

Maxwell 方程式の変位電流密度と コンデンサーの極板間の磁場および電磁波



兵頭 俊夫

高エネルギー加速器研究機構 (KEK) 物質構造科学研究所

1. はじめに

電流と磁場の関係を表す Ampere の法則

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1)$$

がコンデンサーを含む開いた回路でも成り立つように, Maxwell は変位電流密度の項を加えて Ampere-Maxwell の法則

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2)$$

に改めた. 変位電流密度は, Maxwell 方程式が電荷の保存則を満たすために必須であると同時に, 電磁波の予言に重要な役割を果たした. Maxwell は, 変位電流を通常の伝導電流と同等に扱っていたが, すでに 1881 年に G.E. FitzGerald がそれに疑問を投げかけていたという¹⁾.

Planck²⁾ は 1922 年出版の著書で, スカラー・ポテンシャルで表される電場は磁場を作らないことを示した. しかし「変位電流の検証」として「コンデンサーの極板間に生じる磁場」を検出する実験は, その後も存在した. 米国の「PSSC 物理」もそれを採用しようとしたが, 実験開発の最中に理論的根拠がないことに気づいて開発を中止し^{1,3)}, 第 2 版では電磁気の章を大幅改訂して, French と Tessman⁴⁾ が注意を喚起する論文を書き, Purcell⁵⁾ が大学向け教科書で説明した.

しかし彼らの考えはなかなか定着しなかった. 我が国でも, 以前「物理教育」誌が特集号で意見を幅広く掲載した⁶⁾. しかし議論は収束していないようで, 本誌でも議論が続いている⁷⁾.

筆者は最近, 文献 1, 4, 5 などの考え方を定着させることを目的として, 定着しない理由を考察

した⁸⁾. 本稿では, それに関連して Ampere-Maxwell の法則についての考察を深める.

2. Biot-Savart の法則と因果関係

物理法則が単なる等号関係 (相関関係) を超えて因果関係⁹⁾を表すかどうかは, 式だけからは自明でないことが多く, 個別の検討を要する.

Ampere とほぼ同時に Biot と Savart も, 電流の磁気作用を記述する Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (3)$$

を提案した. これを時間に依存する状況に一般化すると, 次の Jefimenko の式^{10, 11)}が得られる.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{R^2} + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) / \partial t_r}{cR} \right] \times \frac{\mathbf{R}}{R} dV' \quad (4)$$

ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, c は光速で

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c} \quad (5)$$

は遅延時間である. $c \rightarrow \infty$ で (4) は (3) になる. これらは, \mathbf{r}' の電流密度が点 \mathbf{r} の磁場をつくることを表現した因果関係の法則である.

3. Ampere-Maxwell の法則と因果関係

Ampere の法則 (1) の積分形は線積分と面積分の間の関係式であり, 微分形も磁場の回転を含むので, 因果関係は (3) や (5) ほど自明ではない. しかし Ampere の意図が電流と磁場の因果関係を表すことにあったということではできる.

磁場と関係なく導入された変位電流密度を含む Ampere-Maxwell の法則 (2) の因果関係はさら

に自明でない。しかしこの法則を使った磁場の計算において電流密度と変位電流密度は対等であることと、Ampereの法則とのゆるい形式的類似から、誤解されやすい。

図1の点Pの磁場を近似的に計算する演習問題がある。これを円Cを縁とする円板Sを用いて解くとき、初学者は、Sを貫く変位電流密度を磁場の原因と感じがちである。外を回る曲面S'を用いても同じ結論になることから当然わかるように、磁場の原因と曲面の選択は関係ない。

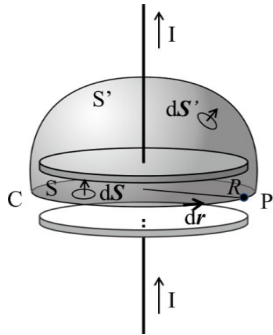


図1 コンデンサーの極板付近の磁場の計算に用いる閉曲線Cとそれを縁とする曲面S, S'.

極板間の変位電流が磁場をつくるかどうかは、正面から調べる必要がある。まず、つくらないというPlanckの証明²⁾を再構成して紹介する。電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ のスカラールポテンシャルを $\phi(\mathbf{r})$ とし、その変位電流密度を $\mathbf{j}_D(\mathbf{r})$ と記すと

$$\mathbf{j}_D(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (6)$$

である。磁場はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ で

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (7)$$

と表せるから、(2)は

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) \quad (8)$$

となるが、左辺にベクトル解析の恒等式とクーロンゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を適用すると

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) \quad (9)$$

となる。この各成分はPoissonの方程式だから

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \mathbf{j}_D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (10)$$

である。右辺の分子の第2項の寄与を調べると

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{j}_D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\nabla' \phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= -\epsilon_0 \nabla \int \frac{\partial \phi(\mathbf{r}') / \partial t}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (11)$$

である。 ∇' , ∇ はそれぞれ座標 \mathbf{r}' と座標 \mathbf{r} に関する演算子である。(11)の右辺はスカラ関数

$$\phi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \int \frac{\partial \phi(\mathbf{r}') / \partial t}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (12)$$

の勾配 $\nabla \phi(\mathbf{r})$ の形をしているので(7)における(11)の寄与は0であり、よって

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (13)$$

である。これをさらに変形すると、Biot-Savartの法則(3)が得られる。つまり、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ の変位電流密度は磁場をつくらない。

他方、Biot-Savartの法則(3)から、実電流だけで極板間の磁場を説明できる。Bartlettは解析的な近似計算¹²⁾、Milsomは数値計算¹³⁾でそれを示した。計算には当然、極板表面を放射状に広がって一様な面電荷を配ったり回収したりしている面電流の寄与が含まれている。極板が半径 a の円板のとき、中心から距離 r の点の面電流密度の大きさは次のように表される。

$$J_S(r) = \pm \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (14)$$

以上で、準定常状況(第5節参照)での変位電流密度は磁場の原因とならないことがわかった。電流は磁場をつくると同時に極板の電荷密度を変化させる。よって、同じ電流による磁場と変

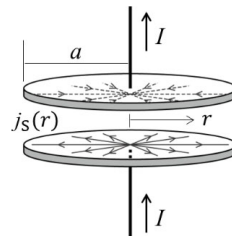


図2 極板表面に広がり収束する面電流。

位電流密度には厳密な相関関係があり，Ampere-Maxwell の法則はそれを表現している。

電流密度と変位電流密度を個別に扱ってよいか⁷⁾も検討しておく．Biot-Savart の法則では変位電流密度を考慮する必要はないが，Planck²⁾や Purcell⁵⁾のように，念のため考慮して，寄与がないことを確かめることは意味がある．一方，Ampere-Maxwell の法則では双方を考慮すべきであるが，それらは互いに明確に区別できるので，個別に計算して加えることは可能である。

4. 2種類の電場

コンデンサーの極板近傍の電場と磁場の相関関係を電磁波の発生と結びつけてよいかを検討する．鍵は，電場 \mathbf{E} が性質の異なるクーロン電場(保存電場) \mathbf{E}_C と誘導電場 \mathbf{E}_1 の和

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_1 \quad (15)$$

であること^{8, 14-16)}と，その時間依存性である。

\mathbf{E}_C は Gauss の法則を満たすが，さらに

$$\nabla \times \mathbf{E}_C = 0 \quad (16)$$

も満たすことはよく知られている．これにより \mathbf{E}_C はスカラー・ポテンシャルで表されるから，Planck が調べた(6)の \mathbf{E} は \mathbf{E}_C である．一方， \mathbf{E}_1 は Faraday の法則を満たすが，さらに

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (17)$$

も満たす^{8, 14, 16)}．当然，変位電流密度は

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_C}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \quad (18)$$

である． \mathbf{E}_C と \mathbf{E}_1 がそれぞれ(16)と(17)を満たすために， \mathbf{E}_C の性質である Gauss の法則や電荷の保存則(連続の式)と， \mathbf{E}_1 の性質である Faraday の法則がともに同じ \mathbf{E} だけで書けているので，注意が必要である。

5. 変位電流密度の時間依存性

つぎに，時間依存性を検討する．第4節でふれた「準定常的状況」とは，考察対象を含む典型的な距離を L ，特徴的な角周波数を ω とするとき， $L \ll c/2\pi\omega$ ，すなわち情報が光速 c で観測点に届く時間が無視できる状況である．このとき，各隣

間の場合は，定常的な場合の理論で理解できる．これを準定常的近似，あるいは瞬間近似という．

開いた回路に角周波数 ω の交流電流

$$I = I_0 \sin \omega t \quad (19)$$

が流れているとき，すべての量が角周波数 ω で変化するが，それらの振幅の ω 依存性は量によって異なる．コンデンサーの近傍の変位電流密度 $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_C / \partial t$ と $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t$ の振幅の大きさを Maxwell 方程式と電荷の保存則の積分形を利用して概算しよう．極板の大きさを表す特徴的な長さを L とすると，線積分の範囲は長さ L ，面積分の範囲は面積 L^2 で評価できる．

まず，Gauss の法則を使って変形した電荷の保存則の \mathbf{E} は \mathbf{E}_C であるから，積分形を書くと

$$\oint_{S+S'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\epsilon_0 \oint_{S+S'} \frac{\partial \mathbf{E}_C}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (20)$$

である．図1の閉曲面 $S+S'$ で積分した．左辺は電流 I だから，

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_C}{\partial t} \sim \frac{I}{L^2} \sim \frac{I_0}{L^2} \quad (21)$$

と大きさを概算できる．極板上の面電荷密度，したがってそれが作る \mathbf{E}_C は，電流の時間積分に比例するので，その時間微分(\mathbf{E}_C の変位電流密度)の振幅が ω に依存しないことは理解できる．

次に，Ampere の法則(1)より

$$B \sim \frac{\mu_0 I}{L} \sim \frac{\mu_0 I_0}{L} \quad (22)$$

であるが，Faraday の法則の \mathbf{E} は \mathbf{E}_1 であるから

$$E_1 \sim \frac{\partial B}{\partial t} L \sim \mu_0 \frac{dI}{dt} \sim \mu_0 I \omega \sim \mu_0 I_0 \omega \quad (23)$$

である．よって

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \sim \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \sim \epsilon_0 \mu_0 I \omega^2 \sim \epsilon_0 \mu_0 I_0 \omega^2 \quad (24)$$

と概算できる．これから(24)と(21)の比は

$$\frac{\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}}{\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_C}{\partial t}} \sim \frac{\epsilon_0 \mu_0 I_0 \omega^2}{\frac{I_0}{L^2}} \sim \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 L^2 \sim \left(\frac{\omega L}{c} \right)^2 \quad (25)$$

と評価できる． $L = 10 \text{ cm}$ とすると，周波数が

$f = \omega/2\pi < 1$ MHz でこの比は 10^{-5} 以下であるが、 ω とともに増大し、 $f \sim 1$ GHz で 1 になる。

また、 \mathbf{E}_C と $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_C / \partial t$ は電荷が生じる極板の近傍に分布しているが、 \mathbf{E}_1 と $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t$ は \mathbf{B} が大きい電流の近傍に分布しており、かつ場の形状がまったく違うことにも、注意すべきである。

さらに、 \mathbf{E}_C の性質は ω に依存しないので、Planck の証明は ω が増大しても成り立ち、よって依然として磁場も電磁波もつぐらない。高周波数で振動する電荷による電波の発生のモデルである Hertz の双極子アンテナ¹⁷⁾においても、スカラー・ポテンシャルで表現される電荷が作る \mathbf{E}_C の変動は電磁波として遠くに届くことはなく、ベクトル・ポテンシャルで表現される電流としての振動の部分が電磁波となることが示される。

6. 変位電流密度に関する議論のすれ違い

現行の大部分の高等学校「物理」の教科書は、コンデンサーの極板間の変動する電場と磁場の図から電磁波の発生についての定性的説明を始めている。しかし、そこに描かれているのは電磁波の発生に関係しない \mathbf{E}_C や $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_C / \partial t$ である。よって、定性的にせよそのような図を電磁波に関係づける説明は適切でないと言える。

周波数による変位電流密度 $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ (18) の主役の入れ替わりに注意することは重要である。Purcell⁵⁾ は、準定常的状況での変位電流密度が磁場をつぐらないことを、それが、電荷のまわりの球対称の変位電流密度の重ね合わせであることで説明している。これはまったく正しい。ただし、 $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t$ を無視できる状況での記述であることが(自明であるとして?)明記されていないので、述べられていることが $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t$ についても言える、また逆に ω が増大すれば $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_C / \partial t$ についても言えなくなると誤解しないように注意したい。

Planck や Purcell の証明は $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t$ には適用できない。それでは $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t$ は磁場をつくると言ってもよいだろうか。電磁波の電場 \mathbf{E}_1 は磁場と直接関係している。しかし、「磁場が変化すると電場が生じ、電場が変化すると磁場が生じること

が繰り返されて電磁波が生じる」と説明しても、電磁波の正しいようすを表現していない^{9,15)}。電場と磁場の回転と時間微分の関係式である Faraday の法則と、Ampere-Maxwell の法則を同時にみたく電磁波について、言葉だけで説明するのは難しい。

7. おわりに

Ampere-Maxwell の法則について Biot-Savart の法則と比較しながら考察した。変位電流密度に関する誤解や議論のすれ違いを避けるためには、実電流だけの Biot-Savart の法則で考えているのか、実電流と変位電流を含める Ampere-Maxwell の法則で考えているのかを明確にする必要がある。また、時間依存性について、準定常的近似が可能な角周波数 ω が小さい場合を語っているのか、 ω が大きな電磁波の領域のことを語っているのか、任意の ω の場合に成り立つ一般論を語っているのかを明確にすることも必要である。

参考文献

- 1) A.P. French *Phys. Teach.* **38** (2000) 274.
- 2) M. Planck *Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus* S. Hirzel (1922); (英訳・邦訳あり)。
- 3) 平田邦男 *物理教育* **41** (1993) 179.
- 4) A.P. French and J.R. Tesson *Am. J. Phys.* **31** (1963) 201.
- 5) E.M. Purcell *Electricity and Magnetism (Berkeley Physics Course)* McGraw-Hill, New York (1963); (邦訳あり)。
- 6) *物理教育* **60** (2012) 企画「変位電流とは何か」。
- 7) 北野正雄 *大学の物理教育* **27** (2021) 22 および 104.
- 8) T. Hyodo *Eur. J. Phys.* **43** (2022) 065202.
- 9) 鈴木亨 *物理教育* **60** (2012) 38.
- 10) O.D. Jefimenko *Electricity and Magnetism* Appleton-Century-Crofts, New York (1966).
- 11) 中村哲, 須藤彰三『電磁気学』朝倉書店 (2010)。
- 12) D.F. Bartlett *Am. J. Phys.* **58** (1990) 1168.
- 13) J.A. Milsom *Am. J. Phys.* **88** (2020) 194.
- 14) 加藤正昭『電磁気学』東京大学出版会 (1987)。
- 15) 兵頭俊夫 *物理教育* **60** (2012) 44.
- 16) 兵頭俊夫『電磁気学』増補修訂版 裳華房 (2021)。
- 17) たとえば I.S. Grant and W.R. Phillips *Electromagnetism 2nd ed.* John Wiley & Sons, Chichester (1990)。

連絡先 E-mail: hyodot@post.kek.jp