

加速器の基礎

・サマーチャレンジの手引き

平成19年8月

高エネルギー加速器研究機構

本講習では、高エネルギー電子加速器の基礎として、加速器にとって重要な要素である。電子銃と高周波空洞について学んでいこうと思います。

電子銃に関してはフォトカソード電子銃を例にとり実習を進めます。フォトカソード電子銃を使った電子ビーム生成の基本的な物理過程は光電効果です。本実習ではフォトカソード電子銃のCsTeフォトカソード作成と、その量子効率測定を行ってもらいます。この測定を通して加速器の根本である電子生成の仕組みを勉強してもらいます。

高周波空洞に関しては、高周波空洞のQ値の測定、R/Qの測定を通して、空洞に高周波が貯まる仕組み、空洞に貯まった高周波によってビームが加速される仕組みを勉強してもらいます。

電子加速器にとって重要な電子ビームの生成、電子ビームの加速の2つの過程を体験することによって、普段聞き慣れない電子加速器について、少しでも身近に感じてくれれば幸いです。

1 フォトカソード実習

目的

この実習ではサンプルのモリブデン表面にセシウムとテルルの合金(Cs-Te)薄膜を実際に加熱蒸着によって形成し、電子源としてのフォトカソードの生成を行う。その際、紫外光を当てて光電効果で放出される電子電流を測定し、量子効率の測定を行う。

準備

Cs-Te の生成の前には、薄膜が形成されるモリブデン表面を洗浄し不純物が少ない状態にしなければならない。また Cs-Te は酸素による性能の劣化が激しく、取り扱いには超高真空の状態で行う必要がある。そのためカソード生成の前には、真空チェンバー内に試料を封入した後、装置のベーキングを行い、十分な時間をかけて排気することになる。ATF では通常 250 度で数日間のベーキングを行い、超高真空を実現する。RF 電子銃でビーム生成に使用するカソードを準備する場合は、さらに 5keV のアルゴンイオンビームを用いて表面をスパッタ洗浄している。

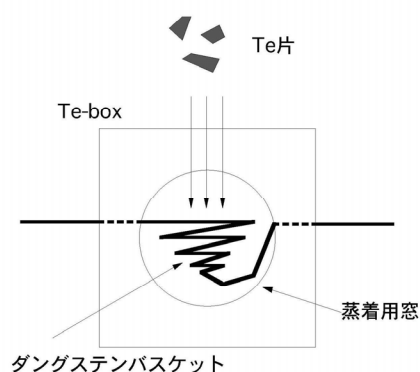
実習では、あらかじめ準備された装置を使用し、真空の立ち上げ、ベーキング及び洗浄は省略する。

Cs-Te カソードの生成

Cs-Te カソードはモリブデンの上に Te を蒸着し、さらにその上に Cs を蒸着することによって生成する。

第一段階：Te の蒸着

Te 小片を数個入れたタングステン製のバスケットに電流を流し、抵抗加熱によって Te を蒸発させる。バスケットは対抗する 2 方向に窓が開いたステンレス製の箱 (Te-box) に納められており、窓の一方はモリブデンに他方は膜厚計に向いている。モリブデンと膜厚計までの距離は等しく、蒸発し飛んできた Te は同じ割合でそれぞれの表面に固着する (蒸着)。従って、膜厚計をモニターし目標とする値になるまで Te 蒸着を行うことができる。生成する膜の厚みは数 nm である。

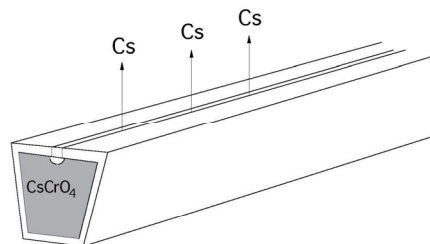


補足：水晶振動子式膜厚測定器

実験で使用する膜厚計は水晶振動子式であり、水晶振動子の固有振動がその質量の変化によって変化することを利用したものである。今回のように水晶振動子の質量に比べ薄膜の質量が十分に小さいと、単に水晶振動子の質量が増加したのと同じことになり、固有振動数の変化を膜厚の変化として測定することができる。

第二段階：Cs の蒸着および量子効率測定

Cs 源として Cs ディスペンサー（サエスゲッター社）を用いる。Cs ディスペンサーは図のような台形断面のニクロム製のスリーブに CsCrO_4 が詰められたワイヤー状のもので、一つの面にスリットが開いている。このスリーブを 4.5A 以上で通電加熱すると、 CsCrO_4 からセシウムが還元され蒸発する。この Cs がスリットを通して飛散してくるのである。



ディスペンサーの構造上、Cs の厚みを膜厚計でモニターすることはできない。蒸着させる Cs の量は Cs-Te 薄膜生成の目標である量子効率そのものの増加を測定しながら判断する。通常は増加が止まるまで蒸着させることが多いが、決まっているわけではない。

量子効率測定

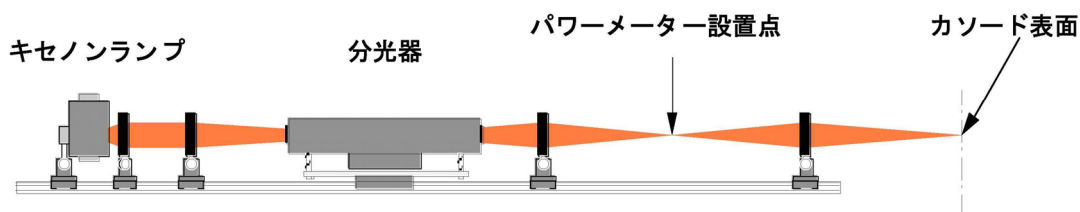
量子効率（Quantum Efficiency）は「カソードへ照射された光子数」に対する「カソードから放出された電子数」の割合で定義される。

$$\text{Q.E.} = \text{放出電子数} / \text{照射光子数} = (I/e) / (PT / (hc/\lambda)) = 1.24 \times (I/\lambda PT)$$

ここで I はカソードから出るフォトカレントの値 (nA)、 P はパワーメーターで測定した光のパワー (μW)、 T はパワーメーターで測定した光量に対し実際にカソード表面に到達できた光量の比、 λ は光の波長 (nm) を表している。

紫外光導入

Cs-Te カソードから電子を放出させるために必要なのは紫外光である。RF 電子銃における電子ビーム生成では紫外光レーザーを使用するが、単に量子効率の測定をするのであればレーザーである必要はなく、キセノンランプ源から放射された広範囲なスペクトルを持った光を分光器によって紫外光を分光すればよい。本実験で使用するキセノンランプは 200~2000nm の広範囲な放射スペクトルがあり、分光器により選択波長に対して $\pm 4\text{nm}$ の幅で分光される。



図にあるように分光された光はレンズによって絞られ、ビューイングポートを通過して真空チェンバー内の Cs-Te カソード表面へと照射される。ビューイングポートは紫外光域に対して高い透過率を示すものを使用している。紫外光の確認は、カード式 UV センサーを用いて目視で

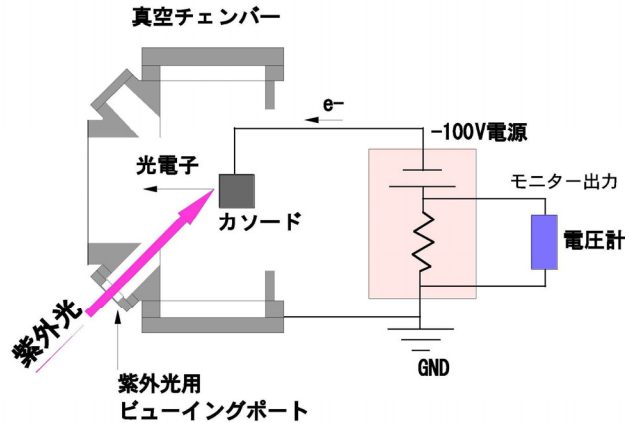
行う。

紫外光のパワー測定は紫外光用ディテクターで行う。本実習で使用するパワーメーターの分解能は 10nW である。

フォトカレントの測定

Cs-Te を蒸着するモリブデンに電源をつなぎ、電氣的にマイナスに浮かせた状態にする。紫外光を Cs-Te カソードに照射すると電子が放出されるが、この電源にはカソードから真空へ放出された分だけ電流が流れる。この電流値を測定する。

実習ではモリブデンを-100V に浮かせる。流れた電流は電源についているモニター端子に 1 μ A で 1 V の比率で出力される。この電圧をデジタルマルチメーターで読みとる。本実習での電流測定の分解能は約 1nA である。



2 高周波空洞実習

2.0 高周波空洞の基礎

粒子加速器では、高周波加速をするために空洞共振器が使われる。空洞 (金属壁で空間を囲ったもの) に外部から高周波電力を供給すると、空洞内に様々な (モードの) 電磁場ができるが、どのような周波数でどのような電磁場ができるかは、空洞の形状で決まる。外部から入力した (高周波の) 周波数が、形状で決まる周波数 (共振周波数) に近づくと空洞内にたまる電磁波のエネルギーが増加し、一致した点で最大となる (この現象を共振という)。実際に粒子を加速するのには、進行方向には磁場がなく電場のみ存在するモード (TM mode, Transverse Magnetic mode) の一つ (TM_{010}) が使われる。

時間的に変化する電場、磁場は、maxwell 方程式と呼ばれる方程式で記述される物理法則に従う。Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (10)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (12)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (13)$$

のように一般的に記述されるが、これを円柱座標で書き下すと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -j\omega\mu H_r \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} = J_r + j\omega\varepsilon E_r \quad (17)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu H_\theta \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\theta + j\omega\varepsilon E_\theta \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -j\omega\mu H_z \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = J_z + j\omega\varepsilon E_z, \quad (21)$$

となる。二つの異なる媒質の境界条件として

$$D_{n2} - D_{n1} = q_s \quad (22)$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (23)$$

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (24)$$

$$H_{t1} - H_{t2} = J_s \quad (25)$$

を用いることにより導体で囲まれた真空、つまり RF 電子銃などの空洞共振器における電磁場および共振周波数、Q 値が求められる。

2.1 円筒空洞の共振

半径 a 、高さ L の円筒空洞内には TM モードと TE モードという二種類の電磁場モードが存在することができる。TM モードは円筒の軸に対して磁場が垂直に立つモード、TE モードは同じく電場が垂直に立つモードである。図 7 に円筒内の代表的な TM モードの概念図を示す。加速に主に使われるのは TM_{010} というモードで電場が軸方向に立ち、磁場はそれを回るように存在する。この軸方向の電場で加速を行なうのである。

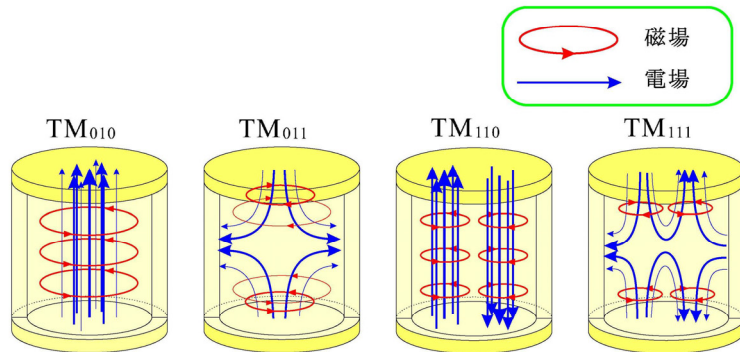


図 7: 円筒空洞内の電磁場の様子

TM_{mnl} モードの共振周波数 f_0 はマクスウェル方程式を解くことにより

$$f_0 = c \sqrt{\left(\frac{l}{2L}\right)^2 + \left(\frac{y_{mn}}{2\pi a}\right)^2}, \quad (26)$$

で与えられる。 TM_{mnl} の m 、 n 、 l はそれぞれ円周の角度方向 θ 、半径方向 r 、軸方向 z のモードを表し、 c は光速 ($3 \times 10^8 [\text{m/s}]$) である。また、 y_{mn} はベッセル関数 $J_m(y_{mn}) = 0$ の第 n 番目の解 (根) である。表 1 に具体的な数値をいくつか示す。また同様に TE_{mnl} モードの共振周波数は

m	n	1	2	3
	0	2.41	5.52	8.65
	1	3.83	7.02	10.17
	2	5.14	8.42	11.62

表 1: $J_m(y_{mn}) = 0$ の解

m	n	1	2	3
	0	3.83	7.02	10.17
	1	1.84	5.33	8.54
	2	3.05	6.71	9.97

表 2: $J'_m(y'_{mn}) = 0$ の解

$$f_0 = c \sqrt{\left(\frac{l}{2L}\right)^2 + \left(\frac{y'_{mn}}{2\pi a}\right)^2}, \quad (27)$$

のように与えられる。 y'_{mn} はベッセル関数の導関数 $J'_m(x)$ の第 n 番目の根である。表 2 にその数値を示す。

次に空洞における共振モードの質をあらわす Q 値について説明する。 Q 値は

$$Q = \frac{\text{空洞内に蓄えられているエネルギー}}{\text{一周あたり空洞壁による消費電力}}, \quad (28)$$

と定義される。つまり Q 値が高いほど共振の消費電力は小さくなり、多数回の振動が可能となり、また非共振状態との電力効率の差が大きくなるため共振のピークは鋭くなる。

Q 値をマクスウェル方程式から導くと TM モードについては

$$Q = \frac{a}{\delta(1 + \varepsilon_l \frac{a}{L})}, \quad (29)$$

となる。 σ は表皮の深さ (skin depth) と呼ばれる量で、導体の中への電磁場の染み込みの深さを示しており

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{2\pi f_0 \mu \sigma}}, \quad (30)$$

のように与えられる。ここで μ と σ は導体の透磁率と伝導率である。空洞の構造材である銅の透磁率は真空の値 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ にほぼ等しく、伝導率は $\sigma = 5.8 \times 10^7 1/\Omega m$ である。 ε_l は

$$\varepsilon_l = \begin{cases} 1 & (l = 0), \\ 2 & (l \neq 0). \end{cases} \quad (31)$$

である。同様に TE モードの Q 値は

$$Q = \frac{\lambda(y'_{mn} - m^2) \left[y'_{mn} + \left(\frac{l\pi a}{L} \right)^2 \right]^{3/2}}{\sigma 2\pi \left[y'_{mn} + 2\pi^2 l^2 y'_{mn}{}^2 \left(\frac{\pi m l a}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{2a}{L} \right) \right]}, \quad (32)$$

と与えられる。ここで λ は電磁波の波長である。

2.2 共振周波数、 Q 値の測定法

測定に用いる空洞共振器の形状を図 8 に示す。この空洞について、まず式 (26) と (27) を用いて共振周波数を計算によって求める。そして実際に共振周波数の測定を行ない、計算結果と比較する。

測定にはネットワークアナライザーと呼ばれる装置を使用する。図 9 は ネットワークアナライザーによる測定の様子を表したものである。ネットワークアナライザーは様々な周波数の信号をポートから測定物に送り、測定物から出てくる信号の強さを測ることにより、入射した周波数に対する測定物の特性を測定するものである。

測定法には反射法と透過法がある。反射法ではポートから出力された信号のうち測定物によって反射された成分を出力と同じポートで測定する。非共振状態では送られた信号のうちほぼ全てが反射されるが、共振状態

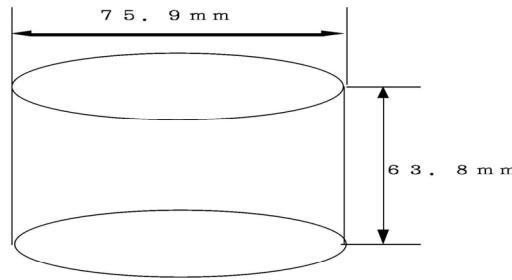


図 8: 測定に用いる円筒型空洞共振器の形状。

では信号の大部分が空洞内に入力されエネルギーとして蓄えられるので、反射は極めて小さくなる。したがって反射法で測定されるスペクトラムでは共振周波数は値が急激に小さくなる谷として観測される。

透過法では入力ポートから空洞に送り込まれた信号のうち、空洞に蓄積され、そして逆側の出力ポートへと通過してきた成分を測定する。非共振状態では信号のほとんどは入力側に反射されるので、出力側へは信号は通過できない。しかし共振状態では信号の多くは空洞内に蓄積され、その一部は出力側ポートへと通過する。従って透過法では共振周波数は出力が急激に上昇する山として観測される。図 10 は透過法の測定結果の例を模式的に表したものである。出力された図の横軸は周波数、縦軸は透過率である。この例では三つの共振周波数が観測されている。

共振周波数は透過法、および反射法のいずれでも測定可能である。しかし Q 値の測定に関しては若干の考慮が必要になる。そのためには空洞共振器の等価回路と外部抵抗について説明しなければならない。

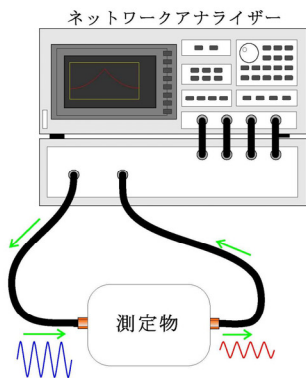


図 9: ネットワークアナライザの原理：高周波信号が測定物に送られ通過（あるいは反射）した信号の強さが装置によって測定される。

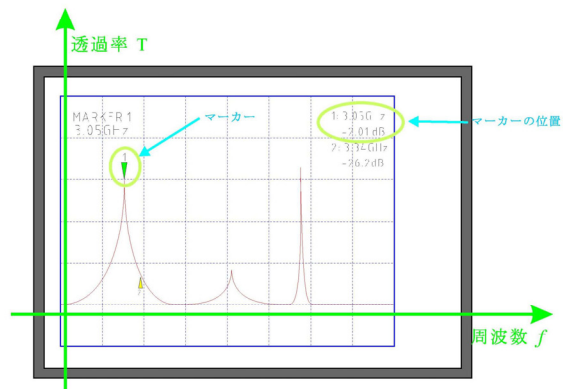


図 10: ネットワークアナライザの出力例：縦軸、横軸はそれぞれ透過率、周波数である。この例では共振周波数が3つみられる。

空洞共振器を等価回路として表すと図 11 のようになる。共振状態とは (空洞の持っている) インダクタンスとキャパシタンスの大きさがちょうど同じになり、打ち消しあうことでインピーダンスが極小になる状態のことである。その状態ではレジスタンスのみがインピーダンスに寄与する。このレジスタンスの値が極めて小さい場合、周波数が共振状態から少しでもずれるとインピーダンスは急激に上昇することになり、測定される共振のピークは非常に鋭くなる。逆にレジスタンスが大きいと共振から多少ずれてもインピーダンスの増加は相対的に大きくないので、測定されるピークは鈍いものとなる。

Q 値を透過法で測定する場合、次のように求めることができる。

$$Q_L = \frac{f_0}{2\Delta f}. \quad (33)$$

ここで f_0 は共振の中心周波数、 Δf は共振の中心周波数において空洞に蓄えられている電力にくらべてそれがちょうど半分となる周波数との周波数差である。つまり $2\Delta f$ は空洞電力が中心周波数における値の半分以上

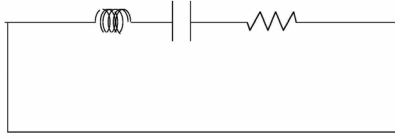


図 11: 等価回路による空洞共振器の表現。
我々が求めたい共振周波数や Q 値などはこの状態のものである。

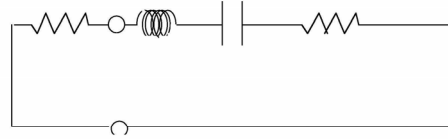


図 12: 空洞共振器が外部回路と接続されているときの等価回路。ネットワークアナライザなどの測定回路が接続されている状態に相当する。

となっている領域の大きさ (半値全幅) に相当する。しかし式 (33) に従って測定した Q 値は空洞共振器の Q ではない。それは励振あるいは測定のため空洞には外部回路 (ここではネットワークアナライザ) が接続されており、等価回路は図 11 ではなく図 12 のように記述すべきだからである。外部回路も含めた系の Q 値を負荷 Q 値 (loaded Q) といい、通常 Q_L とあらわす。式 (33) で求められる Q 値は負荷 Q 値であり、 Q_L としているのはそういった意味である。それに対して空洞共振器のみの Q 値のことを Q_0 という。等価回路を用いると

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}}, \quad (34)$$

という関係を得る。 Q_{ext} は外部回路の Q 値 (external Q) であり、共振器と外部回路の結合定数 β を用いると $Q_{ext} = \beta Q_0$ と求められる。したがって

$$Q_0 = (1 + \beta)Q_L, \quad (35)$$

となり、 Q_L と β の測定から Q_0 が求められる。

Q_L は透過法だけでなく、反射法によっても求めることができる。その場合透過法において透過電力がピークの半値となる場所での電圧反射係数 $|\Gamma_{1/2}|$ を次のように求める。

$$|\Gamma_{1/2}|^2 = \frac{1 + |\Gamma_0|^2}{2}, \quad (36)$$

ここで $|\Gamma_0|$ は共振点 (ピーク) での電圧反射係数で、dB 表示で反射波の大きさが x で与えられる場合、 $|\Gamma_0| = 10^{x/20}$ となる。電圧反射係数が $|\Gamma_{1/2}|$ よりも小さい領域をスペクトラムよりよみとり、その幅を $2\Delta f$ とすると Q_L は式 (33) を用いて透過法と同様に求めることができる。

結合定数 β は反射法の測定から求めることができる。測定に使用する空洞は入出力ポートがふたつあるので、等価回路はより正確には図 13 のようにあたえられる。二つのポートの結合定数を各々 β_1 、 β_2 とする。結合定

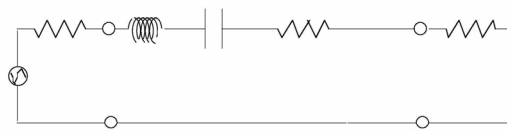


図 13: 空洞共振器が外部から励振され、かつ出力側に回路が接続されている場合の等価回路。励振回路の内部抵抗と出力側の抵抗が加わっており、より現実に近いモデルである。

数 $\beta_{1,2}$ は各々のポートにおける共振周波数での電圧反射係数から測定されるが、片方のポートから空洞を見た場合、実は逆側のポートに接続されている負荷を含めた空洞を見ていることになる。そのように実際に測定される結合定数を $\beta_{01,02}$ と置くと、各々のポートにおいて反射波を測定した場合の電圧反射係数 $|\Gamma_{1,2}|$ により

$$\beta_{01,02} = \begin{cases} \frac{1 - |\Gamma_{1,2}|}{1 + |\Gamma_{1,2}|} & \text{アンダーカップリング} \\ \frac{1 + |\Gamma_{1,2}|}{1 - |\Gamma_{1,2}|} & \text{オーバーカップリング,} \end{cases} \quad (37)$$

と記述される。アンダーカップリングとオーバーカップリングとは結合定数が 1 より大きい場合と小さい場合とで使用する表式が異なる事を意味している。カップリングが 1 より大きい小さいかは反射信号の大きさだ

けではなく位相も測定することにより求められる。そのためにはスミスチャートと呼ばれる方法で反射波を表示すればよい。スミスチャート上で反射波のグラフがカップリング 1 の円よりも内側にある場合はアンダーカップリング、外側にある場合はオーバーカップリングとなる。図 14 にスミスチャートの例を表す。ここではオーバーとアンダーの各々の例が表示されている。

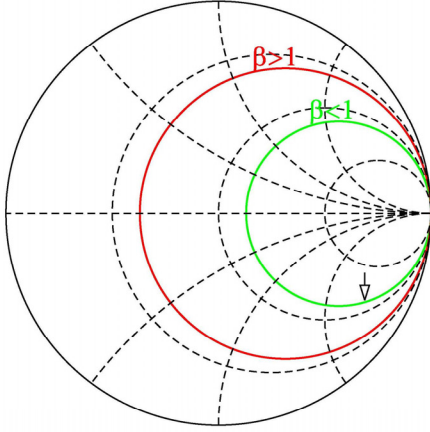


図 14: スミスチャートの模式図。スミスチャートは複素反射係数を極座標表示したもので、任意の結合による信号は右端に接する様々な大きさの円として表される。そのうちチャート中央を通る円が結合が 1 の場合に得られるプロットであり、それよりも小さい場合は結合が 1 より小さい、大きい場合は結合も 1 より大きいことを意味する。図中には結合が 1 より大きい例と小さい例が示されている。

$\beta_{1,2}$ は測定された $\beta_{01,02}$ を用いて

$$\beta_1 = \frac{\beta_{01}(1 + \beta_{02})}{1 - \beta_{01}\beta_{02}}, \quad (38)$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_{02}(1 + \beta_{01})}{1 - \beta_{01}\beta_{02}}, \quad (39)$$

のように求めることができる。最終的に Q_L 、 β_1 、そして β_2 から Q_0 は次のように求められる。

$$Q_0 = (1 + \beta_1 + \beta_2)Q_L. \quad (40)$$

以上の説明を踏まえて、実習は次の順序で行なう。

1. 理論式より空洞の TM モード、TE モードの共振周波数を与えられたベッセル関数の範囲で計算により求める。
2. 透過法、あるいは反射法によって共振周波数 f_0 、共振の半値全幅 $2\Delta f$ を測定する。
3. 反射法によって各々のポートの結合定数 $\beta_{1,2}$ を求め、合わせて Q_0 を求める。
4. 理論計算より求めた共振周波数と測定により得られたものを比較・考察する。
 - 理論とどの程度一致しているのか。一致していないとしたら原因はどのようなものが考えられるか。
 - 理論的に予想された全ての共振モードが観測されているかどうか。観測されていないとしたら原因はどのようなものが考えられるか。

2.3 R/Q の測定

共振空洞の加速性能やビームによる影響などを評価する指標として重要なものに R/Q がある。ここではまず R/Q の意味を明らかにするとともに、その測定法について説明し、実習を行なう。

2.3.1 R/Q の定義

空洞で単位電力を消費しているときに加速電場がどのくらい生じるかを表すのがシャントインピーダンス R で、

$$R = \frac{|\int \vec{E} d\vec{s}|^2}{2P}, \quad (41)$$

と定義される。ここで $\vec{E}$ は加速電場で、ビーム軌道 $\vec{s}$ に沿って積分することで空洞のあたえる総加速電圧を与える。 P は空洞における消費電力である。また既に式 (28) で定義されている Q 値は

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P}, \quad (42)$$

のように消費電力 P と空洞内の蓄積エネルギー W を用いて記述することができる。シャントインピーダンス R と Q 値の比を式 (41) と (42) より計算すると

$$\frac{R}{Q} = \frac{|\int \vec{E} d\vec{s}|^2}{2P} \frac{P}{\omega_0 W} = \frac{|\int \vec{E} d\vec{s}|^2}{2\omega_0 W}, \quad (43)$$

となる。

この R/Q は空洞を評価するさいに重要な指標となる。それは次のような性質による。

- R/Q は空洞の場合にのみ依存する指標である。つまり空洞の材質や表面状態に依存せず空洞の形状にのみ依存するので、空洞の形状を評価するのに有効である。
- 空洞に生じる加速電場の多少を表面や材質などの複雑な因子を含めずに評価できる。
- ビームが空洞中を通過したときに生じる誘起電磁場は R/Q に比例するため、ビームローディング (ビームが通過することによって加速電場が減少する現象) やウェーク場 (ビームが通過することで誘起される電磁場) の大きさを R/Q によって評価することができる。

2.3.2 R/Q の測定

R/Q を求めるということは空洞内の電磁場の分布を求めるということにほかならない。空洞内の電磁場の分布は電磁場に微小な摂動を与えた時の共振周波数の変化の大きさから求める事ができる。微小な摂動として空洞内に小さい導体球 (ビーズ) を挿入することから、この方法をビーズ摂動法と言う。

空洞内に体積 ΔV の微小な物体が挿入された時の共振周波数 ω は

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 + \frac{\int_{\Delta V} (\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon |\vec{E}|^2) dV}{\int_V (\mu |\vec{H}|^2 + \varepsilon |\vec{E}|^2) dV} \right], \quad (44)$$

となる。ここで ω_0 は非摂動の共振周波数、 $\vec{H}$ と $\vec{E}$ は磁場と電場、 μ と ε は透磁率と誘電率である。分母の積分は摂動がある場所で体積 ΔV について行なうことを意味している。式 (44) の分母は空洞内に蓄えられているエネルギーの二倍に等しいのでこれを $2W$ とすると

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\int_{\Delta V} (\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon |\vec{E}|^2) dV}{2W}, \quad (45)$$

となる。さらに周波数変化は小さいとして $\Delta\omega/\omega_0 \equiv (\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ について二次の項を無視すると

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\int_{\Delta V} (\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon |\vec{E}|^2) dV}{4W}, \quad (46)$$

となる。ここで角周波数に代わり周波数 $f_0 = \omega_0/2\pi$, $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ を導入した。

加速に用いる TM_{010} モードは空洞中心で電場成分しかもたず、磁場はゼロとなる。さらにビーズ近傍で電場が一定とする近似を行なうと式 (46) は

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\varepsilon |\vec{E}|^2 \Delta V}{4W}, \quad (47)$$

となる。これを式 (43) に代入することにより

$$\frac{R}{Q} = \frac{|\int \sqrt{|\Delta f|} dz|^2}{\pi f_0 \varepsilon \Delta V}, \quad (48)$$

を得る。すなわち振動による周波数変化の二乗根を求める経路について積分することにより R/Q を求めることができる。

実際の測定は図 15 に示されているような装置を用いて行なう。ビーズは空洞中心を通過して駆動装置へと繋がれている細いナイロンワイヤーに装着されており、空洞中心を駆動装置の動きにしたがって移動している。共振周波数はネットワークアナライザーによって常にモニターされている。駆動装置によりビー

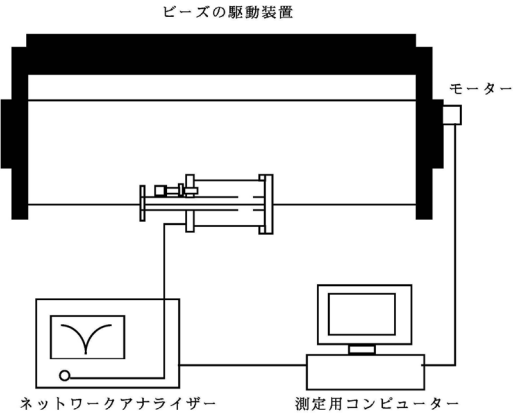


図 15: ビーズ振動法の測定原理。

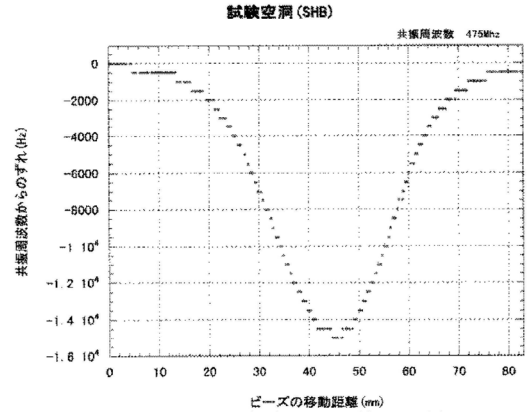


図 16: ビーズ測定法による結果の例。

ズを一定の間隔で移動させながら、測定用コンピューターによってその時のビーズの位置と共振周波数を記録していく。そのようにして得られた測定結果の例が図 (16) に示されている。横軸にビーズの移動量、縦軸にそのときの共振周波数が示されている。