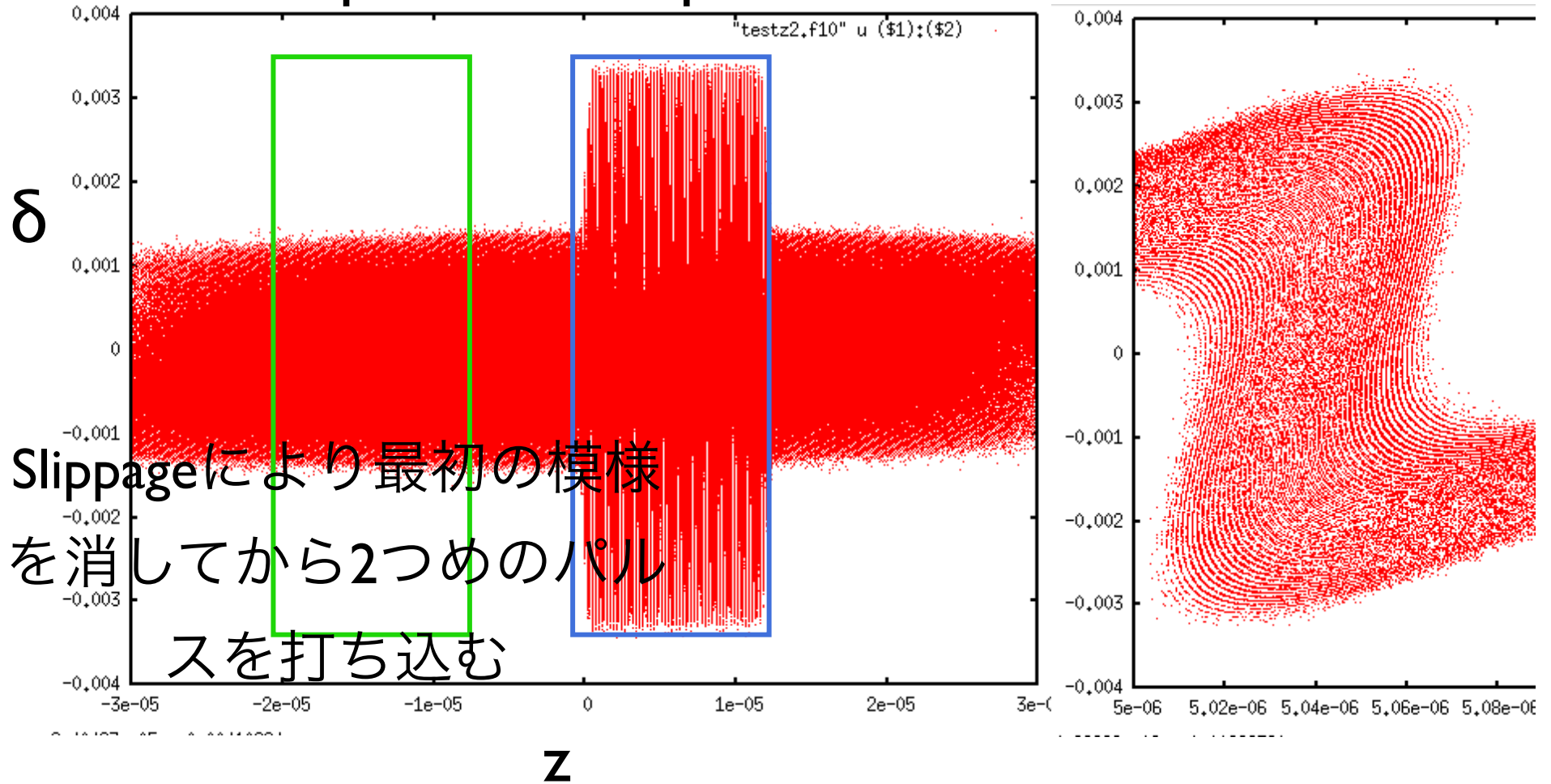
- Two short laser pulses are driven in the structured beam at the 2-nd and 3-rd stages.



One short pulse

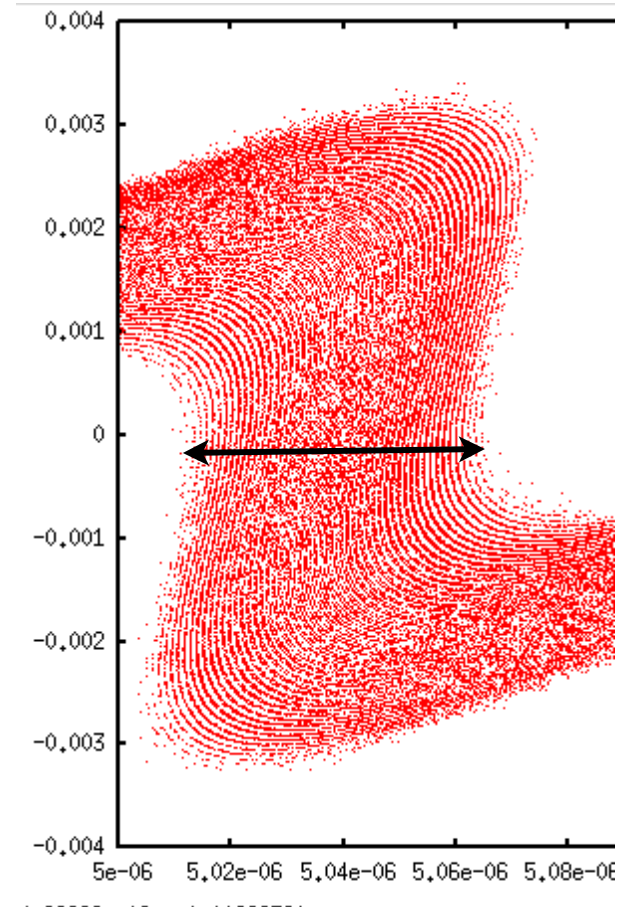
パルス周期数 + アンジュレータ周期数のパルス光

2nd pulse 1st pulse



at second pulse

- 1周期ウィグラー



cERL(E=35MeV)への応用 I

- $N_e=4.8 \times 10^7$, $\sigma_\delta=1 \times 10^{-3}$, $\sigma_z=0.6$ mm

- $a_u=1.16$, $\lambda_u=10$ cm

$$\lambda_L = \frac{\lambda_u(1 + a_u^2)}{2\gamma^2}$$

- $L_u=5$ m, $\lambda_L^{(l)}=25$ μ m, $a_L=1.3 \times 10^{-5}$

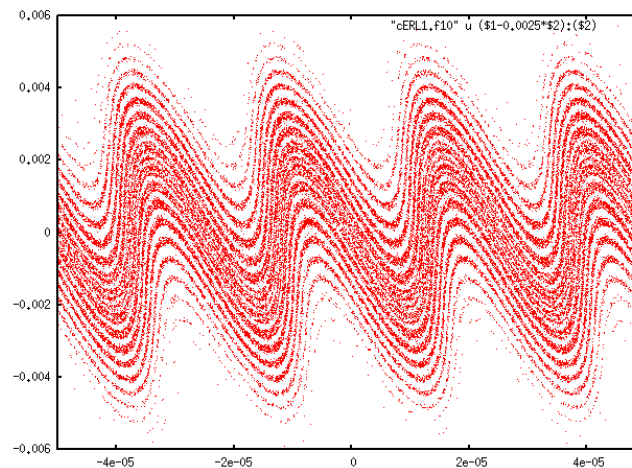
- $\Delta\delta=2 \times 10^{-3}$. $\Delta\delta(L_u) \sim \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} k_L L_u$

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{a_u a_L}{1 + a_u^2}}$$

- $R_{56}^{(l)}=5$ cm

- $\lambda_L^{(f)}=2$ μ m,

δ



z

cERL(E=35MeV)への応用 II

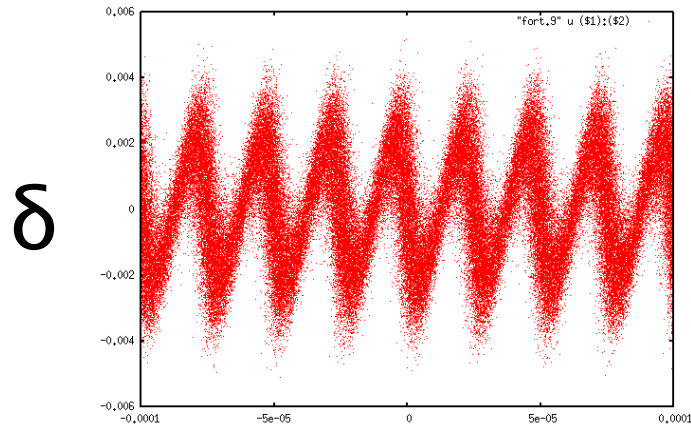
- $N_e=6.25 \times 10^8$, $\sigma_\delta=1 \times 10^{-2}$, $\sigma_z=30 \mu\text{m}$
 - $L_u=1 \text{ m}$, $a_u=1.16$, $\lambda_u=10 \text{ cm}$.
 - $\lambda_L^{(1)}=25 \mu\text{m}$, $a_L=4.8 \times 10^{-4}$
 - $\Delta\delta=1.5 \times 10^{-2}$.
-
- いいパラメータまだ見つからず。

ERL I (E=3GeV)

- $N_e=6.25 \times 10^8$, $\sigma_\delta=1 \times 10^{-3}$, $\sigma_z=100 \mu\text{m}$
- $L_u=5 \text{ m}$, $a_u=5.8$, $\lambda_u=20 \text{ cm}$.
- $\lambda_L^{(l)}=100 \text{ nm}$, $a_L=7.6 \times 10^{-4}$
- $\Delta\delta=1.5 \times 10^{-2}$.

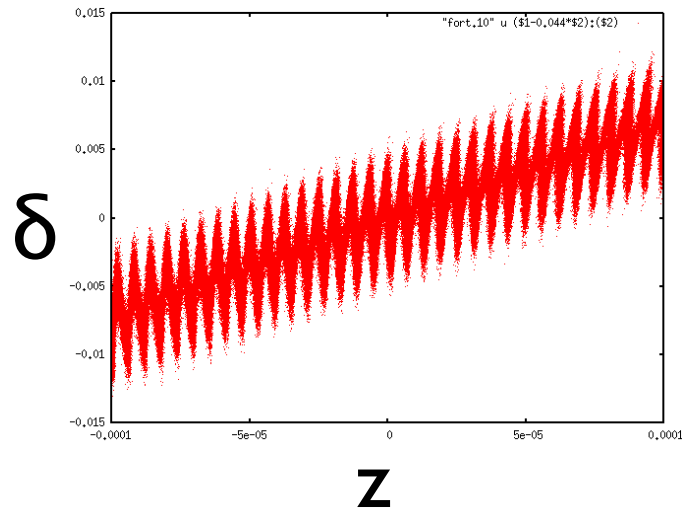
- $\lambda_L^{(f)}=5-10 \text{ nm}$

ERL II



Energy modulation -> Slippage -
>Accel ->Slippage

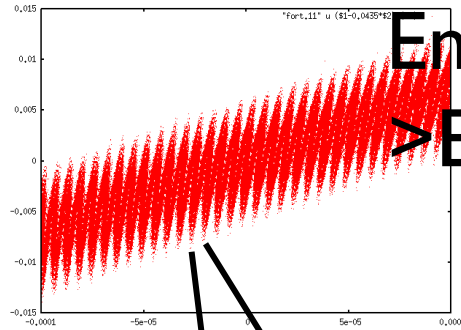
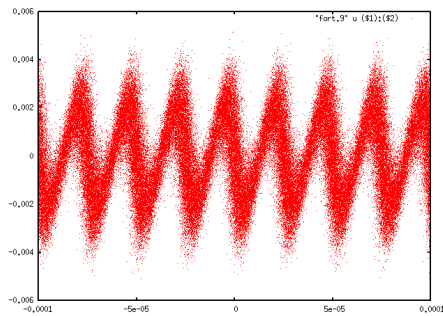
● 加速 35MeV->100MeV



複雑な内部構造はなし

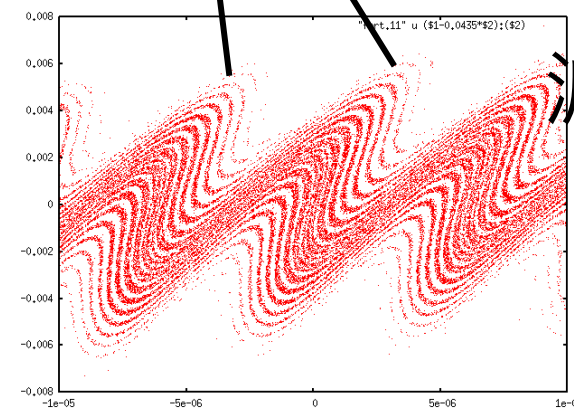
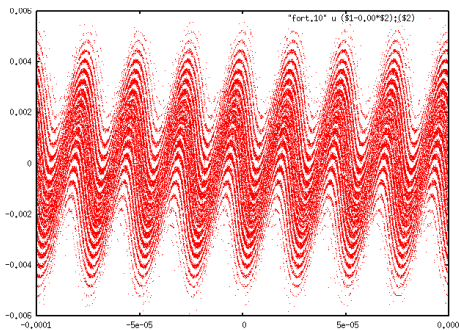
波長は $25\mu\text{m}$ -> $5\mu\text{m}$

ERL III



Energy modulation -> Slippage -
> Energy modulation->Slippage-
> Accel ->Slippage

複雑な内部構造を持つ



波長は25μm->0.5μm

$$\lambda_u = \frac{2\gamma^2 \lambda_L}{(1 + a_u^2)} = 2cm$$

- 加速 35MeV->100MeV

加速後のR₅₆(数cm): arcで調整できるか。

リングでは (すでに考えられている)

- リングのアンジュレータ部分でレーザーを打ち込み、energy modulationをつくる。
- αL を使って分布を横に伸ばす。
- 再度レーザーを打ち込めば、ある場所でbunching factorが大きくなる。そこにアンジュレータを置く。

Summary

- 縦方向の位相空間を操作することで、ビーム内に高周波成分を作り出せる。
- SLACではEEHGは実証されている。
- ERLなので加速を入れた方がバリエーションが広がる。
- 電流密度が低いERLでは発振より、harmonic generationの方が理にかなっている。
- 空間電荷、 R_{56} 、CSR...



空間電荷

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{a} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) = -\frac{e\mu_0}{mc} \mathbf{j}$$

- 1次元モデル

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\mu_0 \dot{j}_z$$



3次元モデル

$$H = (1 + \delta) - \sqrt{(1 + \delta)^2 - \left(p - \frac{a}{\gamma}\right)^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

Slippage修正 (garbage)

- 正準変換(変数変換)

$$F_2(z, \bar{\delta}) = \left(z + \frac{s}{2\gamma_z^2} \right) \bar{\delta}$$

$$\delta = \frac{\partial F_2(z, \bar{\delta})}{\partial z} = \bar{\delta} \quad \bar{z} = \frac{\partial F_2(z, \bar{\delta})}{\partial \bar{\delta}} = z + \frac{s}{2\gamma_z^2}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2(z, \bar{\delta})}{\partial s} = \frac{1}{2\gamma_z^2} \bar{\delta}^2 + \frac{\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2}$$

$$\frac{\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_L}{\gamma^2} = \frac{a_u a_L}{2\gamma^2} \left[\cos \left\{ \left(k_u - \frac{k_L}{2\gamma_z^2} \right) s + k_L \bar{z} + \phi \right\} \boxed{+ \dots} \right]$$

2項めはsに対して速く変化するので無視

以降上線を外す。 $\bar{z} \rightarrow z \quad \bar{\delta} \rightarrow \delta \quad \bar{H} \rightarrow H$