

第2回 KEK サマーチャレンジ
実習課題 11 「中性子減速」

1 はじめに

我々が住む環境では電場が至る所にあるために、それらの影響を取り除くことが極めて困難です。しかし、中性子は電荷が無いために、電場の影響をほとんど受けません。中性子が地上の実験環境で感じる相互作用の大きさは、強い相互作用、電磁相互作用、重力相互作用を通じて、ほぼ同じ程度になります(ただし、重力相互作用は中性子と地球との重力相互作用を考えます)。これを利用すると、微弱な相互作用を性格に測定することが可能になります。図 1 にその概要を示しておきます。

微弱な相互作用を探るには、中性子の速度が遅い方が有利になります。さて、中性子は原子核の外では不安定で約 15 分の平均寿命で崩壊しますので、原子核反応によって原子核から中性子を取り出して利用します。この演習では、 ^{252}Cf の自発核分裂反応によって発生する中性子を利用します。この中性子の運動エネルギーは 1.4×10^6 eV 程度、速度にして光速の約 5% 程度、秒速約 16000 km です。演習では、この中性子を秒速数 km 程度まで減速し、原子核との相互作用の実測を試みます。

この演習では主として強い相互作用による中性子の散乱を観察しますが、その他に我々が未だ知ることのできない微弱な相互作用を探る方法について、考えてみて下さい。例えば、中性子は原子のすぐそばまで電気相互作用の邪魔を受けることなく近づくことができます。うまくすれば素粒子レベルでの重力相互作用を詳しく調べることができるかもしれません。

2 基礎知識

この節では、基礎知識をまとめておく。

特殊相対性理論によって、全エネルギー E と運動量 p の間には

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \quad (1)$$

という関係が成立する。 m は静止質量と呼ばれる。 c は真空中の光速で、 $c = 2.99792458 \times 10^8$ m s $^{-1}$ である。運動エネルギー T は、全エネルギー E から mc^2 を引

ばよい。

$$T = mc^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{pc}{mc^2} \right)^2} - 1 \right) = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots \quad (2)$$

この第 2 項目以降が無視できる場合は非相対論的であると表現される。今回の演習の対象となる中性子は、非相対論的である。そこでこれ以降運動エネルギーは

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad (3)$$

として扱う。

中性子は陽子とともに原子核を構成する粒子である。中性子の持つ性質は

質量	$(939.56536 \pm 0.00008) \text{ MeV } c^2$
電荷	$(-0.4 \pm 1.1) \times 10^{-21} e$
スピン	1/2
平均寿命	$885.7 \pm 0.8 \text{ s}$

ただし、MeV は 10^6 eV を表す。eV はエネルギーの単位で、素電荷が 1V の電位差で加速された時に得る運動エネルギーの増分で定義される。その値は $1 \text{ eV} = e \text{ J}$ である。 e は素電荷で、 $e = 1.60217653(14) \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

運動量の大きさが p であるとき、対応するド・ブロイ波長 λ は

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (4)$$

である。ただし h はプランク定数で、 $h = 6.6260693(11) \times 10^{-34} \text{ J s}$ であり、 $\hbar = h/(2\pi)$ が良く使われる。

また、覚えておくと便利な定数及び関係式として、次のようなものがある。

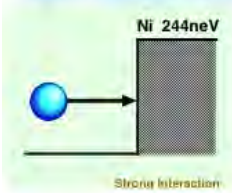
$$\hbar c = 197.326968(17) \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.03599911(46)} \quad (6)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-1} \quad (7)$$

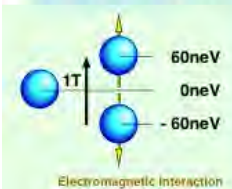
$$\epsilon_0\mu_0c^2 = 1 \quad (8)$$

強い相互作用



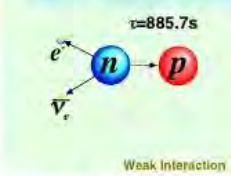
中性子は物質中の原子核と強い相互作用を通じて相互作用します。強い相互作用は最も強力な相互作用ですが、原子核のごく近傍でしか働かないため、原子体積で平均すると他の相互作用と同程度になっていまいす。

電磁相互作用



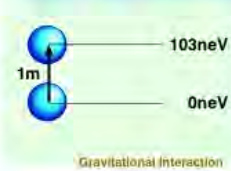
中性子は電荷を持っていないので、電気的な相互作用をしますが、磁気双極子能率を持っているので磁場と相互作用します。物質の性質を支配している電気相互作用の影響を受けないため、極めて物質透過力に優れます。

弱い相互作用



中性子は陽子とともに原子核を構成しており、原子核内では安定に存在しますが、原子核外では弱い相互作用を通じて平均寿命15分で陽子、電子、反電子型ニュートリノに崩壊します。

重力相互作用



重力相互作用は大変に弱い相互作用であり、通常はそれ以外の相互作用の影響に隠されてしまいます。しかし、速度の遅い中性子では地球からの重力の影響が顕著であり、落下しながら飛行する様子が観測されます。

Fig. 1. 中性子が受ける相互作用。

α は微細構造定数、 μ_0 は真空の透磁率で、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

中性子の運動学的諸量の間関係をまとめておく。中性子の速度が v 、運動エネルギーが T 、波長が λ 、波数が k である。波長の単位は \AA が習慣上良く使われる。最近は nm が使われることも増えて来たが、研究者間の会話では依然として \AA が用いられることがほとんどであるため、今回は \AA を使うことにする。なお、 $1\text{\AA} = 10^{-10} \text{m}$ である。

$$\frac{T}{1\text{eV}} = 5.2270387(15) \times 10^{-9} \left(\frac{v}{1\text{m/s}} \right)^2 \quad (9)$$

$$\frac{T}{1\text{eV}} = 8.1804250(55) \times 10^{-2} \left(\frac{1\text{\AA}}{\lambda} \right)^2 \quad (10)$$

$$\frac{v}{1\text{m/s}} = 1.38315911(20) \times 10^4 \sqrt{\frac{T}{1\text{eV}}} \quad (11)$$

$$\frac{v}{1\text{m/s}} = 3.9560346(17) \times 10^3 \frac{1\text{\AA}}{\lambda} \quad (12)$$

$$\frac{\lambda}{1\text{\AA}} = 2.86014423(96) \times 10^{-1} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{T}} \quad (13)$$

$$\frac{\lambda}{1\text{\AA}} = 3.9560346(17) \times 10^3 \frac{1\text{m/s}}{v} \quad (14)$$

なお、熱中性子を $v = 2200 \text{ m s}^{-1}$ で定義した場合、 $T = 25.30\text{meV}$ 、 $\lambda = 1.798\text{\AA}$ である。

3 運動学

ある粒子が別のある粒子に衝突し、図 3 のように散乱あるいは反応を起こす場合を考え

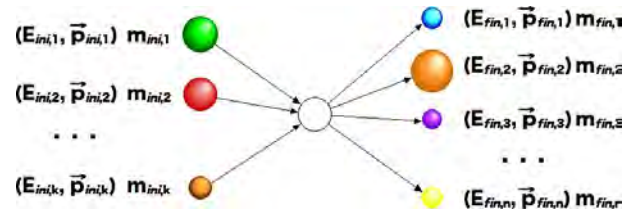


Fig. 3. 反応

る。その反応がいかなるものであろうとも、エネルギーと運動量の保存は仮定する。

$$\sum_{i=1}^k E_{ini,i} = \sum_{i=1}^n E_{fin,i}$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{p}_{ini,i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{fin,i} \quad (16)$$

ここで

$$Q = \sum_{i=1}^n m_{fin,i} - \sum_{i=1}^k m_{ini,i} \quad (17)$$

とおくと、

$$\sum_{i=1}^k T_{ini,i} = \sum_{i=1}^n T_{fin,i} + Q \quad (18)$$

が成立する。この Q は反応熱であり、反応の Q 値と呼ばれる¹。ここまでは相対論的な場合でも非相対論的な場合でも全く同様である。

さて、式 16 に加えて、運動エネルギーと運動量の間には

$$T_{ini,i} = \frac{|\mathbf{p}_{ini,i}|^2}{2m_{ini,i}}$$

¹ 会話では、「キューバリュウ」と発音されることが多い

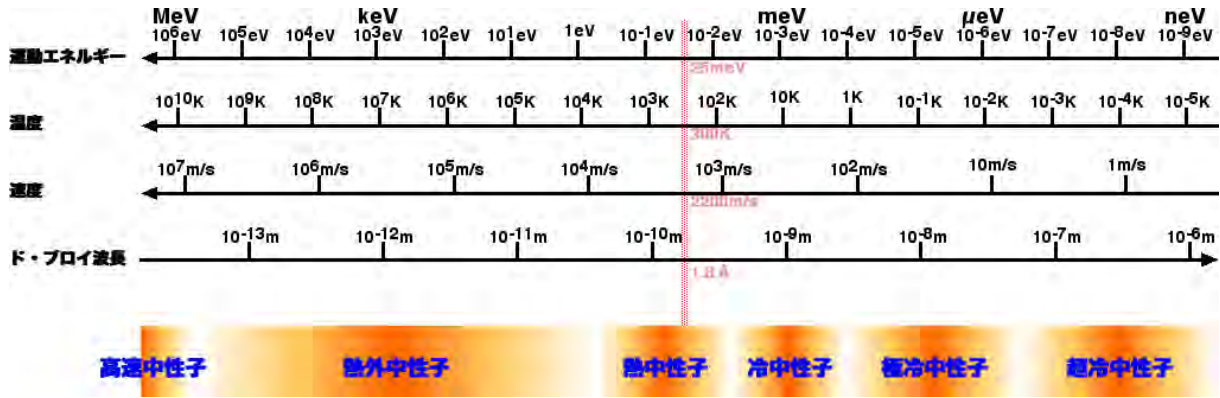


Fig. 2. 中性子の運動に関わる諸量の関係図

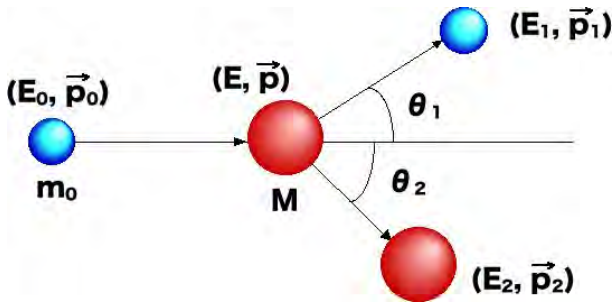


Fig. 4. 二体散乱

$$T_{\text{fin},i} = \frac{|\mathbf{p}_{\text{fin},i}|^2}{2m_{\text{fin},i}} \quad (19)$$

という関係が成立する。この関係は非相対論的な場合についてのみ成立する²。式 16 と式 19 を同時に満たすように運動エネルギーと運動量を求めることを運動学を解くと表現する³。

3.1 二粒子系の運動学

中性子の減速の初期過程においては、図 4 のように粒子の種類が変わらず終状態が二つの粒子である場合のみが重要である。始状態と終状態に含まれる粒子数およびその種類に変化が無い場合、反応の Q 値は $Q = 0$ である。入射する粒子は入射粒子⁴、衝突される側の粒子は標的粒子あるいは標的核⁵と呼ばれる。入射粒子は衝突の結果はじかれるが、これは散乱粒子⁶とよばれ、はじかれた標的粒子は

²相対論的な場合には $E_{\text{ini},i}^2 - |\mathbf{p}_{\text{ini},i}|^2 = m_{\text{ini},i}^2$ 、および $E_{\text{fin},i}^2 - |\mathbf{p}_{\text{fin},i}|^2 = m_{\text{fin},i}^2$ が成立する。

³会話では、「カイネマを解く」と表現することが多い

⁴会話ではインシデント (incident particle) と発音されることがあまあある

⁵会話ではターゲット (target) と発音されるのが普通である

⁶会話では、たまにスカッター (scattered particle) と発音されることもある

反跳粒子あるいは反跳核⁷と呼ばれる。中性子減速においては、入射粒子、散乱粒子ともに中性子であり、減速体に含まれる原子核が標的粒子及び反跳粒子である。

標的粒子は静止しているものとする。この場合には、エネルギーと運動量の保存は、

$$\begin{aligned} T_0 &= T_1 + T_2 \\ \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで $\gamma = m_2/m_1$ と置くと、

$$(1 + \gamma)p_1^2 - 2p_0p_1 \cos \theta_1 - (\gamma - 1)p_0^2 = 0 \quad (21)$$

となるので、

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1 + \gamma} \left(\cos \theta_1 + \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta_1} \right) \quad (22)$$

と解ける。 $\gamma < 1$ の場合には $\theta_1 \geq \theta_{1,\text{max}}$ をみたす角度範囲にのみ解が存在する。 $\theta_{1,\text{max}}$ は

$$\theta_{1,\text{max}} = \cos^{-1}(1 - \gamma^2) \quad (23)$$

で与えられる。また $\gamma = 1$ の時には $\theta_1 \geq \pi/2$ であり、

$$\frac{p_1}{p_0} = \cos \theta_1 \quad (24)$$

である。

3.2 重心系

二つの粒子が互いに相互作用する様子を記述する上では、両者の相対的な運動が問題なのであって、全体の運動量は重要ではない。入射粒子の位置を \mathbf{r}_0 、標的核の位置を $\mathbf{r}_{\text{target}}$ とすると、重心の位置は

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_0\mathbf{r}_0 + M\mathbf{r}_{\text{target}}}{m_0 + M} \quad (25)$$

⁷会話では、リコイル (recoil) と発音されることがあまあある

である。 $v_0 = dr_0/dt$ と書くことにすると、標的核は静止しているとするので、重心の速度は

$$v_G = \frac{m_0}{m_0 + M} v_0 \quad (26)$$

である。位置からの相対的な位置を記述する座標系、すなわち r_G を原点とする座標系を重心系 (center of mass) と言う。重心系での運動量は

$$\begin{aligned} p_{0,CM} &= m_0(v_0 - v_G) \\ &= m v_0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$p_{\text{target},CM} = -m v_0 \quad (28)$$

と求められる。ただし、

$$m = \frac{m_0 M}{m_0 + M} \quad (29)$$

と置いた。式 29 で定義される質量を換算質量 (reduced mass) と呼ぶ。当然ながら

$$p_{0,CM} + p_{\text{target},CM} = 0 \quad (30)$$

である。重心系とは全運動量が 0 に等しい座標系と定義してもよい。

重心の運動エネルギーを

$$T_{CM} = \frac{1}{2}(m_0 + M)v_G^2 \quad (31)$$

と定義し、初期状態の全運動エネルギーから重心系の運動エネルギーを差し引いたものを求めると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_0 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_0 + M)v_G^2 &= \frac{m}{2}v_0^2 \\ &= \frac{p_{0,CM}^2}{2m} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。

式 28 と式 32 を見ると、二粒子の相対運動は質量が m の粒子が正面衝突していて、その際の運動エネルギーの総量が

$$T_{CM} = \frac{p_{0,CM}^2}{2m} \quad (33)$$

で与えられると考えて良い。

重心系に対して、標的核が静止しているとした座標系を実験室系と呼ぶ⁸

⁸これは通常の原子核実験では、エネルギーの高い放射線を静止した物質に照射することが一般的な方法だったためにそう呼ばれている。しかし、衝突型加速器のように、同じ粒子を同じエネルギーで正面衝突させるような実験の場合には、重心系と実験室系はほとんど同じである。また物質内の原子の熱運動と同程度まで減速された中性子を照射するような場合には、標的核が静止しているという仮定が成立しない場合もある。

4 断面積

一般に核反応



を考えると、この遷移を引き起こす相互作用を U とおくと、単位時間あたりに状態 $|a + A\rangle$ からある状態 $|b + B\rangle$ へ遷移する確率 w は、第二黄金律より

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle b + B | U | a + A \rangle|^2 \frac{dn_b}{dT_b} \quad (35)$$

で与えられる。ここで、相互作用が起こる空間の体積を V とおくと、状態密度は

$$dn_b = \frac{4\pi p_b^2 dp_b V \alpha}{(2\pi\hbar)^3} \quad (36)$$

であり、

$$dT_b = v_b dp_b \quad (37)$$

なので、

$$\frac{dn_b}{dT_b} = \frac{4\pi p_b^2 V \alpha}{(2\pi\hbar)^3 v_b} \quad (38)$$

である。ただし、 α はスピンなどによる終状態の多重度である。結果として

$$w = \frac{1}{\pi\hbar^4} \frac{p_b^2}{v_b} V \alpha |\langle b + B | U | a + A \rangle|^2 \quad (39)$$

を得る。一方で a の数密度を n_a 、重心系における速度を v_a とする時、断面積は

$$\sigma(a + A \rightarrow b + B) = \frac{w}{n_a v_a} \quad (40)$$

によって定義される。 n_a を V 中に 1 個とする

$$\sigma(a + A \rightarrow b + B) = \frac{wV}{v_a} \quad (41)$$

である。すると

$$\sigma(a + A \rightarrow b + B) = \frac{1}{\pi\hbar^4} \frac{p_b^2}{v_a v_b} |V \langle b + B | U | a + A \rangle|^2 \alpha \quad (42)$$

ここで、入射粒子が中性子で、運動エネルギーが核反応のエネルギーに比べて十分に小さいときには、 $|V \langle b + B | U | a + A \rangle|^2$ はほぼ定数である。

- 中性子が弾性散乱を受ける時、すなわち $v_a = v_b$ の時には、断面積 $\sigma(a + A \rightarrow b + B)$ は定数である。

- 中性子が吸収されて γ 線を発生する時には、 γ 線のエネルギーは入射中性子のエネルギーに比べて十分高いので、 p_b は中性子のエネルギーにはほぼ無関係である。したがって断面積 $\sigma(a + A \rightarrow b + B)$ は v_a に反比例する。

- 中性子が吸収されて荷電粒子を放出する時も、その粒子のエネルギーは入射中性子のエネルギーに比べて十分高いので、 p_b は中性子のエネルギーにはほぼ無関係である。また、荷電粒子はクーロン障壁を超えて放出されるのだが、 p_b が定数と見なせる状態にあるのだから、その障壁透過係数もやはり中性子のエネルギーにはほぼ無関係である。したがって断面積 $\sigma(a + A \rightarrow b + B)$ は v_a に反比例する。

これから分かる通り、低速中性子に関しては、散乱断面積は中性子のエネルギーに依存しない。また、吸収断面積は中性子の速度に反比例する。これは $1/v$ 則と呼ばれる。

5 散乱

ここでは、散乱断面積についてもう少し説明を行う。今回の演習において用いる低速中性子に限って話を進める。古典的に考えると、原点周りの角運動量は $mv d$ で与えられる。これが \hbar に等しい、すなわち $l = 1$ であるとすると、

$$d = \frac{\hbar}{mv} = \lambda \quad (43)$$

が満たされなければならない。今我々が考えている領域では、実際には λ は $10^{-9} - 10^{-10}$ m 程度なので、この条件を満たすには中性子の波長が長すぎる、すなわちエネルギーが低すぎる。よって、 $l = 0$ の場合だけ考えれば十分である。図 7 を見れば、量子力学的な解においても、 $Kr \ll 1$ では $l = 0$ のみが支配的であることが分かる。軌道角運動量 l が 0 の部分波は s 波と呼ばれる。

散乱状態を表す波動関数 ψ は $r \rightarrow \infty$ で

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right) \quad (44)$$

という漸近形を持つ。1 項目が入射平面波を表し、2 項目が散乱の中心から広がっていく球面波を表す。 $f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれ一般には角度依存性を持つが、 $l = 0$ の場合には角度依存性を持たない。

$$f(\theta) \simeq -a \quad (45)$$

とおいた時の a は散乱長と呼ばれる。

中心から r の位置にある微小面積 $r^2 d\Omega$ に到達する確率 dP は、散乱された流速 j を用いて

$$dP = \left(\mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) r^2 d\Omega \quad (46)$$

と表すことができる。散乱された流速 j は

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (47)$$

と定義されるので、

$$dP = v |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (48)$$

である。入射波の流速 v で割ることによって、一つの原子核によって散乱される割合は単位立体角あたり

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = a_r^2 \quad (49)$$

と書ける。これを散乱微分断面積と呼び、全方向について積分した量

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi a^2 \quad (50)$$

は散乱断面積と呼ばれる。

原子核が一様に分布している中を z 方向に N 個の中性子が進んでいるとする。中性子は、その原子核と相互作用して、散乱されたり吸収されたりする。中性子が厚み dz だけ進む間に、 dN だけ中性子が散乱される場合を考える。 dN は、中性子数 N 、厚み dz 、物質中の原子核数密度 n に比例するはずなので、

$$dN = -N n \sigma_s dz \quad (51)$$

と書ける。

式 51 は、最初の中性子数を N_0 とおくと

$$N = N_0 e^{-n\sigma_s z} \quad (52)$$

となる。

中性子が厚み dz だけ進む間に、 dN だけ中性子が吸収される場合も同様に

$$dN = -N n \sigma_a dz \quad (53)$$

と書けて、

$$N = N_0 e^{-n\sigma_a z} \quad (54)$$

となる。実際にはこれら双方の過程が同時に起こる。

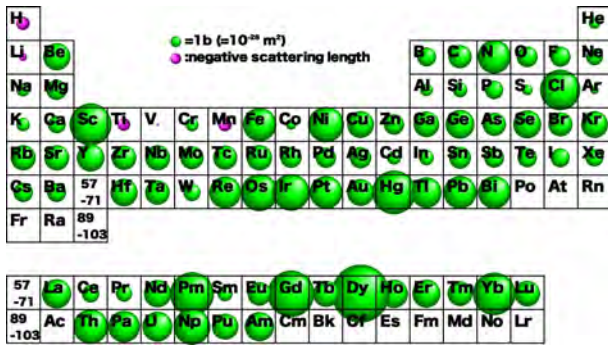


Fig. 5. 元素毎の散乱断面積

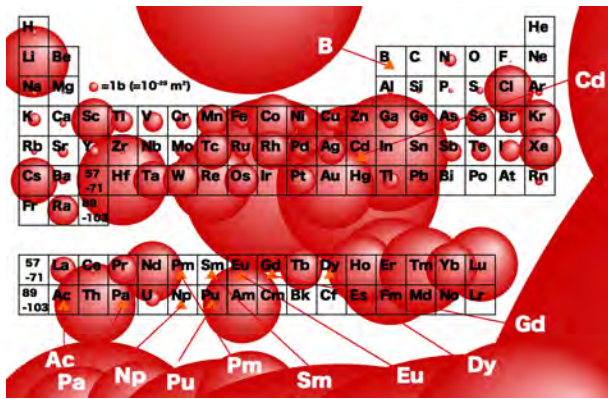


Fig. 6. 元素毎の熱中性子吸収断面積

各元素の散乱断面積及び吸収断面積を図5と図6に示す。これらの図において、同位体については自然同位体存在比で加重平均したものを示してある。

散乱断面積は、中性子が原子核ポテンシャルを通過する際の量子力学的干渉を含めた原子核の大きさなのであり、原子核の質量分布半径とは異なる。だが、この演習では散乱断面積から求めた散乱長の絶対値が、大まかに原子核の大きさを与えるものと考えことにする。

6 中性子の減速

式22から分かる通り、中性子が原子核によって散乱される度に、中性子は相手の原子核にエネルギーを与えて、自らは減速される。標的核と中性子の質量が同じ時に最も効率的に減速され、1回散乱される毎に平均的には運動エネルギーのおよそ半分を失う。そのため、減速体としては水素を多く含む素材が用いられる。

さて、標的核の質量数を A とおく。 $M = Am_n$ としてほぼ問題ない。中性子の実験系での速度を v_0 とおくと、重心系における

速度は

$$v_{0,CM} = \frac{A}{A+1} v_0 \quad (55)$$

である。このとき標的核は

$$V_{CM} = \frac{1}{A+1} v_0 \quad (56)$$

の速度を持っている。さて、

$$v_0^2 = v_{0,CM}^2 + V_{CM}^2 - 2v_{0,CM}V_{CM} \cos(\pi - \theta_{CM}) \quad (57)$$

が成り立つ。よって散乱前の中性子の運動エネルギーを T_0 、散乱後の中性子の運動エネルギーを T とすると、

$$\frac{T}{T_0} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta_{CM}}{(A+1)^2} \quad (58)$$

である。よって次式が成り立つ。

$$\frac{dT}{T_0} = \frac{2A}{(A+1)^2} \sin \theta_{CM} d\theta_{CM} \quad (59)$$

さて、今回使用する中性子源は、初期エネルギーが1MeV程度である。このエネルギー領域でも依然としてs波が支配的であり、重心系でほぼ等方的に散乱される。よってある角度方向に放出される割合は

$$dw = \frac{\sin \theta_{CM}}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta_{CM} d\theta_{CM} \quad (60)$$

となる。よって

$$\frac{dw}{dT} = \frac{1}{T_0(1-\alpha)} \quad (61)$$

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

を得る。

$A=1$ の場合には、 n 回散乱後に

$$\frac{w_n}{T} = \frac{1}{T_0(n-1)!} \left(\ln \frac{T_0}{T} \right)^{n-1} \quad (62)$$

となることが知られている。

また T_0 から出発して T' まで減速するために必要な散乱回数を n は

$$n = \frac{1}{\xi} \ln \frac{T_0}{T'} \quad (63)$$

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1}$$

で与えられる。

A 散乱の量子論

中性子の質量を m_n とする。中性子が質量 m_A の原子核によって散乱される場合を考える。換算質量を

$$m = \frac{m_n m_A}{m_n + m_A} \quad (64)$$

とおき、重心系を使う。中性子と原子核の相互作用を記述するポテンシャルは、両者の距離 r のみに依存するものとし $V(r)$ とおく。ハミルトニアン \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) \quad (65)$$

である。これに対応するシュレーディンガー方程式

$$\mathcal{H}\psi = E\psi \quad (66)$$

を解く。

運動量 \mathbf{p} は

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (67)$$

なので、

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \quad (68)$$

である。なお、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (69)$$

であり⁹、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (70)$$

である¹⁰。ここで球面座標系 (r, θ, ϕ) を

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (71)$$

で定義する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (72)$$

⁹ ∇ はナブラと発音する。

¹⁰ ∇^2 を Δ と書くことも多い。 Δ はラプラシアン (Laplacian) と読む。

を使うと、

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (73)$$

を得る。さて、ここで軌道角運動量を

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \nabla \quad (74)$$

と定義する。これを書き下すと

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= i\hbar \left(\sin \phi + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_y &= \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= i\hbar \left(-\cos \phi + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_z &= \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (75)$$

であり、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \\ &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

となる。この $\hat{\mathbf{L}}$ を使うと

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2 r^2} \end{aligned} \quad (77)$$

と書ける。これを使うとシュレーディンガー方程式 66 は

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2} + V - E \right\} \psi = 0 \quad (78)$$

となる。 $\hat{L}^2/2mr^2$ の項は遠心力ポテンシャルを表している。

$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ と置いて代入し、変形すると¹¹

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) = \frac{1}{Y} \hat{L}^2 Y \quad (79)$$

を得る。左辺は r の関数で、右辺は θ 及び ϕ の関数である。この等式が恒等的に成立するので、両辺は r, θ, ϕ に依存しない定数である。そこで両辺を λ とおくと、

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + (K^2 - \frac{\lambda}{r^2}) R = 0 \quad (80)$$

$$\hat{L}^2 Y = \lambda Y \quad (81)$$

という二つの方程式を得る。ただし、

$$K = \sqrt{\frac{2m(E - V)}{\hbar^2}} \quad (82)$$

とおいた。

A.1 角度変数についての解を求める

まず、式 81 を解く。

角運動量 \hat{L} について、次の交換関係¹²が成立する。

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y \end{aligned} \quad (83)$$

また \hat{L}^2 と \hat{L}_z は

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad (84)$$

を満たす。すなわち可換なので、同時対角化可能、つまり

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |\lambda, \mu\rangle &= \hbar^2 \lambda |\lambda, \mu\rangle \\ \hat{L}_z |\lambda, \mu\rangle &= \hbar \mu |\lambda, \mu\rangle \end{aligned} \quad (85)$$

をみたす固有関数の組が存在する¹³。右辺に \hbar が登場しているが、後々の計算が容易になるように予めこう置いておく。

¹¹こう置くと解ける。このように置けないのならば、計算を進めうちに解けなくなる。

¹² $[A, B] = AB - BA$ と定義する

¹³その意味するところは、厳密ではないが、次の通りである。 \hat{L}^2 の固有関数の組を $|\lambda\rangle$ とする。 $\hat{L}^2 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$ が成り立つ。このとき、 $\langle \lambda' | [\hat{L}^2, \hat{L}_z] | \lambda \rangle = (\lambda' - \lambda) \langle \lambda' | \hat{L}_z | \lambda \rangle = 0$ となるので、 $\langle \lambda' | \hat{L}_z | \lambda \rangle$ の非対角成分は0である。同様に \hat{L}_z の固有関数の組を $|\mu\rangle$ とする。このとき、 $\langle \mu' | [\hat{L}^2, \hat{L}_z] | \mu \rangle = (\mu' - \mu) \langle \mu' | \hat{L}^2 | \mu \rangle = 0$ となるので、 $\langle \mu' | \hat{L}^2 | \mu \rangle$ の非対角成分は0である。よって $|\lambda\rangle$ と $|\mu\rangle$ の直積 $|\lambda, \mu\rangle$ が同時固有関数の組になる。

さて、

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ &= \hat{L}_x + i\hat{L}_y \\ \hat{L}_- &= \hat{L}_x - i\hat{L}_y \end{aligned} \quad (86)$$

を定義する。

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ \hat{L}_- &= \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z \\ \hat{L}_- \hat{L}_+ &= \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z \end{aligned} \quad (87)$$

が成立する。ここで、 $\hat{L}_+ |\lambda, \mu\rangle$ という状態ベクトルの長さは

$$\begin{aligned} |\hat{L}_+ |\lambda, \mu\rangle|^2 &= \langle \lambda, \mu | \hat{L}_+^\dagger \hat{L}_+ |\lambda, \mu\rangle \\ &= \langle \lambda, \mu | \hat{L}_- \hat{L}_+ |\lambda, \mu\rangle \\ &= \hbar^2 (\lambda - \mu^2 - \mu) ||\lambda, \mu\rangle|^2 \end{aligned} \quad (88)$$

となるので、

$$\lambda \geq \mu^2 + \mu \quad (89)$$

でなければならない。同様にして

$$|\hat{L}_- |\lambda, \mu\rangle|^2 = \hbar^2 (\lambda - \mu^2 + \mu) ||\lambda, \mu\rangle|^2 \quad (90)$$

から

$$\lambda \geq \mu^2 - \mu \quad (91)$$

でなければならない。そのためには、 $\lambda \geq 0$ が必要である。 $\lambda \geq 0$ のときには、

$$\lambda = l(l+1) \quad (92)$$

を満たす正の数 l が一意的に求まる。この l を用いると、式 89 と式 91 が同時に成立するためには

$$-l \leq \mu \leq l \quad (93)$$

が成立しなければならない。 λ と l は1対1に対応するので、 $|\lambda, \mu\rangle$ を $|l, \mu\rangle$ と書く。

さて、もしも $l-1 < \mu < l$ であるとすると、

$$|\hat{L}_+ |l, \mu\rangle|^2 = \hbar^2 (l - \mu)(l + \mu + 1) ||l, \mu\rangle|^2 > 0 \quad (94)$$

が成り立つ。一方で

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 (\hat{L}_+ |l, \mu\rangle) &= \hbar^2 l(l+1) \hat{L}_+ |l, \mu\rangle \\ \hat{L}_z (\hat{L}_+ |l, \mu\rangle) &= \hbar(\mu+1) \hat{L}_+ |l, \mu\rangle \end{aligned} \quad (95)$$

が成り立つので、

$$\frac{1}{\hbar^2 (l - \mu)(l + \mu + 1)} \hat{L}_+ |l, \mu\rangle \quad (96)$$

という状態ベクトルは、 \hat{L}_z に対する固有値として $\mu + 1$ という値を持つことになる。仮定から

$$l < \mu + 1 < l + 1 \quad (97)$$

となり、式 93 に矛盾する。よって、 $l - 1 \leq \mu$ または $\mu \geq l$ でなければならない。同様に、 $l - 2 \leq \mu$ または $\mu \geq l - 1$ 、 $l - 3 \leq \mu$ または $\mu \geq l - 2$ 、などを導くことができるので、 μ の取りうる値は $l, l - 1, l - 2, \dots$ のうち $-l$ より大きいか等しいものに限られる。

同様に、もしも $-l < \mu < -l + 1$ であるとすると、

$$|\hat{L}_-|l, \mu\rangle|^2 = \hbar^2(l + \mu)(l - \mu + 1) ||l, \mu\rangle|^2 > 0 \quad (98)$$

が成り立つ。一方で

$$\begin{aligned} \hat{L}^2(|l, \mu\rangle) &= \hbar^2 l(l + 1) |l, \mu\rangle \\ \hat{L}_z(|l, \mu\rangle) &= \hbar(\mu - 1) |l, \mu\rangle \end{aligned} \quad (99)$$

が成り立つので、

$$\frac{1}{\hbar^2(l + \mu)(l - \mu + 1)} \hat{L}_- |l, \mu\rangle \quad (100)$$

という状態ベクトルは、 \hat{L}_z に対する固有値として $\mu - 1$ という値を持つことになる。仮定から

$$-l - 1 < \mu - 1 < -l \quad (101)$$

となり、式 93 に矛盾する。よって、 $-l \leq \mu$ または $\mu \geq -l + 1$ でなければならない。同様に、 $-l + 1 \leq \mu$ または $\mu \geq -l + 2$ 、 $-l + 2 \leq \mu$ または $\mu \geq -l + 3$ 、などを導くことができるので、 μ の取りうる値は $-l, -l + 1, -l + 2, \dots$ のうち l より小さいか等しいものに限られる。

μ の取りうる二つの条件が同時に成立するためには、 l と $-l$ の差が整数でなければならない。すなわち、 l の値は整数か半整数に限られ、 μ は $-l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ のいずれかに限られる。

式 81 において、 λ を $l(l + 1)$ におきかえ、 $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ とおいて代入して変形すると

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l + 1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (102)$$

となる。左辺は θ の関数で、右辺は ϕ の関数である。この等式が恒等的に成立するので、

両辺は θ, ϕ に依存しない定数である。そこで両辺を μ^2 とおくと、

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = \mu^2 \quad (103)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \mu^2 \quad (104)$$

式 104 の一般解は、

$$\Phi(\phi) = Ae^{i\mu\phi} + Be^{-i\mu\phi} \quad (105)$$

のように得られる。式 105 は、座標系を z 軸の周りに整数回だけ回転しても、もとの値に戻ることを要求する。すなわち、全ての整数 n に対して

$$\begin{aligned} \Phi(\phi + 2n\pi) &= Ae^{i\mu\phi} e^{2i\mu n\pi} + Be^{-i\mu\phi} e^{-2i\mu n\pi} \\ &= Ae^{i\mu\phi} + Be^{-i\mu\phi} = \Phi(\phi) \end{aligned} \quad (106)$$

が任意の ϕ に対して成立することを要求する。すると、 μ は整数でなければならない。

μ が整数であるということは、 l も整数でなければならない。これ以降 μ を m と書くことにする¹⁴。このとき、 $x = \cos \theta$ とおくと、式 103 は

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left(l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0 \quad (107)$$

となる。これはルジャンドルの陪微分方程式として知られており、互いに独立な解の基本形はルジャンドルの陪関数 $P_l^m(x)$ と $Q_l^m(x)$ である。このうち $Q_l^m(x)$ は $x = 0$ で発散するので除外すると、規格化された解の基本形は

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \phi) &= (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{l+|m|!}} \\ &\times P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \end{aligned} \quad (108)$$

で与えられる。なお、

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x) \\ P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \end{aligned} \quad (109)$$

である。

¹⁴換算質量の m と同じ文字を使うが、誤解の無いように。

A.2 動径方向の解を求める

中性子と原子核の間に働く相互作用は、次のポテンシャルで近似できる。

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \quad (110)$$

r_0 は原子核の大きさ程度の大きさの量である。式 80 は

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad (111)$$

である。

$$\rho = Kr \quad (112)$$

とおくと、式 111 は

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (113)$$

となる。さて、ここで

$$Q = R\sqrt{\rho} \quad (114)$$

とおくと、

$$\frac{d^2 Q}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\rho} + \left(1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2} \right) Q = 0 \quad (115)$$

となる。さて、微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (116)$$

の解は、 α が整数の場合には

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \alpha} \quad (117)$$

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \quad (118)$$

の二つが独立な解であり、それぞれ第1種ベッセル関数、第2種ベッセル関数と呼ばれる。

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (119)$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (120)$$

は球ベッセル関数と呼ばれる。これを用いて、式 80 の解は

$$R(r) = A_l j_l(\rho) + B_l n_l(\rho) \quad (121)$$

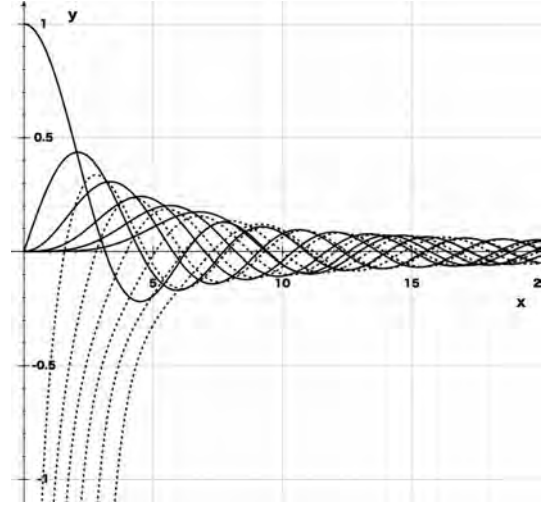


Fig. 7. $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対する球ベッセル関数 $j_l(x)$ (実線)、 $n_l(x)$ (破線) の値

である。 Kr が十分小さい場合には、 $l = 0$ が支配的になることが分かる。なお、球ベッセル関数は初等関数で書くことができ、

$$j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho} \quad (122)$$

$$j_1(\rho) = -\left(\frac{\cos \rho}{\rho} - \frac{\sin \rho}{\rho^3} \right) \quad (123)$$

$$j_2(\rho) = \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) \sin \rho - \frac{3 \cos \rho}{\rho} \quad (124)$$

である。球ベッセル関数の漸近形は

$$j_l(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin(\rho - l\pi/2)}{\rho} \quad (125)$$

である。また球ハンケル関数

$$h_l^{(1)}(\rho) = j_l(\rho) + in_l(\rho) \quad (126)$$

$$h_l^{(2)}(\rho) = j_l(\rho) - in_l(\rho) \quad (127)$$

を定義して、式 121 を

$$R(r) = A_l' h_l^{(1)}(\rho) + B_l' h_l^{(2)}(\rho) \quad (128)$$

と書いておく。球ハンケル関数の漸近形は

$$h_l^{(1)}(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} (-i)^{l+1} \frac{e^{i\rho}}{\rho} \quad (129)$$

$$h_l^{(2)}(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} i^{l+1} \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \quad (130)$$

$$(131)$$

である。

さて、中性子が散乱されている状態は、

$$\psi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right) \quad (132)$$

という形に漸近しているはずである。なお、 $r \rightarrow \infty$ では $V = 0$ であり、

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (133)$$

とおくことにする。右辺第一項は入射平面波を表し、右辺第二項は散乱の中心から球面状に広がっていく散乱波を表す。入射粒子は z 軸方向に入射するものとし、散乱粒子が進む方向が z 軸に対してなす角を θ とおく。この $f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれ、長さの次元を持つ。

Rayleigh の公式によって、

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (134)$$

が成立するので、

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ikr} \left(e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right) P_l(\cos \theta) \quad (135)$$

となる。散乱振幅 $f(\theta)$ をルジャンドル多項式で展開して

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ik} (\eta_l(k) - 1) P_l(\cos \theta) \quad (136)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ikr} \\ &\times \left(\eta_l(k) e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right) \\ &\times P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (137)$$

と書ける。球ハンケル関数の漸近形を使うと

$$\psi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \left((-i)^{l+1} A'_l \frac{e^{ikr}}{kr} + i^{l+1} B'_l \frac{e^{-ikr}}{kr} \right) \quad (138)$$

と書けるため、

$$A'_l = \frac{2l+1}{2i} i^{l+1} \eta_l(k) \quad (139)$$

$$B'_l = \frac{2l+1}{2i} i^{l+1} \quad (140)$$

と求まる。したがって $\eta_l(k)$ が求まると、ポテンシャルの外での厳密解

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{2} \\ &\left(\eta_l(k) h_l^{(1)}(kr) + h_l^{(2)}(kr) \right) \\ &P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (141)$$

を求めることができる。

$$\eta_l = e^{2i\delta_l} \quad (142)$$

で定義される δ_l を位相のズレ (phase shift) と呼ぶ。