

第1回 KEK サマーチャレンジ
実習課題 12 「音速で飛行する中性子を曲げる」

1 はじめに

我々が住む環境では電場が至る所にあるために、それらの影響を取り除くことが極めて困難です。しかし、中性子は電荷が無いために、電場の影響をほとんど受けません。これを利用すると、微弱な相互作用を性格に測定することが可能になります。

音速程度の中性子が地上の実験環境で感じる相互作用の大きさは、強い相互作用、電磁相互作用、重力相互作用を通じて、ほぼ同じ程度になります(ただし、重力相互作用は中性子と地球との重力相互作用を考えます)。図1にその概要を示しておきます。今回の演習では、これらのうち、重力相互作用と電磁相互作用について、その影響を体験していただきます。

図1では、電磁相互作用のポテンシャルの値が伏せてあります。演習が終わったらこの値を記入することができるはずですので、値を入れてみて下さい。

そして、我々が未だ知ることのできない微弱な相互作用を探す方法について、考えてみて下さい。例えば、中性子は原子のすぐそばまで電機相互作用の邪魔を受けることなく近づくことができます。うまくすれば重力相互作用の異常を見て取れるかもしれません。

2 演習の目標

この演習の目標を次の三つに設定する。

1. 中性子が地球重力によって落下する際の加速度を求める。
2. 中性子のスピンが $1/2$ であることを確認する。
3. 中性子の磁気双極子能率の大きさを求める。

3 基礎知識

この節では、基礎知識をまとめておく。

特殊相対性理論によって、全エネルギー E と運動量 p の間には

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \quad (1)$$

という関係が成立する。 m は静止質量と呼ばれる。 c は真空中の光速で、 $c =$

$2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ である。運動エネルギー T は、全エネルギー E から mc^2 を引けばよい。

$$\begin{aligned} T &= mc^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{pc}{mc^2} \right)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

この第2項目以降が無視できる場合は非相対論的であると表現される。今回の演習の対象となる中性子は、非相対論的である。そこでこれ以降運動エネルギーは

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad (3)$$

として扱う。

中性子は陽子とともに原子核を構成する粒子である。中性子の持つ性質は

質量	$(939.56536 \pm 0.00008) \text{ MeV } c^2$
電荷	$(-0.4 \pm 1.1) \times 10^{-21} e$
スピン	$1/2$
平均寿命	$885.7 \pm 0.8 \text{ s}$

ただし、MeV は 10^6 eV を表す。eV はエネルギーの単位で、素電荷が 1V の電位差で加速された時に得る運動エネルギーの増分で定義される。その値は $1 \text{ eV} = e \text{ J}$ である。 e は素電荷で、 $e = 1.60217653(14) \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

運動量の大きさが p であるとき、対応するド・ブROI波長 λ は

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (4)$$

である。ただし h はプランク定数で、 $h = 6.6260693(11) \times 10^{-34} \text{ J s}$ であり、 $\hbar = h/(2\pi)$ が良く使われる。

また、覚えておく便利な定数及び関係式として、次のようなものがある。

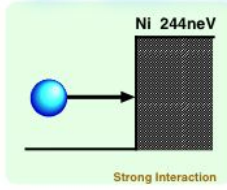
$$\hbar c = 197.326968(17) \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\hbar c} = \frac{1}{137.03599911(46)} \quad (6)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-1} \quad (7)$$

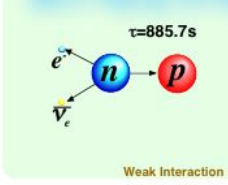
$$\epsilon_0\mu_0c^2 = 1 \quad (8)$$

強い相互作用



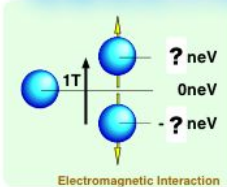
中性子は物質中の原子核と強い相互作用を通じて相互作用します。強い相互作用は最も強力な相互作用ですが、原子核のごく近傍でしか働かないため、原子体積で平均すると他の相互作用と同程度になっていまいす。

弱い相互作用



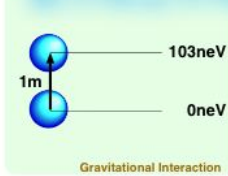
中性子は陽子とともに原子核を構成しており、原子核内では安定に存在しますが、原子核外では弱い相互作用を通じて平均寿命15分で陽子、電子、反電子型ニュートリノに崩壊します。

電磁相互作用



中性子は電荷を持っていないので、電気的な相互作用をしますが、磁気双極子能率を持っているので磁場と相互作用します。物質の性質を支配している電気相互作用の影響を受けないため、極めて物質透過力に優れます。

重力相互作用



重力相互作用は大変に弱い相互作用であり、通常はそれ以外の相互作用の影響に隠されてしまいます。しかし、速度の遅い中性子では地球からの重力の影響が顕著であり、落下しながら飛行する様子が観測されます。

Fig. 1. 音速中性子が受ける相互作用。電磁相互作用のポテンシャルの値は、演習が終わる時に書き込んで下さい。

α は微細構造定数、 μ_0 は真空の透磁率で、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

中性子の運動学的諸量の間の関係をまとめておく。中性子の速度が v 、運動エネルギーが T 、波長が λ 、波数が k である。波長の単位は $\text{\AA}$ が習慣上良く使われる。最近は nm が使われることも増えて来たが、研究者間の会話では依然として $\text{\AA}$ が用いられることがほとんどであるため、今回は $\text{\AA}$ を使っておくことにする。なお、 $1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$ である。

$$\frac{T}{1\text{eV}} = 5.2270387(15) \times 10^{-9} \left(\frac{v}{1\text{m/s}} \right)^2 \quad (9)$$

$$\frac{T}{1\text{eV}} = 8.1804250(55) \times 10^{-2} \left(\frac{1\text{\AA}}{\lambda} \right)^2 \quad (10)$$

$$\frac{v}{1\text{m/s}} = 1.38315911(20) \times 10^4 \sqrt{\frac{T}{1\text{eV}}} \quad (11)$$

$$\frac{v}{1\text{m/s}} = 3.9560346(17) \times 10^3 \frac{1\text{\AA}}{\lambda} \quad (12)$$

$$\frac{\lambda}{1\text{\AA}} = 2.86014423(96) \times 10^{-1} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{T}} \quad (13)$$

$$\frac{\lambda}{1\text{\AA}} = 3.9560346(17) \times 10^3 \frac{1\text{m/s}}{v} \quad (14)$$

なお、熱中性子を $v = 2200 \text{ m s}^{-1}$ で定義した場合、 $T = 25.30\text{meV}$ 、 $\lambda = 1.798\text{\AA}$ である。

原子核が一様に分布している中を z 方向に N 個の中性子が進んでいるとする。中性子は、その原子核と相互作用して、散乱されたり吸収されたりする。中性子が厚み dz だけ進む

間に、 dN だけ中性子が散乱される場合を考える。 dN は、中性子数 N 、厚み dz 、物質中の原子核数密度 n に比例するはずなので、

$$dN = -Nn\sigma_s dz \quad (16)$$

と書ける。この比例定数 σ_s は面積の次元を持ち、散乱断面積と呼ばれる。式 16 は、最初中性子数を N_0 とおくと

$$N = N_0 e^{-n\sigma_s z} \quad (17)$$

となる。中性子が厚み dz だけ進む間に、 dN だけ中性子が吸収される場合も同様に

$$dN = -Nn\sigma_a dz \quad (18)$$

と書いて、

$$N = N_0 e^{-n\sigma_a z} \quad (19)$$

となる。実際にはこれら双方の過程が同時に起こる。熱中性子領域か或はそれ以上に運動エネルギーが小さい場合には、散乱断面積 σ_s はほぼエネルギーによらない定数であり、吸収断面積は中性子速度 v に反比例する場合がほとんどである。これを

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \quad (20)$$

$$\sigma_a = \sigma_{a,\text{th}} \frac{v_{\text{th}}}{v} \quad (21)$$

のように書いておく。 a は散乱長と呼ばれる原子核固有の定数であり、その大きさは概ね 10^{-15} m の程度である。 $\sigma_{a,\text{th}}$ は熱中性子に対する吸収断面積であり、 $v_{\text{th}} = 2200 \text{ m s}^{-1}$

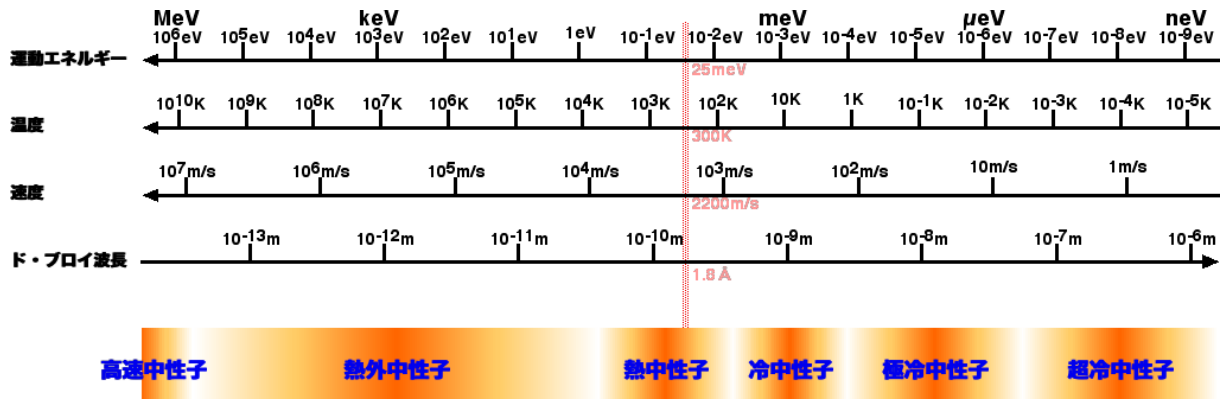


Fig. 2. 中性子の運動に関わる諸量の関係図

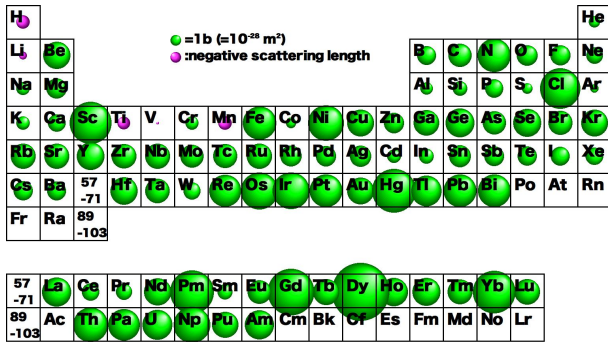


Fig. 3. 元素毎の散乱断面積

は熱中性子速度である。これらの断面積の単位には通常 b(バーン) が用いられる。1 b = 10^{-28} m^2 である。なお、物質中では原子核が自由には動けないし、電子も存在する。中性子の質量を m_n 、原子の質量を m_A 、原子番号を Z とおくと、散乱長は

$$b = \frac{m_A + m_n}{m_A} a + Z b_{ne} \quad (22)$$

と書くことができ、

$$\sigma_s = 4\pi b^2 \quad (23)$$

である。ただし、 b_{ne} は中性子が電子に散乱される時の散乱長であり、 $b_{ne} = -(1.38 \pm 0.03) \times 10^{-3} \text{ fm}$ である。 σ_s と $\sigma_{a,th}$ を元素別に図示したものを図 3 と図 4 に示す。これらの図において、同位体については自然同位体存在比で加重平均したものを示してある。

中性子はスピン 1/2 を持つ。一般に半整数スピンを持つ粒子はディラック方程式に従い、電荷が q 、スピン s の場合には、磁気双極子能率

$$\mu = \frac{q\hbar}{2m} \quad (24)$$

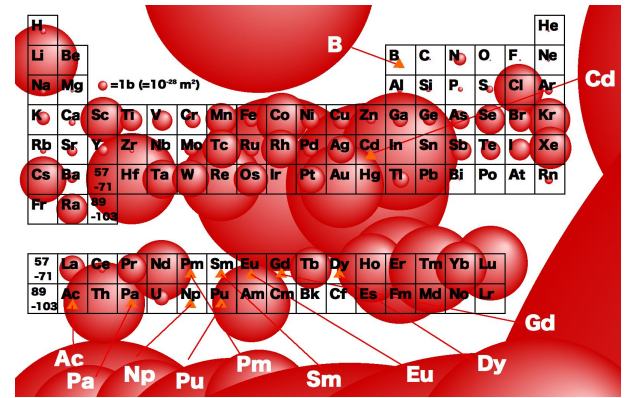


Fig. 4. 元素毎の熱中性子吸収断面積

を持つ。この式をそのまま用いると、中性子は電荷を持たないので、磁気双極子能率も 0 になる。しかし実際には中性子は内部構造を持ち、電荷の分布に偏りがあるために、磁気双極子能率は 0 にならない。

4 中性子の減衰

図 4 から分かる通り、中性子の吸収断面積は物質によって大きく異なる。中性子の吸収体として良く用いられるもののうち、カドミウムについてどの程度の吸収が起こるかを計算しておく。

原子数密度 $n \text{ cm}^{-3}$ は、アボガドロ数を $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ 、原子量を A 、密度を $d \text{ g cm}^{-3}$ とおくと

$$n = N_A \frac{d}{A} \quad (25)$$

与えられるので、 $n = 4.6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ である。 $\sigma_{a,th} = 2250 \text{ b}$ を使うと、波長 $10 \text{ \AA}$ の中性子に対する断面積 σ_a は

$$\sigma_a = 2250 \text{ b} \times \frac{10.0}{1.8} = 12500 \text{ b} \quad (26)$$

である。よって

$$n\sigma_a = 575\text{cm}^{-1} \quad (27)$$

となる。これは中性子ビームが $(n\sigma_a)^{-1} = 17\mu\text{m}$ のカドミウムを通過する間に、強度が $1/e = 0.37$ 倍に減少することを意味している。なお、散乱断面積は 5.6 b であり、吸収断面積に比べて無視できる。

同様に、波長 $10\text{ \AA}$ の中性子が、空気中を通過する場合を考える。空気は窒素が 80% 、酸素が 20% の割合であるものとし、標準状態での理想気体であるものとして扱うことにする。窒素も酸素も二原子分子なので、原子核の数密度は

$$n = 6.02 \times 10^{23} \times \frac{2}{22400} = 5.38 \times 10^{19}\text{cm}^{-3} \quad (28)$$

である。

	σ_s	$\sigma_{a,\text{th}}$	σ_a
N	10.03 b	1.9 b	10.6 b
O	3.761 b	0.00019 b	0.00106 b
空気	8.99 b	1.52 b	8.48 b

である。よって散乱断面積と吸収断面積を合算して

$$n(\sigma_s + \sigma_a) = 0.00094\text{cm}^{-1} \quad (29)$$

となる。つまり中性子ビームは空気中を $(n(\sigma_s + \sigma_a))^{-1} = 10.6\text{ m}$ 進んでようやく強度が $1/e = 0.37$ 倍に減少することを意味している。

5 中性子の単色化

中性子ビームに沿って複数の中性子吸収体を機械的に開閉して、特定の速度の中性子だけを通過させるような装置を、中性子速度選別機と言う。速度選別機を使って中性子の速度を制限したビームは、当然のことながら波長も制限を受けている。このようなビームは単色であると表現される。ある波長 λ を中心として、波長幅 $\Delta\lambda$ の分布を持つビームは、単色度が $\Delta\lambda/\lambda$ であると表現される。

6 磁気双極子能率の運動方程式

質量が m の粒子が、磁気双極子能率 (Magnetic Dipole Moment) μ を持っているとする。この粒子が磁場 $\mathbf{B}$ の中にあるとき、ポテンシャルエネルギー U は

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B} \quad (30)$$

で与えられる。磁気双極子能率はスピン角運動量 $\mathbf{J}$ に比例し、

$$\mu = \gamma \mathbf{J} \quad (31)$$

と書いた時の比例定数 γ を磁気回転比と言う。無次元化されたスピン演算子 $\mathbf{I}$ とは

$$\mathbf{J} = \hbar \mathbf{I} \quad (32)$$

という関係にあり、

$$\mu = \gamma \hbar \mathbf{I} \quad (33)$$

となる。ここで、演算子 $\mathbf{I}$ の各成分間の交換関係は

$$\begin{aligned} [I_x, I_y] &= iI_z \\ [I_y, I_z] &= iI_x \\ [I_z, I_x] &= iI_y \end{aligned} \quad (34)$$

である。ただし、

$$[A, B] = AB - BA \quad (35)$$

である。

粒子の速度が光速に比べて十分に小さい場合、粒子の運動エネルギー T は粒子の運動量 $\mathbf{p}$ を用いて

$$T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} \quad (36)$$

で与えられる。このとき、ハミルトニアン H は

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} - \mu \cdot \mathbf{B} \quad (37)$$

である。 $\mathbf{p} = (\hbar/i)\nabla$ を使ってハイゼンベルグ方程式

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dA}{dt} = [H, A] \quad (38)$$

を用いれば、 $\mathbf{p}$ 及び μ の時間発展は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \gamma \hbar \nabla (\mathbf{I} \cdot \mathbf{B}) \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \gamma \mathbf{I} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (39)$$

で与えられることが分かる。

$\mathbf{I}$ の時間発展は、 $\mathbf{I}$ が $\mathbf{B}$ を軸として歳差運動を示している。これはラーモア歳差として知られており、その歳差角速度 ω_L は

$$\omega_L = \gamma |\mathbf{B}| \quad (40)$$

で与えられる。

7 断熱的なスピン輸送

ある粒子が非一様磁場中を運動すると、その粒子から見た磁場は変化する。粒子の軌道に沿った座標を s とすると、粒子から見た磁場は

$$\omega_B = \frac{ds}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad (41)$$

という回転角速度で回転している。

$$\Gamma = \frac{\omega_L}{\omega_B} \gg 1 \quad (42)$$

という条件が成り立っている場合、粒子のスピンは磁場の変化に沿って回転し、スピンの局所磁場に対する向きが保存する。これは断熱的なスピン輸送と呼ばれており、条件 42 を断熱条件と呼ぶ。

8 非一様磁場下での近似運動方程式の導出

スピンに平行な単位ベクトルを σ とおいて

$$\mu = \mu \sigma \quad (43)$$

と書くことにする。断熱条件 42 が成立する場合には、スピンは磁場に平行か反平行であるので、

$$\sigma = \pm \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad (44)$$

と書ける。よって、式 39 は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \pm \frac{\mu}{m} \nabla |\mathbf{B}| \quad (45)$$

となる。繰り返すと、複号が正の場合がスピンと磁場が平行、複号が負の場合がスピンと磁場が反平行、である。

中性子の場合には、 μ が負であることが知られている。よって

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mp \frac{|\mu|}{m} \nabla |\mathbf{B}| \quad (46)$$

と書くと、複号が負の場合がスピンと磁場が平行、複号が正の場合がスピンと磁場が反平行、である。

9 多極磁場内での運動方程式

電流密度がなく透磁率が一定である場合、マックスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

となるので、磁場はスカラーポテンシャル V_B を用いて

$$\mathbf{B} = -\nabla V_B \quad (48)$$

と書くことができ、 V_B は

$$\nabla^2 V_B = 0 \quad (49)$$

をみたす。磁石が z 軸方向に十分に長いものと仮定して、 z 方向の依存性を無視する。円筒座標 (ρ, φ, z) を使った時、 $\rho = 0$ で有界な V_B の一般解は

$$V_B = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^j A_j \cos j(\varphi - \varphi_{0,j}) \quad (50)$$

である。式 50 右辺の $j = n$ の項を、 $2n$ 極磁場に対応する。磁石の内半径を ρ_0 とおき、 $\rho = \rho_0$ における磁場の大きさを B_0 と書くことにすると、 $2n$ 極磁場は次の関係を満たすことが分かる。

$$|\mathbf{B}| = B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} \quad (51)$$

これを式 46 に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mp \frac{|\mu|}{m} (n-1) \frac{B_0}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-3} x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \mp \frac{|\mu|}{m} (n-1) \frac{B_0}{\rho_0^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-3} y \end{aligned} \quad (52)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\rho_0} \\ Y &= \frac{y}{\rho_0} \\ \omega^2 &= \frac{|\mu|}{m} (n-1) \frac{B_0}{\rho_0^2} \\ \theta &= \omega t \end{aligned} \quad (53)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\theta^2} &= \mp X (X^2 + Y^2)^{\frac{n-3}{2}} \\ \frac{d^2 Y}{d\theta^2} &= \mp Y (X^2 + Y^2)^{\frac{n-3}{2}} \end{aligned} \quad (54)$$

となる。

10 四極磁場内での運動方程式

四極磁場内での運動方程式は、式 54 において、 $n = 2$ とおくことによって、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{d\theta^2} &= \mp \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ \frac{d^2 Y}{d\theta^2} &= \mp \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\end{aligned}\quad (55)$$

となる。さらに $X = 0$ 、 $Y > 0$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{d\theta^2} &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{d\theta^2} &= \mp 1\end{aligned}\quad (56)$$

となり、等加速度運動を行うことが分かる。実際の座標に戻すと、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \mp \frac{|\mu| B_0}{m \rho_0}\end{aligned}\quad (57)$$

である。ここまで地球重力を無視して計算してきたが、重力加速度を g として算入すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \mp \frac{|\mu| B_0}{m \rho_0} - g\end{aligned}\quad (58)$$

である。

A (おまけ) 一般の場合の数値計算法

一般の場合の中性子の軌道計算を行うために、数値計算法を紹介しておく。微分方程式の数値開放には様々なものがあるが、おそらくもっとも良く利用されて実用上もほぼ問題のない精度を与える方法として、Runge-Kutta の方法を示す。

A.1 1 階微分方程式

1 階の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (59)$$

の初期値が $x = x_0$ 、 $y = y_0$ である場合を考える。次の 4 つの量を計算する。

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_0, y_0) h \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) h \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) h \\ k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3) h\end{aligned}\quad (60)$$

このとき、近似解は

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + h \\ y_1 &= y_0 + \Delta y \\ \Delta y &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}\quad (61)$$

で与えられる。誤差は h^5 の次数である。

A.2 1 階連立微分方程式

1 階の連立微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z)\end{aligned}\quad (62)$$

については、

$$\begin{aligned}k_1 &= f_1(x_0, y_0, z_0) h \\ k_2 &= f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{m_1}{2}\right) h \\ k_3 &= f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{m_2}{2}\right) h \\ k_4 &= f_1(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3) h \\ m_1 &= f_2(x_0, y_0, z_0) h \\ m_2 &= f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{m_1}{2}\right) h \\ m_3 &= f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{m_2}{2}\right) h \\ m_4 &= f_2(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3) h\end{aligned}\quad (63)$$

を計算した上で、

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h \\
y_1 &= y_0 + \Delta y \\
z_1 &= z_0 + \Delta z \\
\Delta y &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
\Delta z &= \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (64)
\end{aligned}$$

とする。

A.3 高階微分方程式

一般階数の微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \quad (65)$$

の場合には、

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{dy}{dx} \\
z_2 &= \frac{dz_1}{dx} \\
&\dots \\
z_{n-1} &= \frac{dz_{n-2}}{dx} \quad (66)
\end{aligned}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{n-1}}{dx} &= f(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}) \\
\frac{dz_{n-2}}{dx} &= z_{n-1} \\
&\dots \\
\frac{dz_2}{dx} &= z_1 \\
\frac{dz_1}{dx} &= y \\
\frac{dy}{dx} &= z_1 \quad (67)
\end{aligned}$$

という1階の連立微分方程式に帰着されるため、前節 A.2 の方法に従って解くことができる。

A.4 多極磁場内の中性子軌跡の数値計算

2n 極磁場内の中性子の運動方程式 54

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{d\theta^2} &= \pm X(X^2 + Y^2)^{\frac{n-3}{2}} \\
\frac{d^2 Y}{d\theta^2} &= \pm Y(X^2 + Y^2)^{\frac{n-3}{2}} \quad (68)
\end{aligned}$$

を Runge-Kutta の方法によって解くには、

$$\begin{aligned}
\Xi &= \frac{dX}{d\theta} \\
H &= \frac{dY}{d\theta} \quad (69)
\end{aligned}$$

とにおいて、次の連立微分方程式に帰着させる。

$$\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{d\theta} &= \pm X(X^2 + Y^2)^{\frac{n-3}{2}} \\
\frac{dX}{d\theta} &= \Xi \\
\frac{dH}{d\theta} &= \pm Y(X^2 + Y^2)^{\frac{n-3}{2}} \\
\frac{dY}{d\theta} &= H \quad (70)
\end{aligned}$$