

「近距離重力実験」 サマーチャレンジ演習用テキスト

2008年8月 立教大学 村田 次郎

e-mail : jiro@rikkyo.ac.jp WWW : <http://www.rikkyo.ac.jp/~jiro/>

TA 秦麻記、秋山岳伸、池田友樹、二宮一史

目次

0. Introduction

1. 実験的背景
2. 理論的背景
3. 近距離重力実験の動機
4. 実験方法
5. 実験装置
6. 理論予想
7. 実験装置の製作
8. 実験結果の解析

0. Introduction

ニュートンの万有引力の法則

$$F(r) = G \frac{Mm}{r^2}$$

はニュートン力学とともに近代科学の出発点であり、もっとも有名な物理法則と言える。何故重力がこの様な法則に従うのか、何か深い理由付けがあつて考案されたものではなく、あくまで天体の運行等を説明する為に考案された経験則であり、この時点では説明の出来ない根本法則である。重力が何か得体の知れない原因による力なのではなく、その起源を加速度運動による力と同一視する事で時空の幾何学として構築された重力の理論が有名なアインシュタインの一般相対論である。一般相対論は加速度運動によって重力を「消す」事が出来る事実に着目し、 $F(r) = G \frac{Mm}{r^2}$ に現れる、重

力の源としての質量である「重力質量」と、 $ma = F$ に登場する、動きにくさを示す「慣性質量」が等しいとおける、もしくはそれらの比が物質によらず一定である、とする「等価原理」を基礎としている。一般相対論により重力の原因に関してより深い理解が得られるようになったとは言え、現在でも一般相対論自身は実験検証の必要な一つの重力理論のモデルに過ぎない。観測・実験事実の予言に関しては、弱くて静的な重力場に関しては一般相対論はニュートンの法則に収束する。一般相対論が必要とされるのは光速と比較しうる程の非常に速度の大きな現象などを含む特別な場合である為、静止した物体間の重力を求める際にはニュートンの万有引力の法則を問題なくそのまま用いることが出来る。従つて、4つの基本相互作用のうち、他の3つの相互作用は場の量子論に基づく現代的な理論が構築され、加速器実験の厳しい試練に耐え続けて精密化が行われている一方で、重力現象の実効理論としては21世紀に入った今でも、殆どの場合、18世紀のニュートンの万有引力の法則が現実を正確に記述しうる法則として君臨し続けているのである。

1. 実験的背景

ニュートンの万有引力の法則の成功はあまりに見事であつた為、その実験的検証と

いうテーマは長い間見過ごされてきた。とりわけ、法則の適用範囲に関しては非常に大きな誤解があった。ニュートンの法則が非常に高精度で実験・観測を再現して大成功を収めたのは実は、天体の運行だけである。 $F(r) = G \frac{Mm}{r^2}$ のうち、万有引力定数が距離や物質、質量の大きさなどによらず真に定数であると仮定した場合、逆二乗則が本当に成り立っているかどうかはある程度実験的に様々な距離のスケールで検証されている。

ニュートン重力のポテンシャルは

$$V_{Newton}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

と書ける。ここで、ニュートンの法則を疑う立場を取り、ニュートンの法則からのずれの部分をゼロでない¹と置くと一般に

$$V(r) = V_{Newton}(r) + V'(r)$$

と書ける。新たな項の形は全く自由であるが、天体の運行を $V_{Newton}(r)$ が見事に再現する事から、天体間規模の長距離ではポテンシャルが $V_{Newton}(r)$ に収束する様な、近距離だけで有効となるポテンシャルの形が有望である。もしニュートンの法則がある距離スケール λ よりも近距離で指数関数的にポテンシャルが増加する様なモデルを考えると、

$$V'(r) \propto \frac{1}{r} \exp\left[-\frac{r}{\lambda}\right]$$

と書ける。このポテンシャルの形は湯川型ポテンシャルと呼ばれ、ゼロでない質量を持った粒子が媒介する力の場を再現する事が知られている。このポテンシャルは $r \gg \lambda$ で急速にゼロに近づく為、 λ はこの

力の到達距離を与える事になる。このポテンシャルを与える相互作用が質量 m の粒子が媒介する交換力という考え方に立つと、

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

で与えられることが相対論的量子力学により知られている。この長さはコンプトン波長と呼ばれている（正確には、

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

である）。この考え方はそもそも湯川秀樹が有限到達距離を持つ核力の起源を、質量を持つ中間子が媒介するという核力の中間子論を考案した際に導入されたものである。湯川秀樹は、核力の到達距離が原子核の大きさ程度である事実から、中間子は電子と核子の中間的な質量を持つ、と予言したのであった。そうして予言され、発見されたのがパイ中間子である。

コンプトン波長は質量を持った粒子の波動関数の波束の広がり、つまり空間的な広がりを与える。ところで、ここで登場した力の媒介粒子というものは何もない所から勝手に現れるので、エネルギー保存則を破る事になる。これは不確定性関係 $\Delta E \Delta t \sim \hbar$

$$\text{により、短時間 } \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

だけ存在が許容される、「仮想粒子」と呼ばれるものである。この短い時間に移動することの出来る距離は、光速で飛行したとして、

$$c\Delta t \sim \frac{\hbar c}{\Delta E} \sim \frac{\hbar c}{E} \sim \frac{\hbar c}{mc^2} \sim \frac{\hbar}{mc}$$

となり、コンプトン波長と一致する。この事からも、コンプトン波長が粒子の存在領域を与える事がわかる。

さて、この様な湯川型の新たなポテンシ

ヤルを付け加えた

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r} (1 + \alpha \exp[-\frac{r}{\lambda}])$$

という形を考える。第二項の意味は上述の説明をそのまま理解すると、通常のニュートン重力の他に、ゼロでない質量を持った未知の粒子の媒介する新たな相互作用（第5の力？）を付け加えたという事になる。質量もしくはそれに非常に近い量、例えばバリオン数（ほぼ核子の数と考えて構わない）を力の源とする新たな力である。例えば、1cm程度の到達距離を持つ、質量に比例した強さの相互作用が存在すれば、それは未知のものである。

相互作用	到達距離
重力	無限大
電磁気力	無限大
弱い力	$\sim 1/100 \text{ fm} = 10^{-17} \text{ m}$
強い力	$\sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$

上の表は、現在知られている4つの基本相互作用の到達距離を示している。重力（ニュートン重力）と電磁気力の到達距離が無限大であることは、その媒介粒子の質量がゼロであることを示している。これはコンプトン波長が質量に反比例することからわかる。例えば、電磁力を媒介する光子の質量はゼロである。つまり、もしクーロンの法則

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$$

の逆二乗則がずれたとすると、それは現在の素粒子物理学ではゼロとされている光子の質量がゼロでない値を持つことを意味する。弱い力の非常に小さな到達距離は、弱

い力の媒介粒子である W^\pm 粒子、 Z^0 粒子が $80-90 \text{ GeV}/c^2$ という、核子質量の100倍近い巨大な静止質量を持つことから理解できる。強い力の媒介粒子であるグルーオンの質量は実はゼロであるので、もともと強い力は電磁力同様にクーロン型ポテンシャルを持ち、無限大の到達距離を持つはずである。しかし、強い力の場合はカラーの閉じ込め機構という、自由なクォークは取り出せないという別の機構が働くことで実効的に到達距離がハドロンの大きさ程度となっていると理解されている。

さて、前述の、1cm程度の到達距離を持つ新たな相互作用の媒介粒子の質量はどれくらいになるだろうか？

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad \text{であるから、}$$

$$mc^2 = \frac{\hbar c}{\lambda}$$

と書きなおせる。素粒子物理ではあまり $\hbar \sim 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

という、ジュールを含むような単位での表現を用いることをせず、

$$\hbar c \sim 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

を用いるほうが何かと便利である。これを用いると、

$$mc^2 = \frac{\hbar c}{\lambda} \sim \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \text{ cm}}$$

$$= 197 \times 10^{6-15+2} \text{ eV}$$

$$\sim 20 \mu\text{eV}$$

となり、既知の質量を持った粒子の中で最も軽い、電子の質量 $m_e \sim 511 \text{ keV}$ に比べて10桁近くも小さな事がわかる。この様な小さな質量を持った新粒子にはアクシオンという、宇宙の暗黒物質の候補となるものが

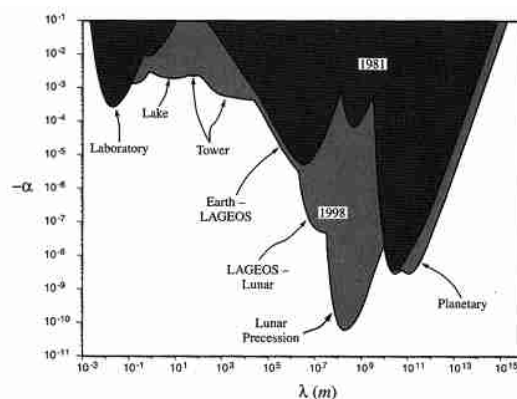
予想されているが、強い理論的な要請の一方で実験的には未発見である。

アキシオンの様な、「中間的」な質量を持つて中間的な到達距離を持つ、「中距離力」を探索する、という実験的な試みがここ 20 年間ほど精力的に行われてきた。その歴史を尊重して、必ずしも全く新たな相互作用の探索という動機でなくても、ニュートンの法則の検証を実験的に行う際には湯川型のポテンシャルを追加した表現が行われる事が慣習となっている。

前置きが長くなったが、以上の様な背景からニュートンの法則が下記の様に変更を受けるものと式をおく。

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r} \left(1 + \alpha \exp\left[-\frac{r}{\lambda}\right] \right)$$

ニュートンの法則は、 $\alpha = 0$ の場合に相当する。この α は大雑把に言って、 $r \sim \lambda$ の距離でニュートン重力に対してずれがどの程度あるか、という量になる。現在までの全ての実験結果は、 $\alpha = 0$ と矛盾しない、つまり、実験結果として得られる α の、測定誤差の範囲内にゼロを含むものとなっている。ではニュートンの法則は厳密に正しいと結論付けてよいのか、というとそれは大きな間違いである。実験結果として得られた α の値には許される上限と下限があり、それらの値が厳密にゼロには原理的にならないからだ。どれだけ上限と下限の差が小さいか、がその測定の精度となる。さて、その上限の値をプロットしたものが次の図である。



この図は様々な実験結果から得られた、 α の上限値をスケール λ の関数としてプロットしたものである。最も精度よく逆二乗則が検証されているのは、 $\lambda \sim 10^8 m$ 付近であり、これは地球と月の距離に相当する。月面上に置かれたレーザー反射計を用いた月の運行の精密観測から得られたものである。このスケールでは、 $\alpha < 10^{-10}$ が得られており、10桁という驚異的な精度で逆二乗則が確認できている事がわかる。但し、この結果は重力の距離依存性を確認しただけなので、万有引力定数の絶対値がこの精度で得られたという事は意味していない。実際、万有引力定数という自然科学で最も基本的な量は4桁程度の精度でしか求められていない。しかも、その結果すら、逆二乗則が仮定されている。さて、この結果から、ニュートンの逆二乗則はやはり正しいのだ、と思うのはこれも大きな勘違いである。図の左端、もしくは右端を見ると、せいぜい $\alpha < 1$ 程度にしか制限がかかっていない。つまり、ニュートン重力と同等のずれがあっても排除できていない、言い換えればニュートン重力が働いているかどうかさえ確認されていない状況である事がわかる。この状況にあるのは、 $r < 1mm$ もしくは $r > 10^{15} m$ にある事がわかる。つまり、1mm

以下の近距離では重力が働いているかどうか
 かも実験的にはわかっていないのである
 (但し、これは 1998 年の状況である事を指
 摘しておく。)

1mm といえば、素粒子のスケールとは違
 い我々人間には親しみやすいスケールであ
 り、実験は簡単そうに思える。では、実際
 に直径 1mm の鉛の球同士に働くニュート
 ン重力の大きさを計算して実験が簡単なの
 かどうか見てみよう。簡単のため、お互い
 に接する距離にあるものとしよう。

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$\left(= 6.71 \times 10^{-39} \hbar c (GeV/c^2)^{-2} \right)$$

$$\rho_{pb} = 11.3g/cm^3$$

を使うと、鉛球の質量は

$$m = \rho_{pb} \times \frac{4\pi r^3}{3} = 11.3 \frac{g}{cm^3} \times \frac{4\pi(0.5mm)^3}{3}$$

$$\sim 5.6mg$$

であるので、結局

$$F = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \times \frac{(5.6mg)^2}{(1mm)^2}$$

$$\sim 2 \times 10^{-15} N = 2fN$$

が得られる。そもそも、この鉛球が地球に
 引かれる力は

$$mg = 5.6mg \times 9.8m/s^2 \sim 60\mu N$$

と非常に小さいがさらにその

$$2fN / 60\mu N \sim 10^{-10}$$

も小さいのである。この鉛球間の重力の測
 定が技術的に如何に困難であるかがわかる
 だろう。

逆に太陽系の大きさを大きく超えるよう
 なスケールでは質量の把握も困難である事
 からやはり逆二乗則は殆ど確認されていな
 い。つまり、殆どの人が正しいと信じてい
 るニュートンの法則は、地球と月の間の距
 離程度という、ごく限られた範囲でしか精
 密には確認されていない経験則なのである。
 これを全てのスケールで厳密に成り立つ絶
 対的な法則であると考える事は出来ない。

2. 理論的背景

4つの相互作用のうち、重力だけはその
 桁違いの弱さから、実験科学としての素粒
 子物理学の考察の対象から長らくはずされ
 てきた。1fm の距離におかれた陽子同士の
 間に働く力の大きさを、強い力を 1 とし
 て書くと下の表の様になる。

相互作用	陽子間の力
重力	10^{-38}
電磁気力	10^{-2}
弱い力	10^{-5}
強い力	1

素粒子の標準理論では電磁気力と弱い力は
 グラシヨウ・ワインバーグ・サラム模型に
 より統一的に同起源のものとして理解され、
 さらに未確認の大統一理論ではこれに強い
 力を加えた統一的な理解が試みられている。
 しかし、重力はその桁違い弱さから、通常
 の方法で他の3つの相互作用と統一的に理
 解できる望みは殆どない。実験的にも加速
 器実験などで重力の効果を考えなければな
 らない必要は普通の考えではないことから、
 実験的にも理論的にも重力はもっともなじ
 みの深い力であるにも関わらず長らく素粒

子物理学者からは不遇な扱いを受けてきた。

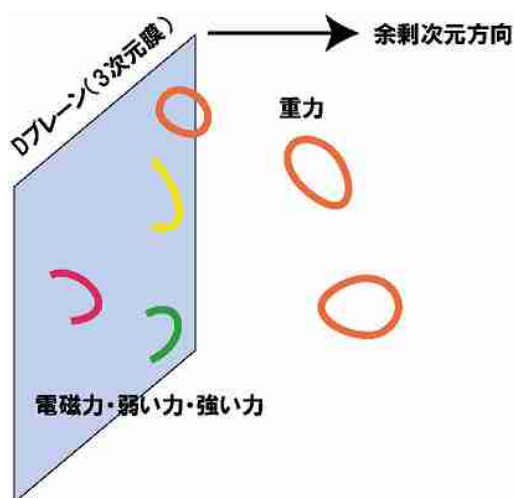
そこで、超ひも(弦)理論が登場する。この理論では、素粒子は大きさを持たない点粒子ではなく、有限の長さを持った弦である、という仮定の上に成り立っている。種類の異なる素粒子は、本質的にはまったく同じ弦であり、単に振動状態が異なるだけであると理解される。こうすることで、現在の素粒子標準理論で 20 個近くも存在すると頭から仮定される「基本粒子」をたった一つにしてしまうことが出来る。

この理論の凄い所は、弦と弦の相互作用に重力が存在する事を示したことにある。丁度、一般相対論が重力を幾何学から理解しようとしたように、すべての素粒子の相互作用を、弦の幾何学で説明しようという画期的な理論である。ところが、この画期的な理論には二つのやっかいな特徴がある。

1. 弦の存在する空間は 10 次元必要
 2. 弦の大きさはプランクスケール程度
- という 2 点である。まず、10 次元とは如何にも乱暴な仮定であるが、実験的に否定できない以上、却下するわけにも行かない。実際、最近になって、これまでのほぼ全ての実験は全空間が例え 4 次元以上あったとしても、その観測手段が 3 次元空間に限定されている為に、その外側の高次元空間の影響を全く受けることなく、我々の 3 次元空間だけで世界を理解して来たのではないかと考えられるようになった。これは、我々の馴染みの素粒子は、その弦が高次元空間に埋め込まれた 3 次元の膜に限定されてしまう機構が働くため、全ての事象がこの D ブレーンと呼ばれる 3 次元膜の上に限

定された形で生じてしまうのだ、という説である。では、例え本当の世界は 4 次元以上の空間が広がっているのに、我々はその中の限定された D ブレーンに張り付いていることしか出来ないのか、と思うとそうでもないことがわかった。その鍵が重力である。

重力は、他の力の媒介粒子と違って、この D ブレーンに束縛される、弦の端点を持たずに自由にブレーンを離れて高次元空間全体に浮遊しうる、他の素粒子とは違った極めて特別な性質を持ちうるらしいのだ。存在しうる空間が広いという事は、我々の観測手段の閉じ込められている D ブレーンにたまたま通りかかる確率が小さい事を意味する。つまり、電気力線が力線の広がりうる全ての空間の方向に広がるように、重力の力線も D ブレーンに限定されずに高次元方向へ放射させることが予想される。つまり、急激に重力の力線の密度が小さくなる為に、重力の強さは、力線が D ブレーンに閉じ込められた他の力に比べて圧倒的に小さくなってしまふのである。



この説明はなにか不思議である。もし、高

次元方向に本当に重力が等方的に広がるなら、ニュートンの法則は逆二乗則とはならないはずである。電磁気学のガウスの法則を思い出そう。

マクスウェル方程式の最初の式はガウスの法則として知られ、

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

であり、ベクトル解析のガウスの定理は

$$\int_{\text{表面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{体積}} \nabla \cdot \vec{E} dV$$

であるからこれらを合わせて

$$\int_{\text{表面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{体積}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

が成り立つことはよく知っているだろう。

さて、3次元空間におかれた点電荷が生じる電場は、これを囲う球を考えることで

$$\int_{\text{表面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot E$$

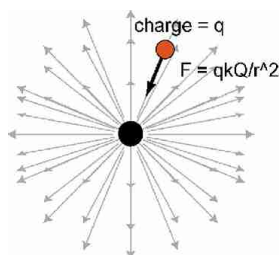
$$\int_{\text{体積}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

であるから、両者が等しいと置いて

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{即ち、} E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

と、クーロンの法則が導ける。つまり、クーロンの法則は、電気力線の伝播する空間が等方的な3次元空間である事を仮定しているのである。



3次元の場合

では、2次元、1次元の場合はどうか。2次元の場合は3次元空間におかれた無限に長い線電荷（線電荷密度 λ ）を考えればよい。これを囲う円筒を積分面とすると、

$$\int_{\text{表面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r \cdot E$$

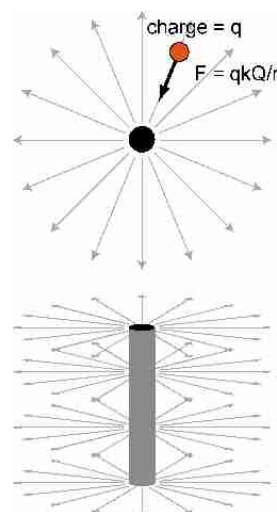
$$\int_{\text{体積}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

より

$$2\pi r \cdot E = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \text{、即ち}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

が得られる。



2次元の場合

1次元の場合は、無限に広い面電荷（面電荷密度 σ ）を考え、これを平行に挟み込む直方体を積分面としてとる事で、

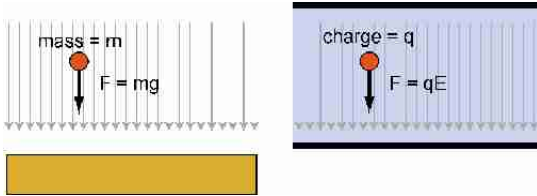
$$\int_{\text{表面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E$$

$$\int_{\text{体積}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

となり、

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

が得られる。



1次元の場合

まとめると、

空間次元	E(r)の形
3次元	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$
2次元	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
1次元	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

となる。つまり、d次元空間を考える際には常にそれを囲う球面の面積は電荷からの距離のd-1乗になる。3次元の球の表面積は $4\pi r^2$ 、2次元の円の円周は $2\pi r$ となる、という様に。つまり、ガウスの法則からわかることは、

$$E_{d次元} \propto \frac{1}{r^{d-1}}$$

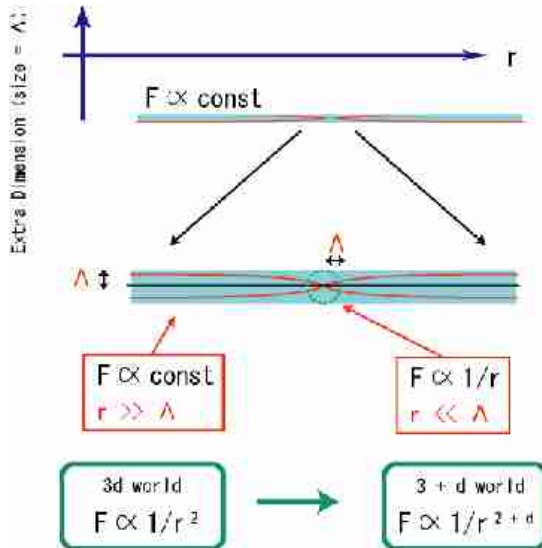
という事である。上の表で実際にそうなっている事を確認しよう。

さて、以上の話をまとめると、もし超弦理論に限らず、一般に等方的なd次元空間を考えるとすると、重力は

$$F_{d次元} \propto \frac{1}{r^{d-1}}$$

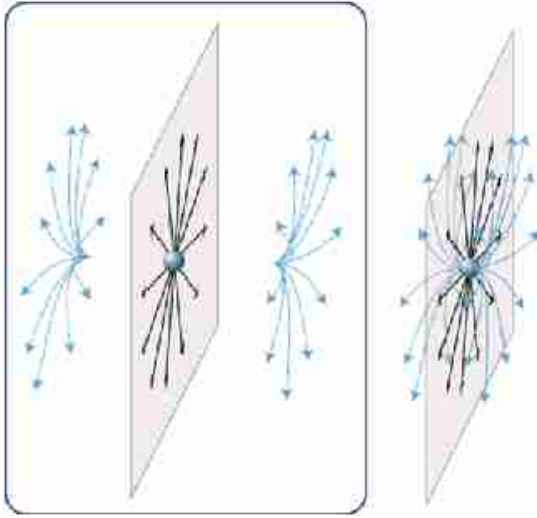
の形となり、d=3でない限り、つまり3次元空間を超える、「余剰次元」の数がゼロでない限り、太陽系の運行を非常によく説明するニュートンの法則と矛盾してしまう。つまり、やはり空間は3次元ではないか、という結論になりそうである。

しかし、ここに大きなポイントがある。実は、全ての空間は等しい必然性がないのだ。もし、余剰次元の方向は Λ 程度に小さくまるまってしまっているとすると、つまり、この方向の宇宙の大きさが Λ 程度しかない、と考えると、力線の伝播方向が制限されることになる。つまり、重力源からの距離rが Λ 程度までは、重力はほぼ等方的に伝播し、それよりも遠距離では余剰次元方向にはそれ以上広がる事が出来ない為、重力の力線はこの Λ の範囲内に閉じ込められることになる。



ここで考えた、 Λ という大きさは、「コンパクト化」のスケールと呼ばれ、超弦理論の第二の特徴である、プランクスケール程度

の非常に小さい長さであると考えられてきた。



力線が狭い方向へ浸み出すイメージ図

3. 近距離重力実験の動機

プランクスケールとはなんだろうか？一番簡単な説明は、重力の量子力学的な効果が無視できなくなるスケールの事で、量子力学を特徴付けるスケールであるプランク定数 \hbar と、重力を特徴付ける万有引力定数 G 、それから光速 c を組み合わせて得られる量である。質量=エネルギーの次元を持つ組み合わせは

$$E_{pl} = m_{pl} c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$$

であり、プランクエネルギー、プランク質量と呼ばれる。長さの次元を持つ量は

$$l_{pl} = \frac{\hbar c}{m_{pl} c^2} \sim 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

となり、プランク長と呼ばれる。ニュートン重力はもとより、一般相対論も量子力学を考えない古典理論 ($\hbar \rightarrow 0$ と考える) であるが、このスケールでは重力の量子効果、つまり量子化された重力理論が必要とされるスケールであることが予想される。実は、

後で説明するように、プランク長は粒子がブラックホールになってしまう大きさに相当しており、これ以上小さなスケールで空間を分割する事は意味を成さなくなる最小の長さなのである。

超弦理論に特徴的な現象は、このプランクスケールという途方もなく巨大なエネルギーでやっと観測が可能になると考えられている。現在完成間近の LHC の重心系衝突エネルギーは $14 \text{ TeV} = 14000 \text{ GeV}$ であることを考えると、実に LHC よりも 14 桁も大きなエネルギーの超巨大加速器が出来ない限り、超弦理論の真の検証は出来ないものと考えられてきた。

さて、ここからが面白いところである。上でプランクスケールを算出する際、万有引力定数 G を用いた。これは、プランクスケールである、 10^{-35} m という途方もなく小さなスケールまで、万有引力定数が一定値であることを当然のうちに仮定している。しかし、最近のモデルが示唆したように、もし近距離で重力の伝播方向の次元が高まるのなら、重力の法則のべき乗則はより急激になるはず、つまり、近距離では重力はニュートン重力の予言よりも、急速に、強まっていく事が予想される。だとすれば、プランクスケールにおいては万有引力定数の値自身が長距離で得られているものよりはるかに大きくなるはず、と解釈しなおすことも出来る。

ここで、実験検証の状況を思い出してみよう。プランクスケールはおろか、重力の逆二乗則が確認されているのは 1 mm 程度

までにすぎない。つまり、プランクスケールの算出にあたっては、実験で確認されている距離の下限を、なんと 30 桁も下回ったとんでもない適用範囲外でニュートン重力の法則を仮定していた事になるのだ。

つまり、余剰次元などというとんでもないものを仮定するのだから、それはきっとプランクスケール程度にまるまっているに違いない、というみんなの思い込みがあったのだ。そして頭を整理しなおした結果、高次元の存在を探るほぼ唯一の手段である重力の実験結果を考えれば、余剰次元の大きさ Λ は逆二乗則の確認されている大きさの下限、つまり 1mm 程度というかつての常識から考えれば「巨大」な大きさに広がっている可能性がある事に気づいたのだ。そして、 Λ の内側では、ニュートンの法則の、逆二乗則が破れる現象が観測される可能性が指摘され、非常に興味深い状況になっている。

4. 実験方法

逆二乗則の実験検証の求められる、1mm という距離とは我々には一見気楽な距離である。しかし、その実際の実験はその極端な力の弱さから、高い精度で実験検証を行うことは非常な困難を伴う。

実際に小さな物体間の重力を計測して逆二乗則を本当に検証する代わりに、加速器を使った検証方法が注目されている。特殊相対論で考えれば、エネルギーは即ち質量である。LHC などの高エネルギー加速器で粒子同士を衝突させると、瞬間的に非常に高い質量密度を持つ状態が極めて小さな領域

に生成される。あまりに巨大な質量が限られた空間領域に存在すると、ブラックホールが生成される事が知られている。簡単に計算するため、ある粒子の運動エネルギーが重力ポテンシャルに打ち勝てなくなる条件を考える。

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} < 0$$

整理すると

$$r < \frac{2GM}{v^2}, \text{もしくは}$$

$$v < \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

この速度は、地球からの脱出速度を与える第二宇宙速度として知られる量である。この第二宇宙速度は質量 M 、中心からの距離 r から重力による束縛を振り切って脱出するために必要な速度である。これが光速を超えると、如何なる粒子も脱出が不可能となる。つまり、 $v < c$ を考えると、

$$r < \frac{2GM}{c^2}$$

を満たせば重力場から脱出できない事がわかる。この半径

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

をシュバルツシルド半径と呼び、この半径の内側から外部に通信する手段は失われる為、事象地平面とも呼ばれる。これがブラックホールである。

さて、加速器の場合を考える。衝突型加速器では二つの正反対に走るビーム同士が衝突する為、片方のビームエネルギーを

$$\frac{1}{2}E \text{ とすると、重心系での全エネルギーは}$$

E になる。衝突で作られた超高エネルギーの系を一つの粒子とみなすと、その静止エネルギーは $E = Mc^2$ で与えられる。さて、質量を持った粒子の存在領域、つまり波束の大きさがコンプトン波長で与えられる事を思い出すと、この質量はコンプトン波長

$$\lambda = \frac{h}{Mc}$$

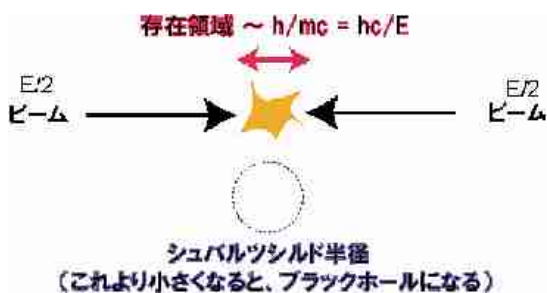
の程度に空間的に局在化する事になる。もし、この長さが十分に小さければ、ブラックホールが生成される、というわけである。さて、ブラックホールが生成される条件は、

$$\frac{h}{Mc} < \frac{2GM}{c^2}$$

であり、 $E = Mc^2$ を用いると

$$E > \sqrt{\frac{\hbar c^5}{2G}}$$

が得られる。つまり、この式を満たすエネルギーを与えれば、加速器でブラックホールが生成されるのである。尚、生成されたブラックホールは直ちにホーキング輻射という黒体輻射に似たメカニズムでエネルギーを失って蒸発する。蒸発の過程で様々な粒子を放出する。それをブラックホール生成のシグナルとして捉える狙いだ。



さて、実際このエネルギーはどれくらいの大きさなのだろうか？プランク質量の定義を思い出すと、

$$E_{pl} = m_{pl}c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad \text{であるが、}$$

実は、これを変形すると

$$E > \sqrt{\frac{\hbar c^5}{2G}} = \frac{1}{\sqrt{2}} m_{pl}c^2$$

となる。つまり、殆どプランクエネルギーそのものになるのだ。よって、加速器でブラックホールを生成するにはプランクエネルギーの加速器が必要になることがわかる。これは、実はプランク長とはシュバルツシルド半径とコンプトン半径が一致する長さ、という別の表現もあるのだが、それは言い換えれば粒子がブラックホールになってしまうスケール、と表現できることも納得できるだろう。

さて、残念ながらプランクエネルギーを生成することは不可能だ。

$E_{pl} = m_{pl}c^2 \sim 10^{16} \text{TeV}$ もあり、最強の加速器である LHC できえ「わずか」14TeV しかない状況を考えれば、如何に途方もなく巨大なエネルギーが必要なのがわかる。超弦理論の実験検証が絶望視されてきたわけも頷けるだろう。

しかし、もし、前述の様に近距離で重力が強まるなら、それは万有引力定数が上の計算よりも大きくなること、つまりブラックホールの生成条件がずっとゆるくなる事を意味する。つまり、表現を変えれば万有引力の法則が近距離で変化をするならば、プランクスケール自身の値が変更される事を意味する。本当にこんな事がおこるのかどうかはまさに一か八か、やってみる以外にない。理論家達は、ブラックホール生成

以外にも重力に関係する他の新現象を大きな余剰次元の証拠として提案している。これらを総合的に吟味する事で、LHC で余剰次元の証拠が見つかるかもしれない

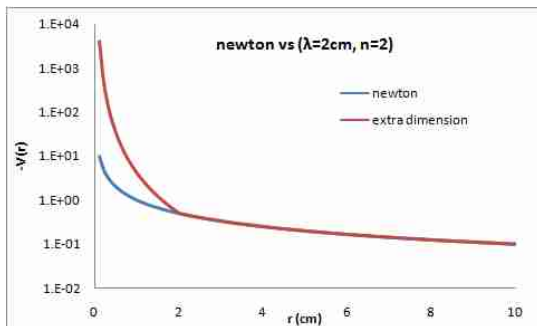
本来、この話は万有引力の法則の検証だった。加速器の話は逆二乗則のテストと定量的にどういう関係にあるのだろうか？もし大きな余剰次元があれば、ブラックホールが生成される条件の式の形が変更される。重力ポテンシャルのべき乗則が変わるからである。余剰次元方向の大きさ Λ 、つまり逆二乗則がずれるはじめるスケールと、ここで述べたブラックホールが生成される条件との関係を調べてみよう。まず、重力ポテンシャルの形を下記のように変更してみる。

変更前：
$$V(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

変更後：
$$V_{r \geq \Lambda}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$V_{r \leq \Lambda}(r) = -G' \frac{Mm}{r^{1+n}}$$

このように、 Λ の外側では従来どおりのニュートンの法則、内側では高次元でのべき乗則を満たすと考える。



上の図は、純粋なニュートン重力と、ここで考えたモデルとを比較したものであり、 $\Lambda = 2\text{cm}$ 、 $n = 2$ の場合の重力の法則である。つまり、 2cm より内側では5次元になるという例である。

さて、図の様に、これらは $r = \Lambda$ で接続しなければならないので、

$$V_{r \geq \Lambda}(r = \Lambda) = V_{r \leq \Lambda}(r = \Lambda)$$

を満たす必要がある。これを解くと、

$$-G \frac{Mm}{\Lambda} = -G' \frac{Mm}{\Lambda^{1+n}}$$

つまり、

$$G' = \Lambda^n G$$

となる。よって、このモデルは新しい重力の法則を

$$V_{r \geq \Lambda}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$V_{r \leq \Lambda}(r) = -G \Lambda^n \frac{Mm}{r^{1+n}}$$

と考え直すものである。

さて、万有引力定数とプランク質量との関係は

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

であるが、これはあくまで Λ の外側の世界でのプランク質量だと考え直す。 Λ の内側では、本来の「修正されたプランク質量」になると考えてみよう。この値が修正された万有引力定数 G' を用いてどう書けるかを考えてみよう。

そもそも、プランク質量というのはシュバルツシルド半径とコンプトン波長が一致する条件から得られたものだった。まず、

3+n 次元空間でのシュバルツシルド半径を求めてみよう。3次元の場合は

$$\frac{1}{2}mc^2 - G \frac{Mm}{r} < 0$$

つまり、

$$\frac{1}{2}mc^2 + \text{重力ポテンシャル} < 0$$

を満たす半径としてシュバルツシルド半径が得られた。3+n 次元空間での重力ポテンシャルは前述の通り

$$V_{3+n}(r) = -G' \frac{Mm}{r^{1+n}}$$

で得られる。

よって、シュバルツシルド条件は

$$\frac{1}{2}mc^2 - G' \frac{Mm}{r^{1+n}} < 0$$

となる。これを解くと、

$$r < \frac{2G'M}{c^2}$$

となり、3+n 次元空間でのシュバルツシルド半径は

$$a_{3+n}^{1+n} = \frac{2G'M}{c^2}$$

で与えられると考えることができる。

さて、いよいよ修正されたプランク質量 m_{3+n} を算定する。コンプトン波長は空間次元とは無関係の量であるから、式は3次元の場合と同じで

$$\frac{\hbar}{m_{3+n}c} = a_{3+n}$$

これを解けばよい。即ち、

$$\left(\frac{\hbar}{m_{3+n}c} \right)^{1+n} = \frac{2G'm_{3+n}}{c^2}$$

なので、

$$m_{3+n}^{2+n} = \left(\frac{\hbar}{c} \right)^{1+n} \frac{c^2}{2G'}$$

となる。これが修正されたプランク質量と修正された万有引力定数の関係を与える。

さて、ここまでは純粋に3+n 次元空間の場合を考えてきた。ここで、余剰次元空間がスケール Λ にまるまっているモデルに戻ろう。このモデルでは $r = \Lambda$ の内側では3+n 次元、外側では3次元を考え、その力の大きさの接続条件から

$$G' = \Lambda^n G$$

を得ていた。これを用いると、結局

$$m_{3+n}^{2+n} = \left(\frac{\hbar}{c} \right)^{1+n} \frac{c^2}{2G\Lambda^n}$$

となる。特別な場合として、3次元に戻るかを確認しよう。

$$m_{3+0}^2 = m_{pl}^2 = \left(\frac{\hbar}{c} \right)^1 \frac{c^2}{2G} = \frac{\hbar c}{2G}$$

となり、確かに初めの式に戻る。

さて、 m_{3+n} と $m_{pl} \equiv m_3$ の関係はこれらの結

果から、

$$m_{3+n}^{2+n} = \left(\frac{\hbar}{c} \right)^n \frac{m_{pl}^2}{\Lambda^n}$$

で与えられる。

つまり、 Λ が大きくなればなるほど、修正されたプランク質量 m_{3+n} は小さくなり、ブラックホールが生成されるエネルギーが低くなるのである。 Λ について解きなおしてやると、

$$\Lambda^n = \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n \frac{m_{pl}^2}{m_{3+n}^{2+n}}$$

あるいは

$$\Lambda = \frac{\hbar c}{m_{3+n} c^2} \left(\frac{m_{pl}}{m_{3+n}}\right)^{2/n}$$

となる。

さて、現実的な場合を計算してみよう。この修正されたプランク質量に相当するエネルギーを加速器で衝突点に生成出来ればブラックホールが生成されると考えてよいので、例えば 1TeV くらいを仮定してみよう。

$m_{3+n} = 1\text{TeV}/c^2$ と置いてやると、

$m_{pl} = 10^{16}\text{TeV}/c^2$ を用いて、

$$\begin{aligned} \Lambda^n &= \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n \frac{(10^{16}\text{TeV}/c^2)^2}{(1\text{TeV}/c^2)^{2+n}} \\ &= \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n 10^{32}\text{TeV}^{-n} c^{2n} \\ &= \frac{(\hbar c)^n}{\text{TeV}^n} \times 10^{32} \\ &= \frac{(200\text{MeV} \cdot \text{fm})^n}{\text{TeV}^n} \times 10^{32} \\ &= (2 \times 10^{2+6-15-12} m)^n \times 10^{32} \\ &= (2 \times 10^{-19} m)^n \times 10^{32} \end{aligned}$$

よって、

$$\Lambda = 2 \times 10^{32/n-19} m$$

となる。(但し、プランク質量の定義にニュートンの万有引力定数の代わりにアインシュタインの重力定数 $\kappa^2 = 8\pi G$ を用いる流儀だと、 $m_{pl} \sim 10^{15}\text{TeV}/c^2$ となって、

$\Lambda = 2 \times 10^{30/n-19} m$ となる。多くの論文はこ

ちらを用いている。)

この式は、もし修正されたプランクエネルギーが 1TeV の場合、逆二乗則がどの距離からずれ始めるかを示すものである。もし、余剰次元が 1 つだけ、つまり $n=1$ ならば、 $\Lambda = 2 \times 10^{13} m$ となり、これは太陽系を超える大きさとなる。もしこれが本当なら、太陽系の天体の運行が逆 3 乗則に従っているはずなので、これは既に排除されているありえない場合である。

ところで、 $n=0$ の「普通」の場合は再現されるだろうか？

$$\begin{aligned} \Lambda^n &= \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n \frac{m_{pl}^2}{m_{3+n}^{2+n}} \\ &= \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n \frac{1}{m_{3+n}^n} \left(\frac{m_{pl}}{m_{3+n}}\right)^2 \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(\frac{\hbar}{c}\right) \frac{1}{m_{3+n}} \left(\frac{m_{pl}}{m_{3+n}}\right)^{2/n} \\ &= \frac{\hbar c}{m_{3+n} c^2} \left(\frac{m_{pl}}{m_{3+n}}\right)^{2/n} \end{aligned}$$

となる。この式は、 $n=0$ の場合一般に発散する。有限の値を与えるのは $\frac{m_{pl}}{m_{3+n}} = 1$ の場

合で、

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\hbar c}{m_{3+0} c^2} (1)^{2/0} = \frac{\hbar c}{m_{pl} c^2} \\ &= l_{pl} \end{aligned}$$

となり、なんと Λ はプランク長そのものになることを要求する事がわかる。つまり、通常考えてきた非常に小さなプランク長は、

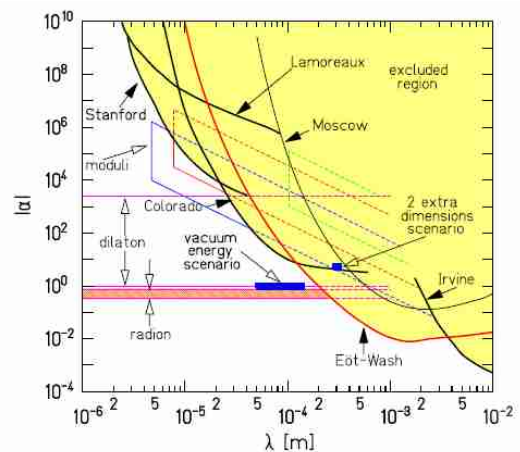
暗黙の内に3次元、つまり $n=0$ を仮定したために得られていた異常に小さなものだったのかも知れないのである。

さて、面白いのは $n=2$ の場合、つまり5次元空間を考える場合だ。この時、

$\Lambda = 2 \times 10^{-3} m \sim 2mm$ となる。つまり、1TeV 程度のエネルギーの集中が可能な加速器実験は、mm 程度の大きさの逆二乗則の直接検証実験と同じ程度の感度を持つことがわかる。いずれにせよ、複合粒子である陽子同士の衝突である LHC 実験では、陽子内部のクォーク同士が得られる衝突エネルギーは 1/3 程度の 4TeV 程度となり、上記の計算に近い値となる。つまり、mm を切るスケールでの近距離重力実験は、超巨大加速器での探索実験に匹敵しうる事がわかる。但し、これは上述の通り、大きく余剰次元の数に依存している。 n が2よりも大きい場合に関しては、逆二乗則のテストは加速器実験に勝てる見込みはないが、自然がどうなっているのかもまたわからないのである。最近の説によると、どうやら我々の知っている基本相互作用の数と、ここで考えている大きな余剰次元の数には直接的な関係があるかも知れないそうである。

以上の背景を受けて、近距離重力の直接観測実験を行う。最先端は上述の通り、mm を切るスケールを目指しているが、この演習では cm スケールでの検証を行う。参考までに、現在の最先端の状況を下図に示しておく。どの精度を目指すかによるが、ニュートン重力と同程度の精度を考えても 0.1mm に達している。つまり、加速器のエネルギーで考えれば数 TeV に相当する領域

が探索された事になる。この様な、実験室で行われる実験はテーブルトップ実験と呼ばれる。せいぜい数人で、小さな装置で行うテーブルトップ実験が千人に達する規模で行う巨大科学である衝突型加速器の実験の感度を上回る部分があるというのはわくわくすることだ。



この図で、黄色い領域が排除された領域である。10 ミクロンを下回る領域では、何とニュートン重力より 100 万倍も大きな力が働かない保障すらない状況であることがわかる。

この図を見ると、では実験的にはどの領域を調べるのがよいのかと考えてしまう。近距離であればあるほどよいか、というと、測定精度がどんどん悪くなるのでよほど α が大きくないと何も見えないのである。はじめに、この湯川型ポテンシャルは未知の中距離力を探索する際の式の取り方だと書いた。これと、これまでに考えてきた余剰次元モデルは相容れないものである。しかし、余剰次元モデルでの

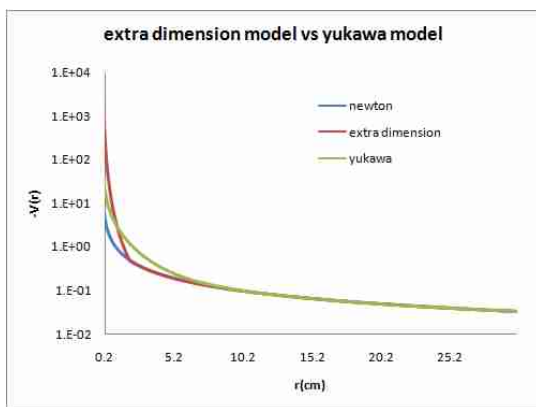
$$V_{r \geq \Lambda}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$V_{r \leq \Lambda}(r) = -G \Lambda^n \frac{Mm}{r^{1+n}}$$

という関数と、湯川ポテンシャル型

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r} (1 + \alpha \exp[-\frac{r}{\lambda}])$$

は実は形として少し似ている。



上の図は、 $(\alpha = 4, \lambda = 2\text{cm})$ での湯川型と $(n = 2, \Lambda = 2\text{cm})$ での余剰次元モデルを比較したものである。

あまりぴったり一致するとは言いがたいが、大体の換算をつける事は数学的には可能であり、実際、

$$\alpha = 2n$$

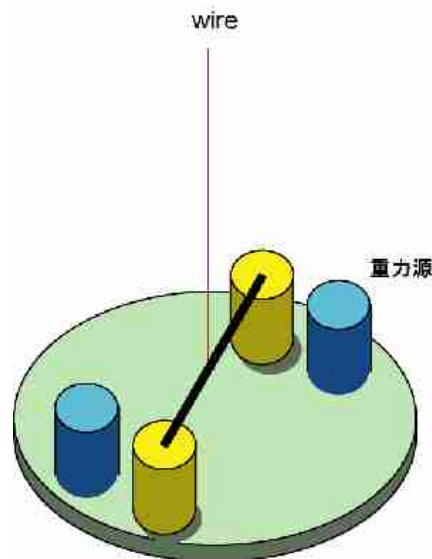
という非常に簡単な関係が成り立つとする論文もある。つまり、 $n=2$ を考えるなら、 $\alpha = 4$ 程度になるはずなのである。その場合はニュートン重力が見える程度の高精度実験が可能な比較的大きめのスケールで行う事が得策となる。

5. 実験装置

この演習実験では、1798年にキャベンディッシュが行った、ねじれ秤を用いた測定原理

をそのままスケールだけを小さくして実行する。

下図の様に両端に質点が設置された棒の中心を細いワイヤーで鉛直に吊るしたねじれ秤を考える。このねじれ秤に、重力源を近づけることでねじれ方向にトルクが生じる様にし、その角度変位を計測する事でトルクを逆算する、というのがこの実験の原理である。



細いワイヤーのねじれ変形に関しては、ねじれのトルクと角度変位の間には比例関係が成り立つと推測できる。この仮定は、ねじれ方向の運動方程式が、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

と、上記の仮定

$$\tau = -\kappa\theta$$

(κ は比例係数。バネ定数に相当)

を合わせて、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

と得られることから確認できる。即ち、こ

の運動方程式の解は単振動となる事から、角度変位が時間の関数として \sin カーブとなる事が確認できればよい。実際、小さな角度変位に対して、この仮定は金属ワイヤーに関しては非常によく成り立つことが知られている。

ねじれ秤の慣性モーメント I は形状がわかれば計算で求める事が出来る。そこで、ねじれ方向の単振動の周期を測定することで、復元定数 κ を決定する事が出来る。上記の運動方程式は

$$\theta \propto \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{I}}t\right)$$

の形の解を持つから、その周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

である。これを逆に解いて

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

から実験的に求める事が出来る。

慣性モーメントは、回転軸をワイヤーと一致させるとすると、質点の場合は

$$I = \int_{\text{質量のある部分}} \rho r^2 dV \\ = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

と簡単に求める事が出来る。逆二乗則の検証には相対値だけがわかればよいが、計測した力の絶対値を評価する際には、この慣性モーメントは正しく幾何学的形状を考慮して積分計算を実行する必要がある。

さて、これで κ が評価できるようになったので、ねじれ秤の外部に置いた、重力源

を回転させた際に、ねじれ秤がどれだけ角度変位したかがわかれば、元のトルクを求める事が出来るようになった。

6. 理論予想

実験結果を見る前に、はたしてどれくらい変位が期待できるかを計算しておこう。これは製作した装置によって勿論異なる。必要な情報は、重力源の物体と捩れ秤につけた物体との間の重力の大きさと、相互の位置関係である。まずは質点を仮定して、次に余裕があれば線を仮定して計算してみよう。厳密には、これも積分計算を実行させる必要がある。

上図の様なねじれ秤の系を考えよう。捩れ秤の腕の長さ（中心から質点までの距離）を R 、2つの重力源を結ぶ直線とねじれ秤との角度を θ 、重力源1つの質量を M 、ねじれ秤の片方の端につけられた質量を m とすると、トルクは初等幾何学で簡単に求める事が出来て、

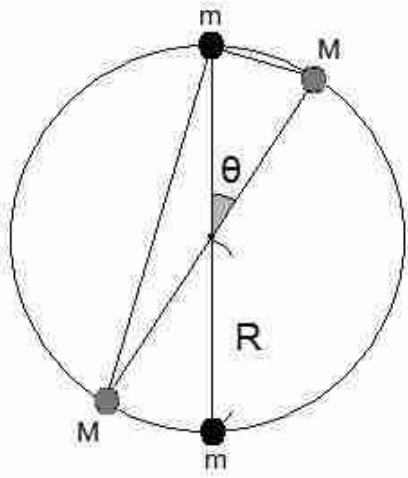
$$N = G \frac{Mm}{\sqrt{2}R} \left\{ \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{1-\cos\theta} - \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{1+\cos\theta} \right\}$$

となるので、確認しよう。

下図の様におかれたねじれ秤にはたらくトルクを計算で求めよう。トルクは、2質点間に働く力を F 、回転中心からの距離を R とし、さらに m と M の距離を r とすると、

$$\mathbf{N} = \mathbf{F} \times \mathbf{R}$$

で与えられることを思い出そう。



今回は、質量源が2ヶ所存在するため、2ヶ所分を足し合わせなければならない。

まず、上部のMによるトルクを N_1 とすると、

$$N_1 = RF \sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = RF \cos \frac{\theta}{2}$$

さらに力 F に

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{2R^2(1 - \cos \theta)}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} N_1 &= G \frac{Mm}{2R(1 - \cos \theta)} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= G \frac{Mm}{2\sqrt{2}R} \frac{\sqrt{1 + \cos \theta}}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

さらに下部のMによるトルク N_2 も考慮すると、トルクの方法は逆になるので、

$$N_2 = -G \frac{Mm}{2\sqrt{2}R} \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{1 + \cos \theta}$$

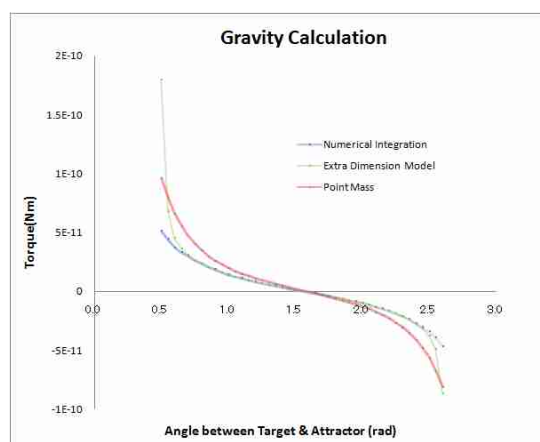
よって全体のトルク N は、下部のトルクも足し合わさるので2倍し、

$$N = G \frac{Mm}{\sqrt{2}R} \left[\frac{\sqrt{1 + \cos \theta}}{1 - \cos \theta} - \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{1 + \cos \theta} \right]$$

となるのである。

実際に用いる物体の形状は、出来るだけ力の大きさを大きくしつつ、近距離に近づけられる方が有利である。その為、平行平板が最も有利で、球対称の物体は計算が楽だがあまり有利とは言えない。しかし、平行平板を実験の際に本当に平行に設置するのは非常に難しいのに対し、球同士はどう置いても理想的な配置に自動的になるというメリットがある。ここでは、中間を取って円柱型を採用している。

さて、球対称でない物体間の重力は質点での計算とは当然合わなくなってくる。慣性モーメントの計算同様、トルクの計算も真面目に体積積分を実行する必要がある。解析的に解くのは不可能に近いので、ここではプログラムを用いた計算結果を参考までに載せておく。質点を仮定した計算とどの程度違いが出るかがわかればそれでよい。



7. 実験装置の製作

この実験では、立教大学で実際に用いている重力装置を一部利用して、出来るだけねじれ秤の部分を手作りして重力を確認することを目指す。



真空容器の中にねじれ秤を設置し、そのねじれ秤をビデオカメラで撮影する。重力源の置かれた電動回転ステージを回転させてねじれ秤に作用する重力の大きさを変化させ、その前後でのねじれ秤の回転具合を画像から読み取る装置を組み立ててみよう。

8. 実験結果の解析

ビデオカメラで得られた動画データから、ねじれ秤の角度変位の情報を動画解析によって抽出する。実は、0.1度程度は変位があるので、動画解析をさせなくても、静止画を比較しても肉眼でその差を見ることは可能である。最も原始的な解析方法は、得られた静止画を印刷して、角度変位を紙で読み取る事であるので、これを試みても面白

いだろう。

重力測定とは別に、振動状態を時間の関数として得ておく。ここから振動の周期を求め、復元定数 k を求めておく。これも、ビデオデータを注意深く肉眼で観察することで、10%程度の精度で求める事が出来るはずである。より正確には、上記の動画解析の結果を用いれば簡単である。

最終的に得られた角度変位をトルクの絶対値に換算しなおし、ニュートンの法則の予言値と比較してみよう。もし余裕があれば、重力源の角度を色々変えてみて、距離依存性のデータを取得すれば、逆二乗則の検証データそのものが得られる。さらに、重力源の材質を変更すれば、万有引力定数の物質依存性などを確認出来るだろう。

おわりに

大きな加速器を使った素粒子実験は、着想してから実験を遂行し、結果を得るまでに年単位の時間がかかります。ここで行う様なテーブルトップ実験は思いついたアイデアをすぐに試してみることが出来る点で、とても魅力的です。もちろん、意味のある探索が可能な実験方法は非常に限られたものになります。私たちは、この研究をいろいろな方法で発展させるべく新しい画期的なアイデアを試行錯誤しています。皆さんも、こうすればもっと高精度で、あるいはもっと近距離で測定が出来るのではないかなど色々と考えてみてください。そして機会があればそのアイデアを実際に、今度は共同研究者としてチャレンジしてみましょ