

Summer Challenge 2007

実験演習9: 超伝導空洞用ニオブの材料評価

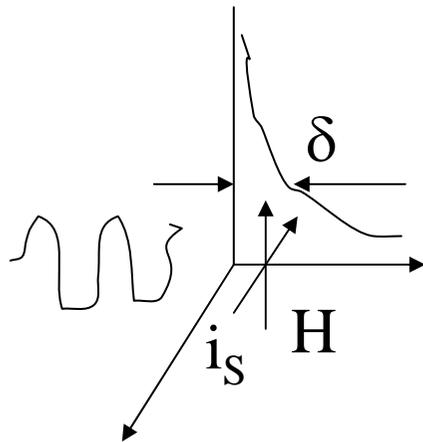
演習問題

演習問題0-1: 金属表面での高周波の振舞い

本実験演習は、超伝導物性一般を論じる演習ではない。あくまでも加速器を作る立場からの物性講座である。特に、高周波が発生する電場で荷電粒子を加速する装置: “加速空洞”の製作に主題を置く。この場合、重要な理解は電磁波の金属表面での振舞いである。

“真空中で金属(電気伝導率 σ)表面に高周波(角周波数 ω)を入射した時、金属表面で表皮深さ(δ)だけ電磁波が侵入する。そして、高周波表面電流(i_s)が表面抵抗(R_s)を感じながら流れ、表面発熱(P_{loss})が発生する”ことがよく知られている。良導体の場合の表皮深さ、表面抵抗の式を導け。参考文献:「砂川重信著 理論電磁気学、紀伊国屋書店、p215-219」。「J.D ジャクソン著 電磁気学I, 現代基礎物理学選書、p266-270, p283-317」。

答:



$$P_{loss} [W] = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot \int_S i_s^2 dS = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot \int_S H_s^2 dS$$

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1 \quad : \text{良導体の場合}$$

$$k \approx (1+i) \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}$$

$$\text{Skin depth : } \delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$$

$$k = (1+i) \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}$$

$$Z = \mu \omega \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \cdot \frac{1}{1+i} = \mu \omega \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \cdot \frac{1-i}{2} = (1-i) \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \sigma}}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \sigma}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}} = \frac{1}{\sigma \delta}$$

演習問題0-2: 金属の電気伝導と熱伝導度

加速空洞に於いて重要な物性値は、電気伝導度と熱伝導度である。前者は表面発熱の発生、後者は冷媒によって表面発熱を如何に効率的に除去するかに関係している。

金属の電気伝導度は、金属中の伝導電子の振舞いによって決まる。金属の電気抵抗は、伝導電子とフォノンの散乱、伝導電子と不純物の散乱、伝導電子の格子欠陥での散乱によって決まる。第1項が支配的である。伝導電子間の散乱は、パウリの排他原理、相互のクーロン斥力のために非常に小さく、無視できる。電子・フォノンの散乱確率は、フォノンの数に比例する。フォノンの数は温度(T)に比例する。従って、第1項は温度に比例して増加する。一方、不純物や格子欠陥の量は温度に依存しないので第2、第3項は温度によらない(Matthiessenのルール)。第1項が支配的である。第1, 2項は極低温で残留抵抗 ρ_{res} として現れる。常温での抵抗値と極低温の残留抵抗の比をresidual resistance ratio (RRR)と呼ぶ。

$$\rho_{Total} = \rho_L + \rho_I + \rho_D, \quad \rho_L(T) = \rho_L(0) \cdot T, \quad RRR = \frac{\rho(300K)}{\rho(4.2K)}$$

一方、金属中で熱は伝導電子とフォノンによって運ばれる。しかし、純粋な金属では伝導電子が支配的である。

$$\frac{1}{\lambda_{Total}} = \frac{1}{\lambda(e,p)} + \frac{1}{\lambda(e,impurity)} + \frac{1}{\lambda(e,irregularity)} + \frac{1}{\lambda(p,impurity)} + \frac{1}{\lambda(p,irregularity)}$$

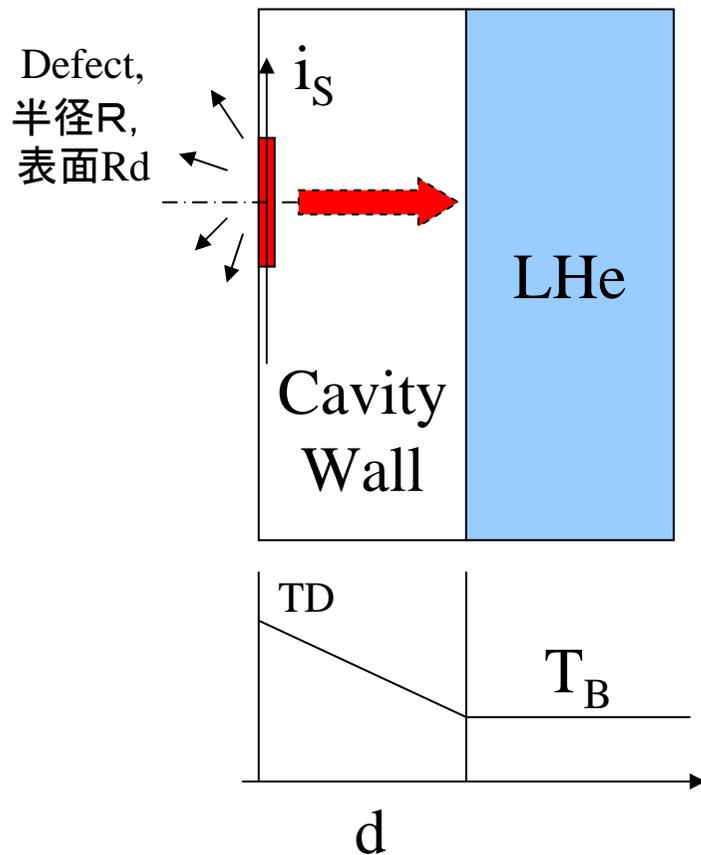
Wiedemann-Franz's則によれば、金属の熱伝導度と電気伝導度の比は温度に比例する。この比例係数は個々の金属によらず定数でローレンツ数と呼ばれる。

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 \cdot T = L \cdot T, \quad L = 2.45 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega / \text{deg}^2$$

Summer Challengeの前に金属の電気抵抗、熱伝導度について勉強しておいて下さい。参考文献:
「C.キッテル著、キッテル固体物理学入門上(第4版)、丸善、p.247-254。

演習問題0-3: 熱的不安定問題の克服

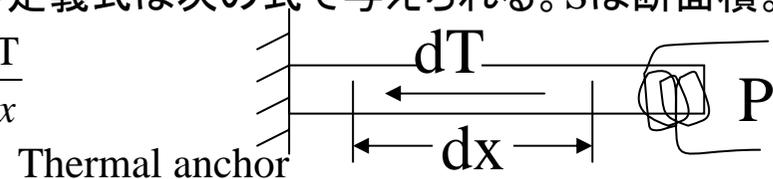
超伝導状態では熱伝導度は非常に小さい。超伝導空洞では、表面抵抗は銅空洞に比べて百万倍小さい。しかし、表面欠陥での発熱が致命的になる。そこでの発熱により回りの温度が超伝導臨界温度以上に上昇して、超伝導状態が破壊される問題(熱的不安定性の問題)がある。この問題を克服するには、極低温での熱伝導率の高いニオブ材の開発が重要である。簡単な一次元モデル(熱は壁の厚み方向のみに伝わるとして)でこのことを定量化しよう。欠陥の大きさは半径R, そこでの表面抵抗をRd、表面電流を i_s としよう。



1) 表面電流 i_s が流れる時、欠陥部での表面発熱(P)は？
(演習問題0-1参照)

一方、熱伝導度の定義式は次の式で与えられる。Sは断面積。

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{P[\text{W}]}{S[\text{m}^2]} = \lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$



2) Pを表面発熱、 dx を空洞の肉厚(d)、 dT を欠陥部表面での温度 T_D と液体ヘリウムの温度 T_B の差として上の熱伝導度の式を書き直し、表面電流と熱伝導度の関係式を求めよ。

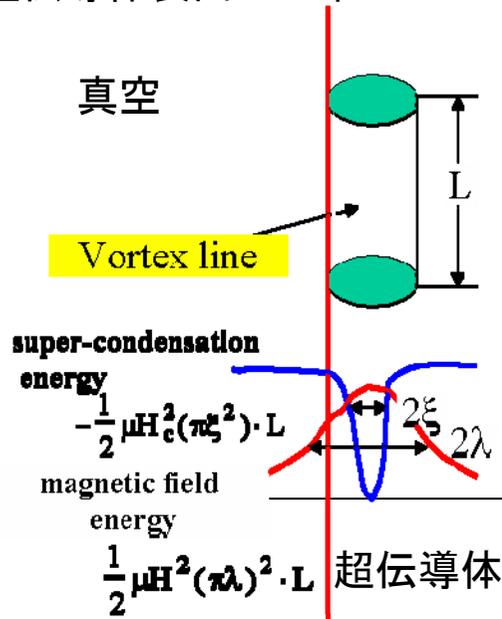
熱伝導率は残留抵抗比RRRに比例する。また、表面電流(i_s)はRF表面磁場(H)に比例する。

3) RF表面磁場と表面欠陥の大きさ、RRRの関係式を導け。

演習問題0-4: 超伝導空洞の理論的最大の加速電界

超伝導空洞は、空洞内に電磁波を蓄積して空洞中心部に発生する強い高周波(RF)電場で荷電粒子を加速する装置である。RFは電場と磁場がサイン関数的に変化する交番場(電磁波)である。空洞内には電場と磁場が存在する。DC理論では、超伝導臨界磁場 H_C で超伝導状態が破壊されることが分かっている。RF応用においても、空洞表面に臨界磁場以上のRF磁場が発生すると超伝導が破壊されて空洞がクエンチすることが予想される。しかし、RF応用における超伝導臨界磁場がどう定式化されるかは未解決の問題である。このRF超伝導臨界磁場を定式化するために一つのモデルを仮定しよう。

超伝導体表面に一本のVortex Lineが形成された時、RFクエンチが起こると考えよう。



Vortexの半径は磁場のskin depth λ 程度である。

超伝導電流はVortex lineの回りを取り囲むようにまとわり付く。

この電流は超伝導のコヒレント長程度を半径とする範囲に広がっている。Vortex lineの長さLの磁場エネルギーと超伝導電流の作る超伝導の凝縮エネルギーが釣り合うところでRFの臨界磁場が決まるとすると

以下のエネルギーバランスが成立つ。RFは実効値を考える必要がある。

$$\frac{1}{2} \mu H_C^2 \cdot \pi \xi^2 \cdot L = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} H_C^{RF} \right)^2 \cdot \pi \lambda^2 \cdot L$$

$$H_C^{RT} = \sqrt{2} \cdot \frac{\xi}{\lambda} H_C = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} H_C$$

λ , ξ , H_C の温度依存性が分かれば、RF超伝導臨界磁場の温度依存性が、求まる。アブリコソフ理論と理論・実験でよく確かめられている温度依存

性を使って、 H_C^{RF} の温度依存性を導け。ただし、 T_C は超伝導の臨界温度である。

$$H_C = \frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{2} \cdot \lambda \xi}, \quad H_{C2} = \frac{\phi_0}{2\pi \cdot \xi^2}, \quad \phi_0 = 2.0678 \cdot 10^{-15} Tm^2, \quad \lambda(T) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (T/T_C)^4}}, \quad H_C(T) = H_C(0) \left[1 - (T/T_C)^2 \right]$$

Abrikosov Theory: Type-II SCの理論

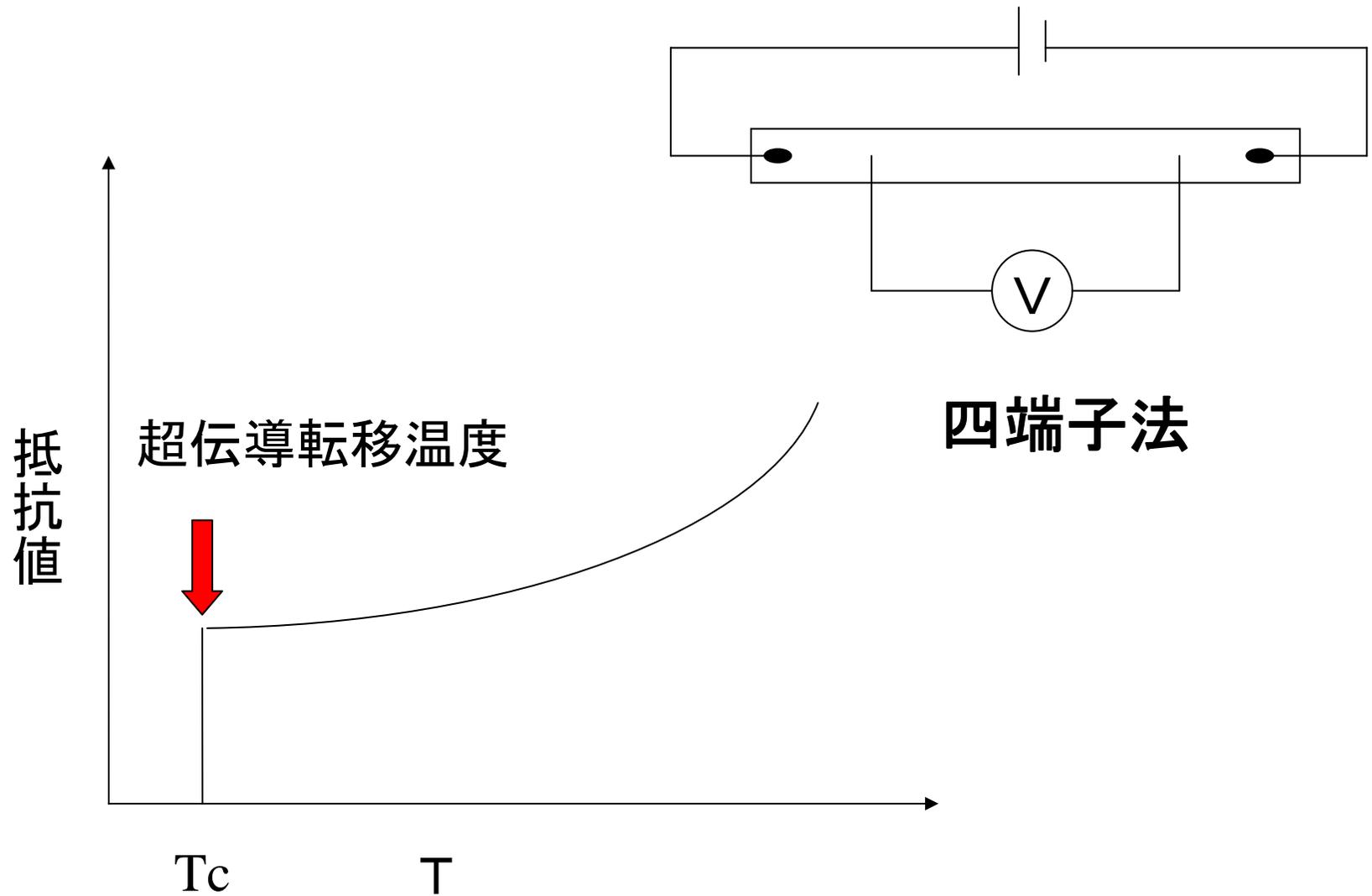
$$H_c = \frac{\kappa}{\lambda^2} \frac{\hbar c}{\sqrt{2}e^*} = \frac{\kappa}{\lambda^2} \frac{(hc/2e)}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{2}\lambda\xi}$$

$$H_{c2} = \sqrt{2} \frac{\lambda}{\xi} \frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{2}\lambda\xi} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2}$$

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi} + 0.08\right)$$

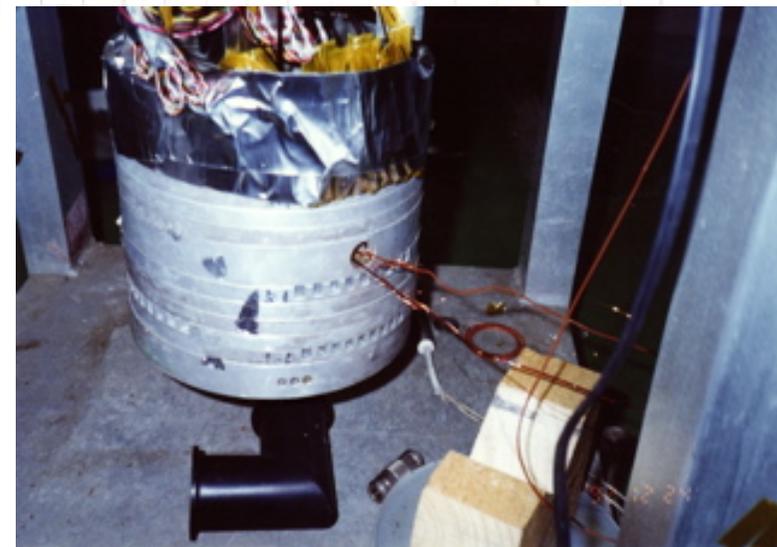
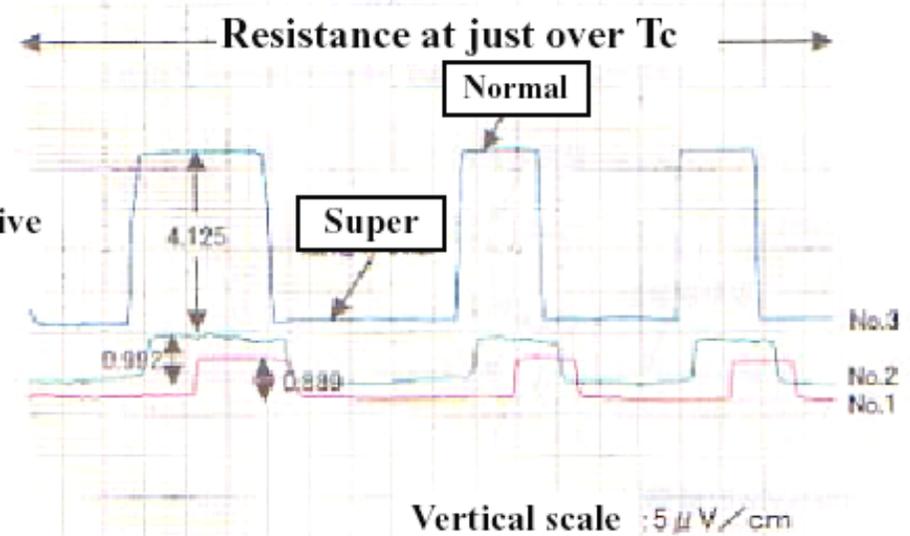
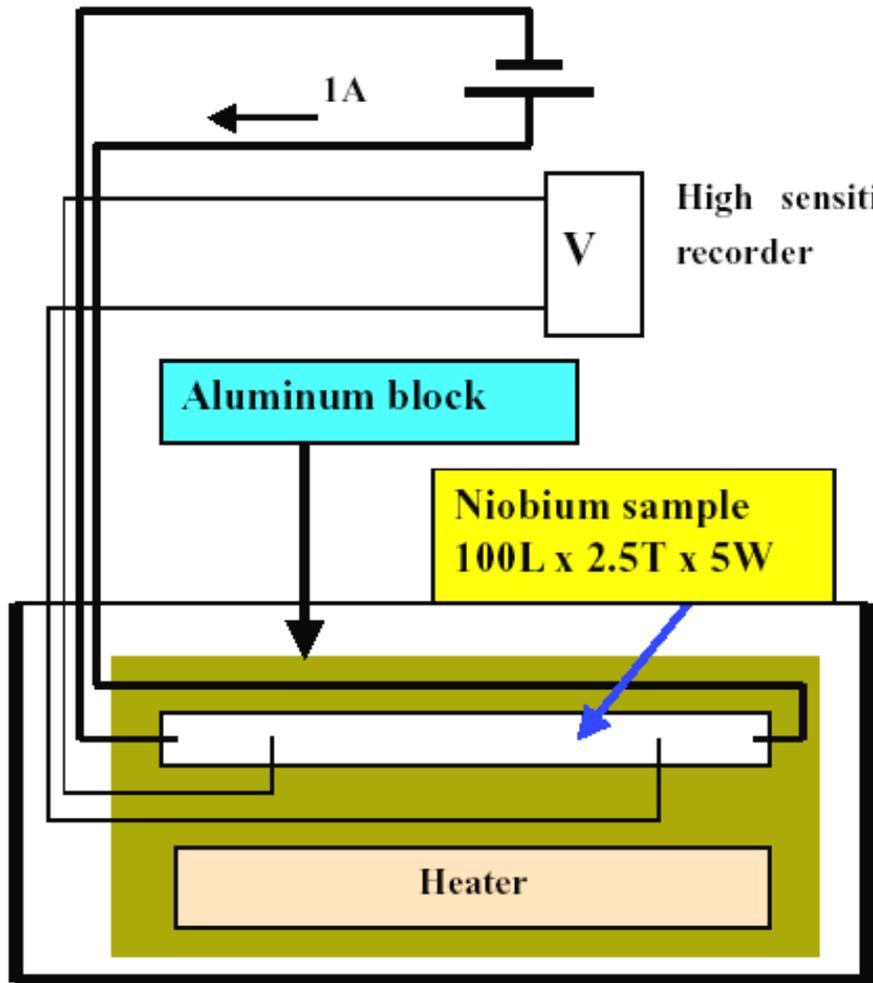
$$\begin{aligned}\phi_0 &= hc/2e = 2.0678 \times 10^{-7} \text{ Gauss} \cdot \text{cm}^2 \\ &= 2.0678 \times 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

超伝導現象1: 遷移温度で零抵抗



RRR の測定

非常に簡単な測定!! 熱伝導率に比例する。



$$RRR \equiv \frac{R_{300K}}{R_{9.5K}}$$

演習問題1(実験で必要)

測定電圧計としてレコダーを使う。その最大感度が $5\mu\text{V}/\text{cm}$ である。ニオブの比抵抗が $17.0\text{E}-6\Omega\text{cm}$ (常温)である。RRRが300のサンプルを計るためにはサンプルの大きさをどう決めればよいか考えよ。手に入るニオブの厚みを 2.5mm とせよ。また、測定で流す電流の大きさを 1A とせよ。

演習問題2 (これはRRRの測定の後の議論で考えて下さい。)

RRRの測定でどうしてニオブ材の純度が評価できるのか？

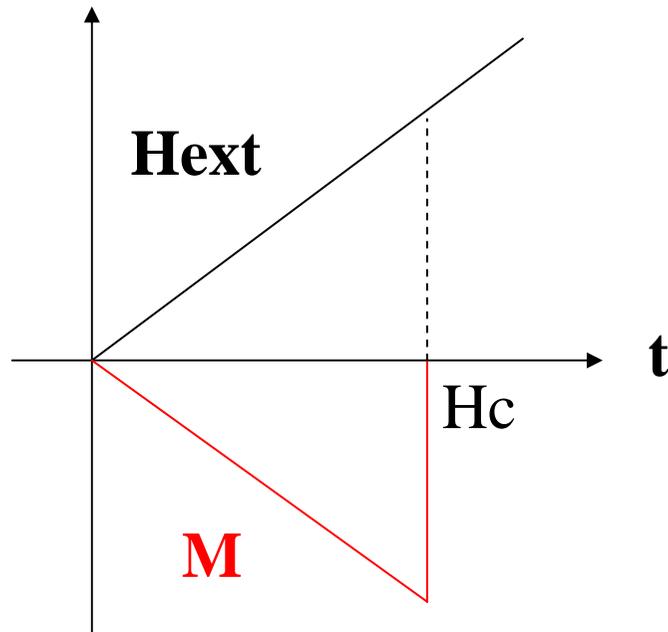
ヒント: 電気抵抗を決めるメカニズムにどんな事があるか考えよ。

演習問題3 (レポート作成のための議論で考えて下さい。)

RRRと熱伝導率の関係を考察せよ。 ヒント: Wiedemann-Franz law

現象2: マイスナー効果

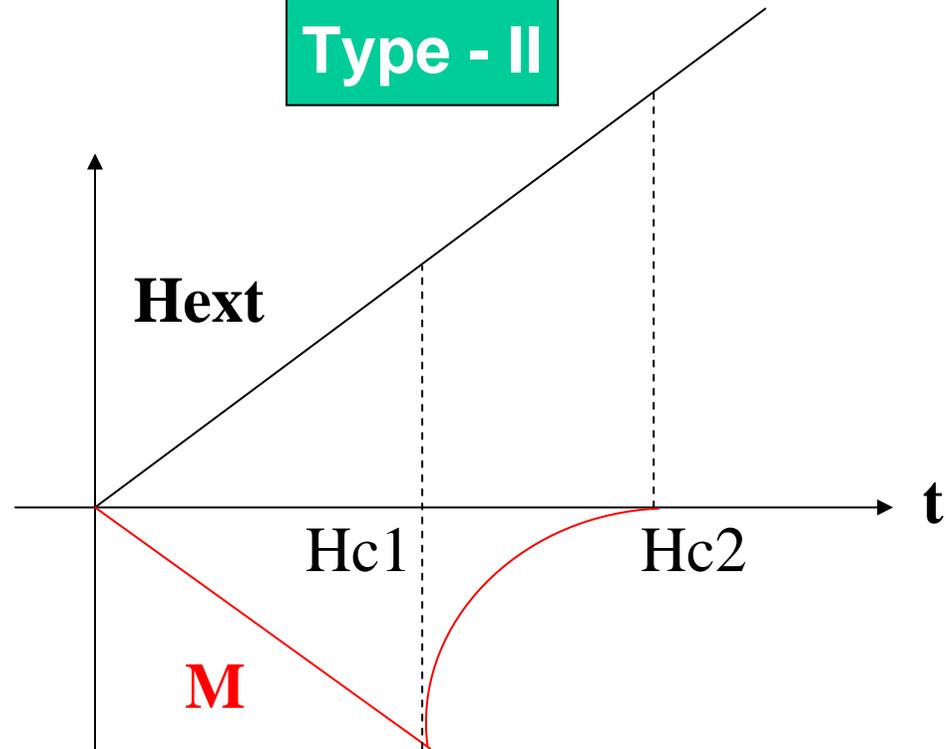
Type - I



完全反磁性 @ $H_{ext} < H_c$
抵抗 = 0

常磁性 @ $H_{ext} > H_c$
常伝導

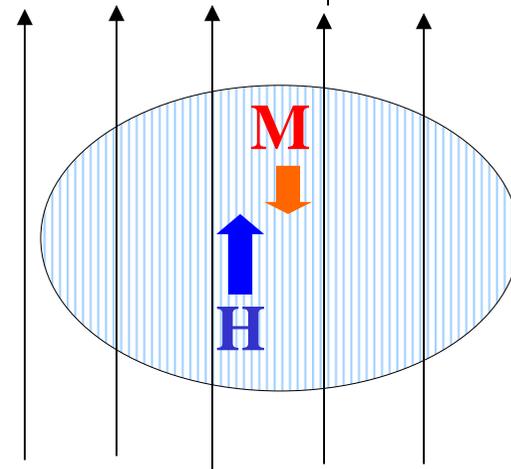
Type - II



完全反磁性 @ $H_{ext} < H_{c1}$
Vortex state @ $H_{c1} < H_{ext} < H_{c2}$
抵抗 = 0

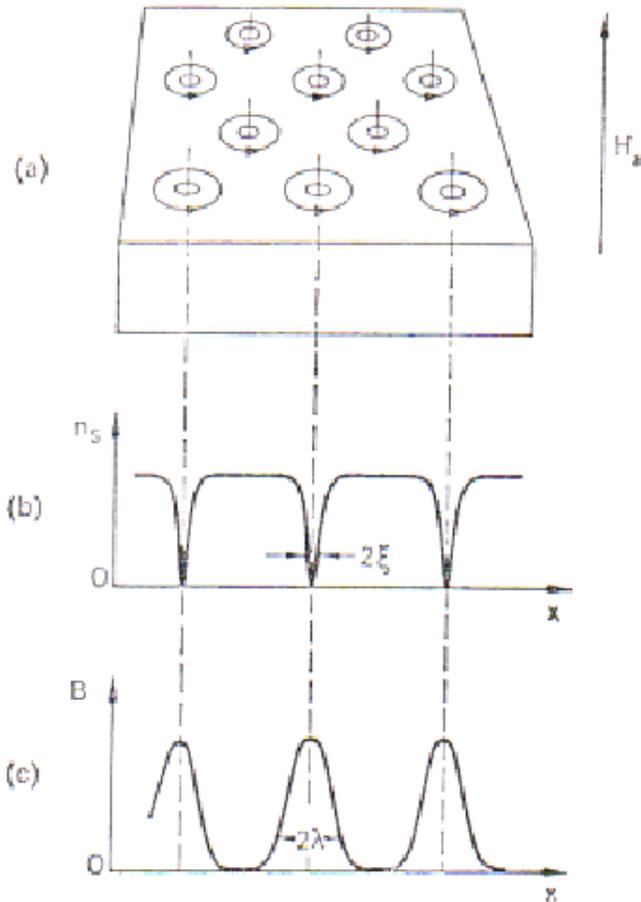
常磁性 @ $H_{ext} > H_{c2}$
常伝導

H_{ext}



$$H = H_{ext} + M$$

Vortex State



Vortex state

ξ : Coherence length
(size of Cooper pair)

λ_L : London penetration depth

Depth of penetration of the magnetic field

鉄粉を付けて観察

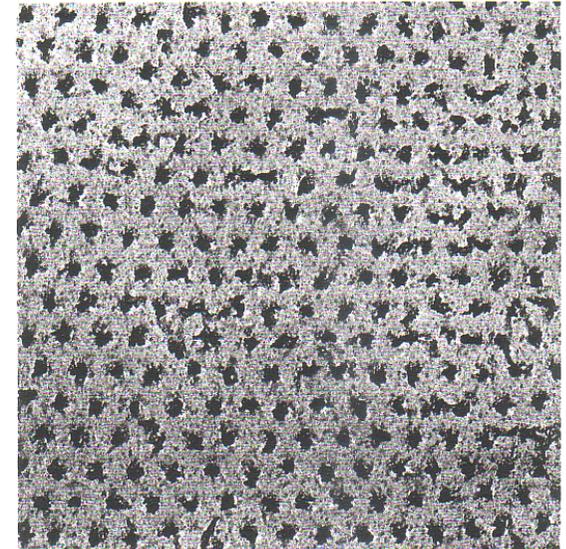
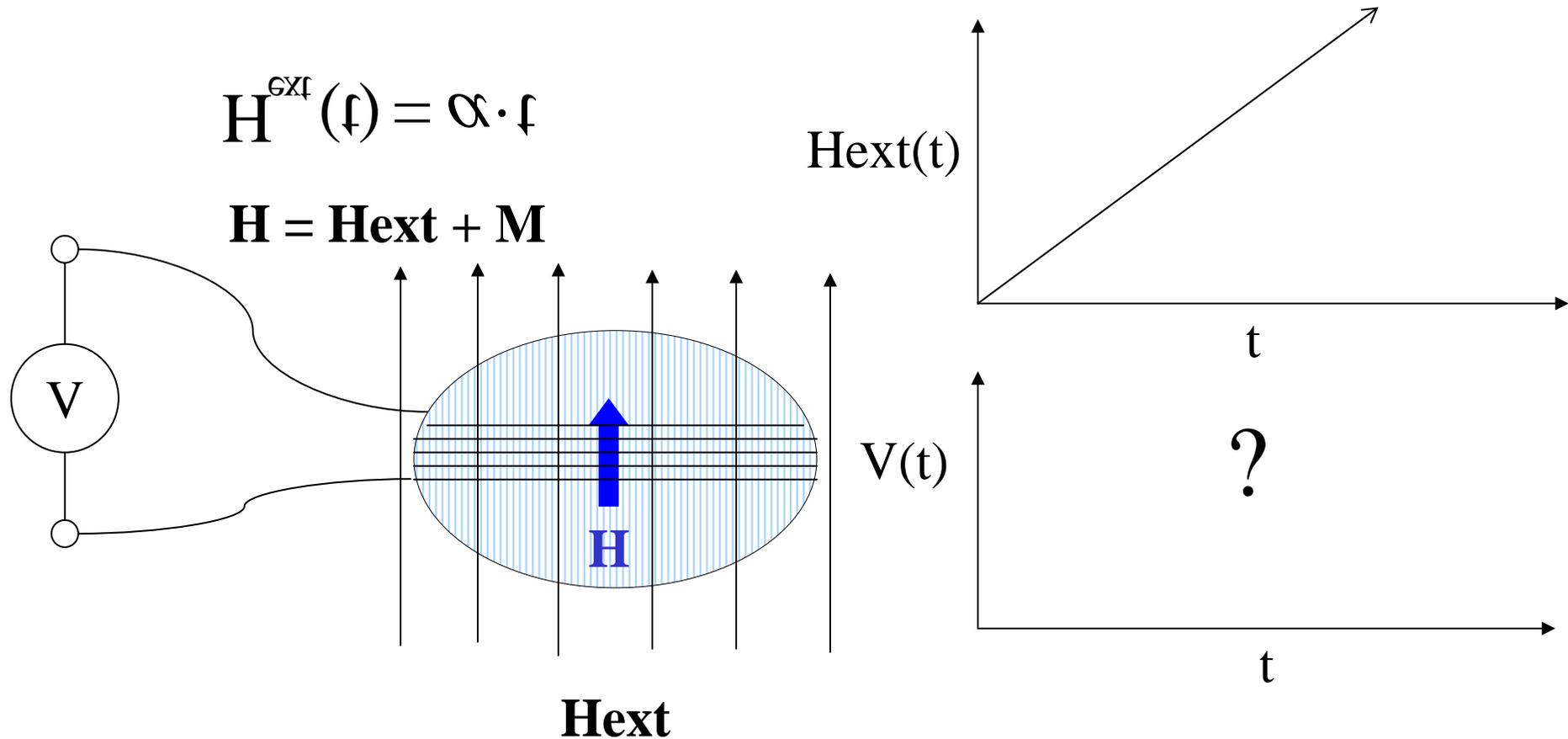


Figure 19 Triangular lattice of fluxoids through top surface of a superconducting cylinder. The points of exit of the flux lines are decorated with fine ferromagnetic particles. The electron microscope image is at a magnification of 8300, by U. Essmann and H. Träuble.

現象を予想する

演習問題4:実験の予備知識

$T < T_c$ で、超伝導体に外部磁場 $H_{ext}(t) = \alpha t$ を印加する。超伝導体に巻いたコイルの両端をレコダーに入力し、電圧を記録するとどのようなシグナル波形が現れるか？
上記の超伝導体の説明を下にType-I、Type-IIの両方の場合について定性的に答えよ。



現象の実体化

演習問題 5:実験の予備知識

演習問題4で予想した現象から実際に超伝導体内の反磁場 $M(t)$ を超伝導体に巻いたコイルの出力電圧 $V(t)$ から求めたい。
 $M(t)$ を $V(t)$ を使って導出せよ。

演習問題 6:実験技術

演習問題5の結果を使って、 $M(t)$ を導出し、 $H_{ext} - M$ 特性曲線を求めたい。起電圧を測定するために使用する電圧計の感度が μV レンジである。常伝導状態になった時の出力(V_o)を $20\mu\text{V}$ 程度と期待する時、ピックアップの巻数を計算せよ。巻数を n とすると起電圧は下の式で与えられる。 S_o はサンプルの断面積でその大きさを $3\text{mm} \times 5\text{mm}$ 、昇磁速度を $65\text{G}/\text{sec}$ とせよ。

$$V_o = - \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t > \infty} = - n \cdot S_o \frac{dB}{dt}$$