

演習(7)

磁気スペクトログラフとベータ線のエネルギー分析

# このテキストの内容

## 第1章 演習の概要

演習の目的、演習のおおまかな流れ  
演習スケジュールの目安

## 第2章 セットアップ

Brawne-Buechnerのスペクトログラフ、  
Brawne-Buechnerのスペクトログラフを作図してみよう、  
本演習に用いるスペクトログラフの組立図、  
台座への座標、ソース位置、焦点位置等の作図、台座と電磁石の位置合わせ、  
励磁曲線をとろう、  
真空槽の据付

## 第3章 ベータ線スペクトルの測定

$^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ ベータ線源、  
ベータ線スペクトルをとろう、  
ベータ線源と検出器(シンチ)をセットする、オシロスコープ、電子回路

## 第4章 ベータ線スペクトルの解析

エネルギースペクトル導出のための各種補正、  
カーブプロットを描こう

## 第5章 評価とまとめ

評価のポイント、まとめのポイント、発表(プレゼン)のポイント

# このテキストの内容(つづき)

## 付録1 単位系に慣れよう

自然単位系、磁場中の荷電粒子の運動

## 付録2 資料その他

磁場分布、Fermi関数、測定データ解析シート(例)、  
電子のレンジ(飛程)、070723のデータ

## 付録3 装置の操作と安全について

電気保安、主電源と電源の操作、  
電磁石通電の注意、電流と温度モニター、ガウスメータ、  
真空装置の取り扱いと安全、放射線安全、緊急時の連絡先

## 付録4 イオン光学の基礎

輸送行列を用いた磁場中における荷電粒子の運動の記述、  
輸送行列の一般理論、ビームラインと行列要素、  
主なビームライン要素、  
ビームライン要素と輸送行列(ドリフト空間、矩形収束磁石、セクター型偏向磁石)、  
磁場による粒子の偏向、結像光学系と分光器(スペクトロメータ)

## 付録5 セクター型磁石を用いたスペクトロメータとBarber's Rule Barber's Rule

## 付録6 ベータ崩壊とベータ線スペクトル ベータ崩壊の基礎知識

# 第1章 演習の概要

## 演習の目的

この演習により

分光学的手法を用いた実験研究の手続きを一通り体験する。

主な内容は次のとおりである。

- ①イオン光学理論により導かれる幾何学的規則(Barber's Rule)に基づいて設計された荷電粒子の運動量分析システム—磁気スペクトログラフ—を組み立てる。
  - ✓イオン光学理論に触れ、荷電粒子の磁場中での振舞いの記述法を学ぶ。
  - ✓システムの組立てを実践することによって、荷電粒子の運動量分析の仕組みを体得する。
  
- ②電磁石スペクトログラフを運転し、ベータ崩壊からのベータ線エネルギースペクトルを測定する。
  - ✓荷電粒子の運動量分析装置としての機能を確認し、性能を評価する。
  - ✓測定を通じて、ベータ崩壊の仕組みを理解する。

## 演習のおおまかな流れ

- (1) スペクトログラフのセットアップ
- (2) ベータ線エネルギースペクトルの測定  
データの収集
- (3) エネルギースペクトルの解析  
データの解析と評価
- (4) 成果のまとめ

## 責任者(担当)をきめる

- 安全担当(電気、磁場、重量物取扱、真空、チェックソース)
- 真空担当(真空ポンプとバルブ操作、真空度管理)
- 励磁担当(電源操作と磁場測定)
- ベータ線検出器担当(検出器位置と回路(バイアス電源と計数回路))

## セットアップ

- ソース位置座標、各運動量に対する焦点位置座標計算(Excel)および軌道作図
- (座標の置かれた)台座と電磁石のアライメント(セオドライトの使用)
- 励磁曲線の取得(→真空槽のないときに電流と磁場の関係を測定する)
- 真空槽と電磁石のアライメント(セオドライトの使用)
- 真空引き
- シンチレータ(PMT)の信号確認と電子回路(Discr)の設定(オシロ)

## データ取得

- エネルギー校正(→今回は実施しない)
- $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ ベータ線源によるベータ線スペクトルの測定
- 中心運動量に検出器をセットし、磁場を変えながらスペクトルをとる
- 別の運動量に対する焦点位置に検出器をセットし、磁場を変えながらスペクトルをとる。
- 5通り(以上)の検出器位置に対するスペクトルをとる。  
→1人1通りのスペクトルを解析すること。あとで突き合わせ比較する。

## データ解析とまとめ

### ○スペクトルの補正とエラー

バックグラウンドの取り扱い

運動量分解能とエネルギー分解能

立体角

(エネルギースケール:校正 →今回は実施しない)

統計誤差と系統誤差

### ○カーブプロット

Fermi関数の計算 → 「関数の計算アルゴリズムを与え、Excelで計算!

直線回帰計算と誤差評価 → 直線回帰計算はExcelの機能を使うとよい

### ○評価

実験装置

一様磁場(作図上の仮定)と実際の差(を校正する手段の考察など)

バックグラウンドの要因

系統誤差の要因

エンドポイント( $E_0$ )

直線度または直線からのずれの考察

実験条件の考察

(核行列要素に対する考察)

実験上の工夫・改良点の考察

もっと効率よくするには? 精度を上げるには?

低エネルギー側に感度を持たせるには?



	20	21		22		23		24	25		26		27		28	
	P	A	P	A	P	A	P		A	P	A	P	A	P	A	P
講義、行事等		■		■		■		■	■		■					
指導員																
概要、安全講習、分担	■															
道具講習 電源、ホール素子、測量 真空、検出器、回路、オシロ			■		■											
セットアップ 座標計算と作図 台座のセット 励磁曲線(磁場測定) 真空槽のセットと真空引き 検出器(回路)の設定と設置			■	■												
データ収集 (エネルギー校正) ベータ線源によるデータ取得1 データ取得2								■		■	■	■	■			
データ解析 ベータ線スペクトルの導出 カーブプロット									■	■	■	■	■	■		
評価とまとめ、発表練習													■	■	■	
成果発表																■

演習スケジュールの目安

## 第2章 セットアップ

### 手順

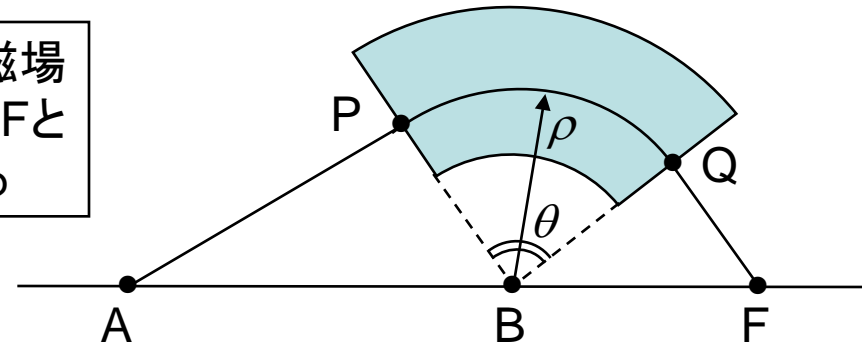
- ソース位置座標、各運動量に対する焦点位置座標計算 (Excel)および軌道作図
- (座標の置かれた)台座と電磁石のアライメント(セオドライトの使用)
- 励磁曲線の取得(→真空槽のないときに電流と磁場の関係を測定する)
- 真空槽と電磁石のアライメント(セオドライトの使用)
- 真空引き
- シンチレータ(PMT)の信号確認と電子回路(Discriminator)の設定(オシロ)

# Browne-Buechnerのスペクトログラフ

スペクトログラフやスペクトロメータ(分光器)の仕組みを理解するには、イオン光学の知識が必要である。本演習に必要なイオン光学理論の知識については、付録4「イオン光学の基礎」と付録5「セクター型磁石を用いたスペクトロメータとBarber's Rule」に解説したのでしっかり学習しておいてもらいたい。

にもかかわらず、実は、本演習のスペクトログラフをセットアップするのに必要な知識は、

物点(A)から出たある運動量のイオンが一樣磁場によって曲げられ焦点(F)に像を結ぶとき、AとFと磁場中の軌道中心(B)は一直線上に結ばれる



という「Barber's Rule」と、

Lorentz方程式から導かれる運動量 $p$ と磁場 $B$ と軌道半径( $\rho$ )の次の関係式:

$$pc[eV] = cB\rho[Tm], \quad c=2.9979 \times 10^8 [m/s]$$

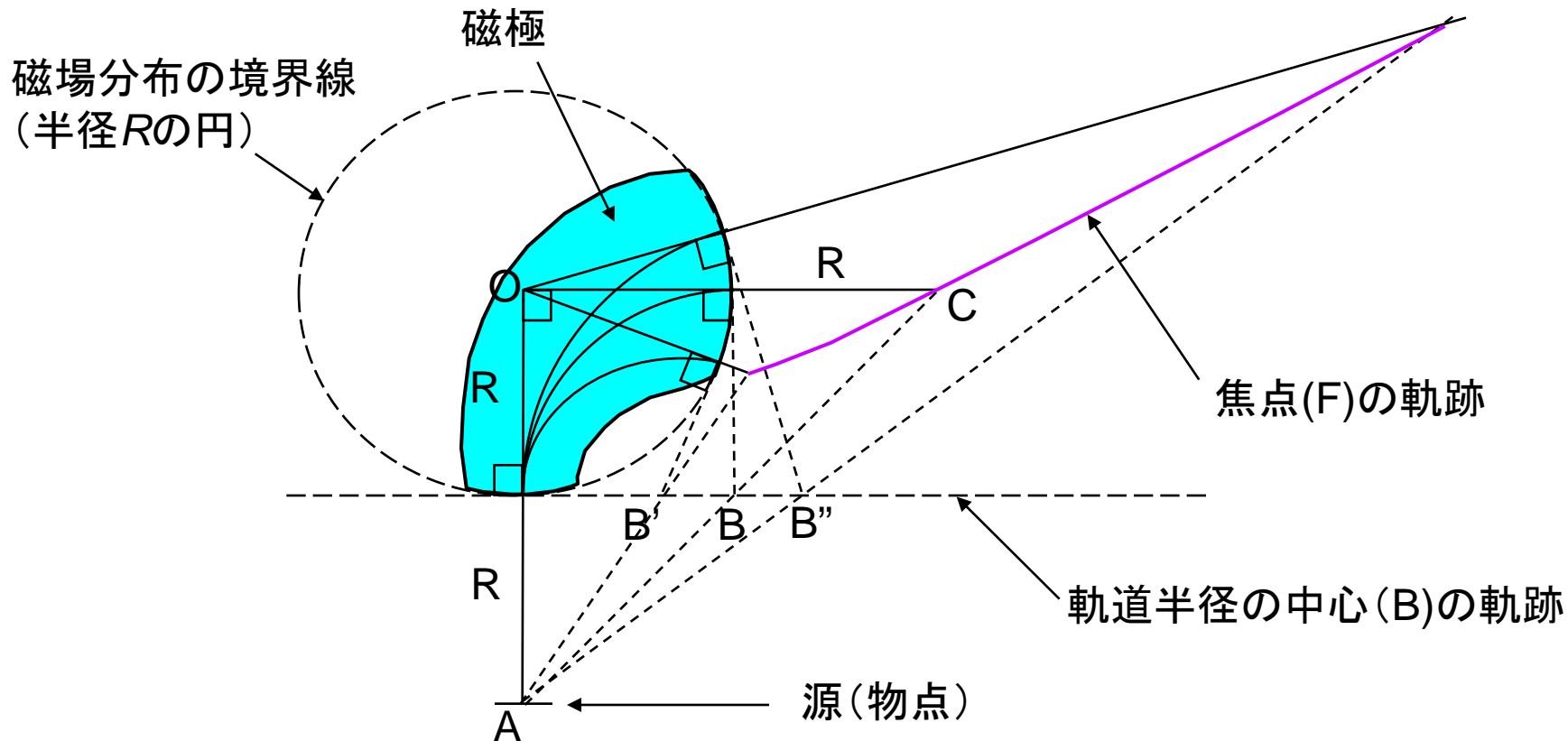
$$p[MeV/c] = 29.979B\rho[kG \cdot m]$$

のたった2つである。

→付録1「単位系に慣れよう」

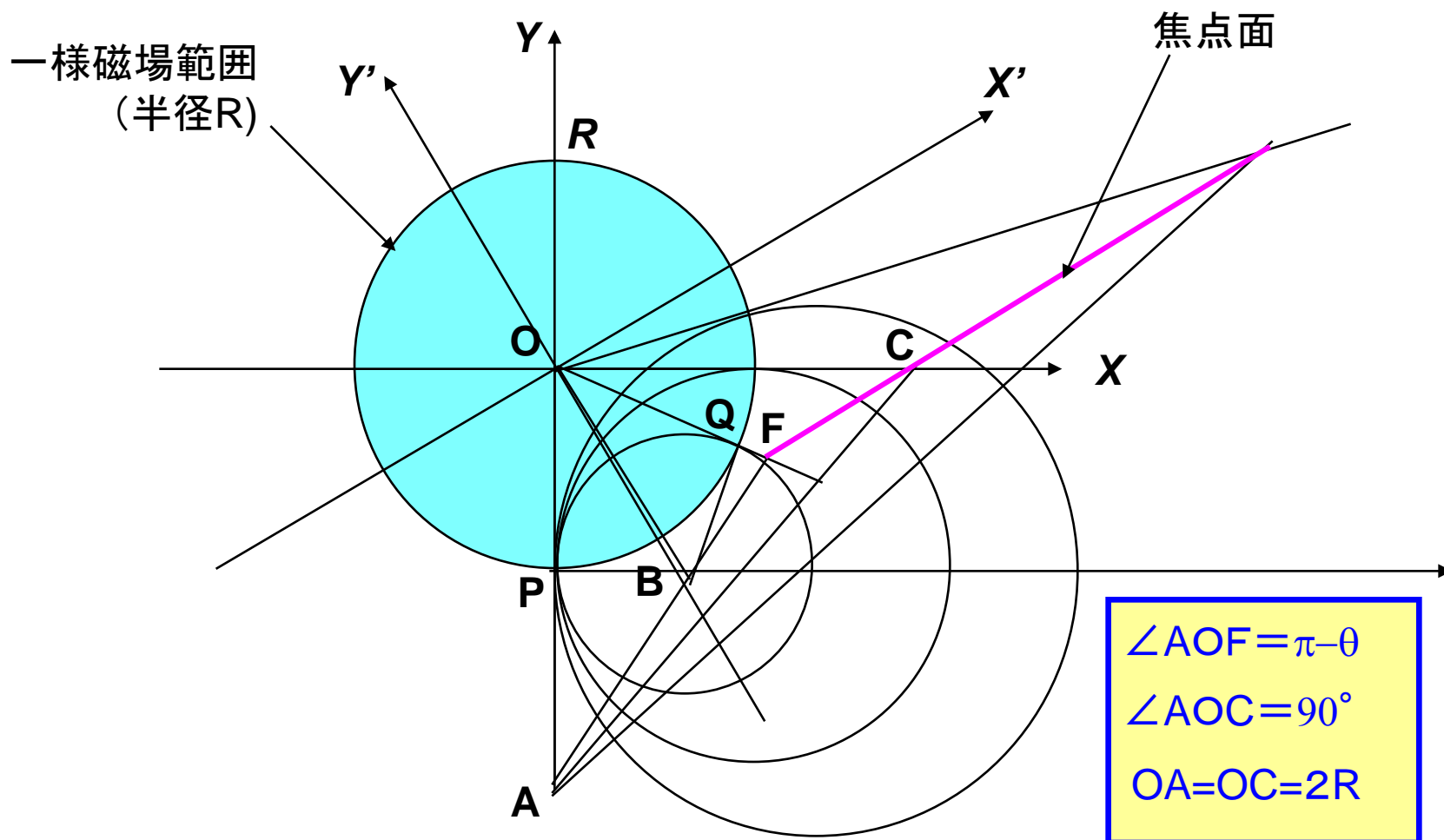
次に説明するとおり、Browne-Buechnerのスペクトログラフは、上図において、 $\theta=90^\circ$ 、 $AP=QF=\rho=R$  という特別な配置を持ったスペクトロメータである。

# Browne-Buechnerのスペクトログラフ



1950年代にMITで建設された円形磁場境界をもつ中心軌道の偏向角が90度のセクター型磁石スペクトロメータの1つ。上図のように半径 $R$ の磁場分布境界をもつ偏向磁石で磁場分布の中心 $O$ から $2R$ の位置に源(光学的物点) $A$ をおくと、Barber's Ruleによって、 $\angle AOC=90$ 度で、 $O$ から $2R$ の位置にある $C$ が焦点(の一つ)となっていることが特徴。適当な磁極形状を採れば広い運動量領域に対する焦点面を持つスペクトログラフになる。電子線のエネルギー分析用磁石などによく使用されている。

# Browne-Buechnerのスペクトログラフを作図してみよう



Q:半径Rの一様磁場分布の中心を原点Oとする直交座標を考える。ソース点AをY軸上(0, -2R)におく。中心軌道は、はじめAからY軸に沿ってP(0, -R)へ向かう。

「Barber's Rule」を用いて異なる運動量( $\rho$ )に対する焦点の位置(焦点面)の座標(X, Y)を計算せよ。

前ページの図のとおり、一様磁場の半径 $R$ に対し軌道半径 $\rho$ の焦点位置座標は

$$Y = -2R(R^2 - \rho^2)/(3R^2 - \rho^2) \quad \Rightarrow$$
$$X = 4\rho R^2/(3R^2 - \rho^2)$$

与えられた $R, \rho$ について、焦点位置の $X, Y$ 座標をExcelで求めてみよう。

と作図される。

このとき、像倍率 $m$ と分散 $\eta$ は、

$$m = -OF/OA = -(R^2 + \rho^2)/(3R^2 - \rho^2)$$

$$\eta = \rho OF(1/OA + 1/OF)$$

$$= -2mR(1/2R - 1/2mR)\rho$$

$$= -m\rho(1 - 1/m) = (1 - m)\rho$$

$$= 4\rho R^2/(3R^2 - \rho^2)$$

①本演習で用いるスペクトログラフでは、  
 $R = 221.3\text{mm}$  とせよ。

また、 $\angle OCF = \phi$ とおくと

$$\tan\phi = -Y/(2R - X) = (R + \rho)/(3R + \rho)$$

$R = \rho$ 、すなわちCの位置では、

$$m = -1 \quad \eta = 2\rho \quad \tan\phi_c = 1/2$$

$\phi_c$  は、台座に軌道を作図するとき便利な座標系に変換するのに必要になる角度

ここで、焦点CにおけるX軸に対する焦点面の傾き $\phi_c$ だけ回転した座標系( $X', Y'$ )を定義する。

$$\begin{aligned} X' &= X\cos\phi_c + Y\sin\phi_c \\ Y' &= -X\sin\phi_c + Y\cos\phi_c \end{aligned} \Rightarrow$$

与えられた $R, \rho$ について、焦点位置の $X', Y'$ 座標をExcelで求めてみよう。

\*台座、真空槽の設置には、 $X', Y'$ 座標系が便利。

たとえば、点Aと点Cの座標は、それぞれ、

$$\begin{aligned} A: X' &= X\cos\phi_c + Y\sin\phi_c = -2R\sin\phi_c = -2R/\sqrt{5} \\ Y' &= -X\sin\phi_c + Y\cos\phi_c = -2R\cos\phi_c = -4R/\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C: X' &= 2R\cos\phi_c = 4R/\sqrt{5} \\ Y' &= -2R\sin\phi_c = -2R/\sqrt{5} \end{aligned}$$

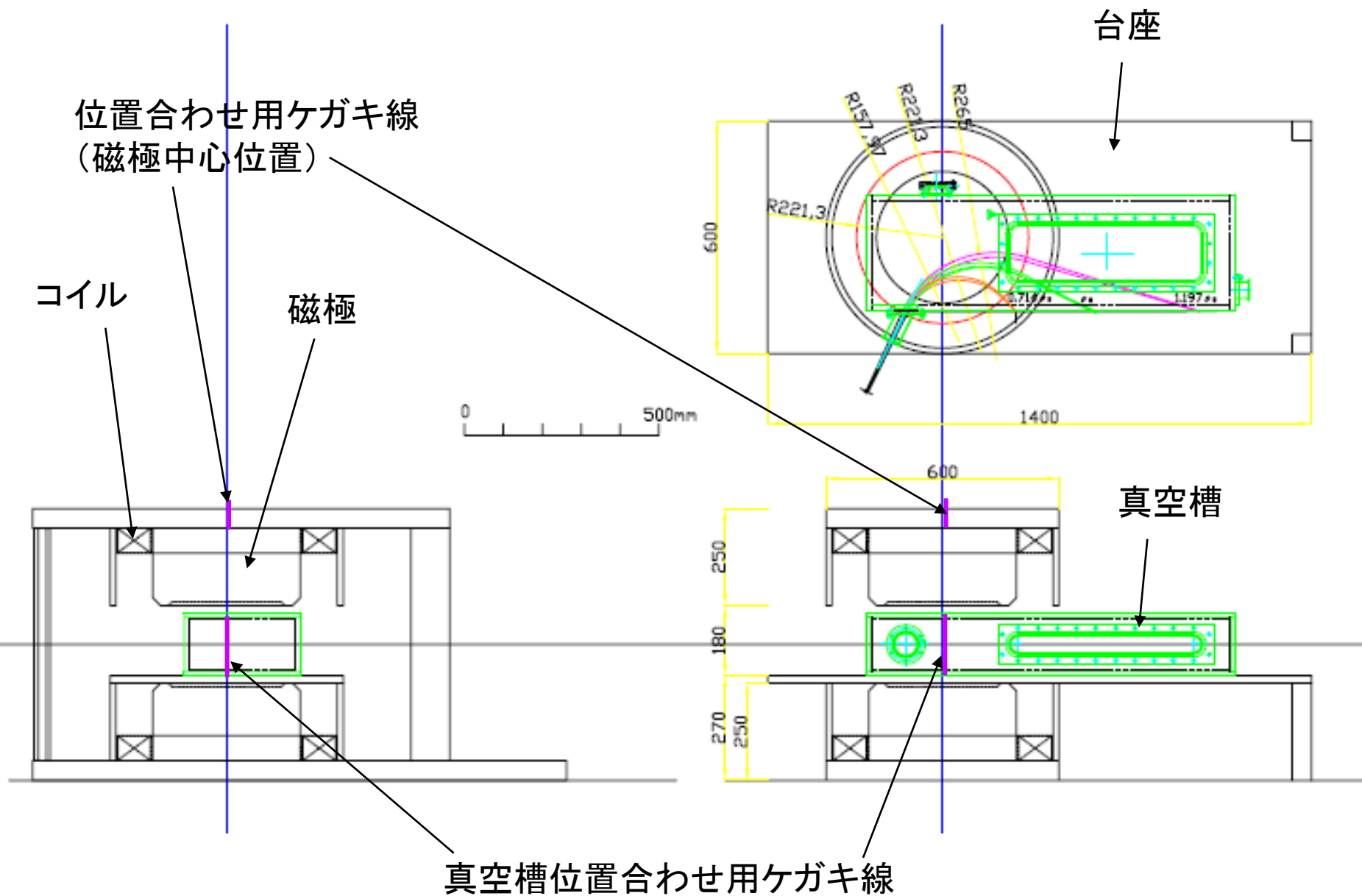
となる。

$\phi_c = \text{atan}(1/2)$ ,  $R = 221.3 \text{ mm}$  を代入すると、

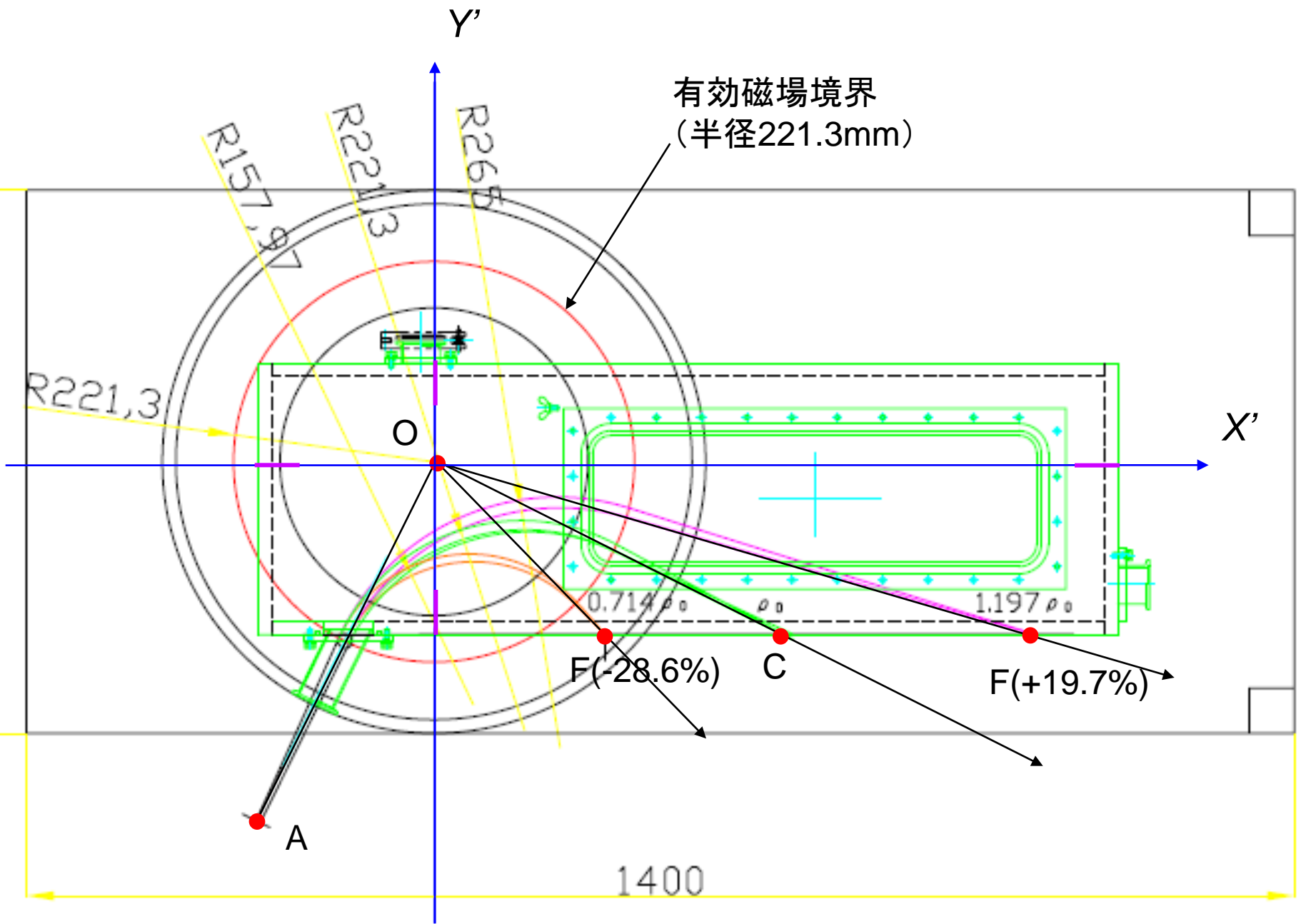
$$A: (X', Y') = (-197.9, -395.9)$$

$$C: (X', Y') = (395.9, -197.9)$$

# 本演習で用いるスペクトログラフの組立図







# 台座への座標、ソース位置、焦点位置等の作図 台座と電磁石の位置合わせ

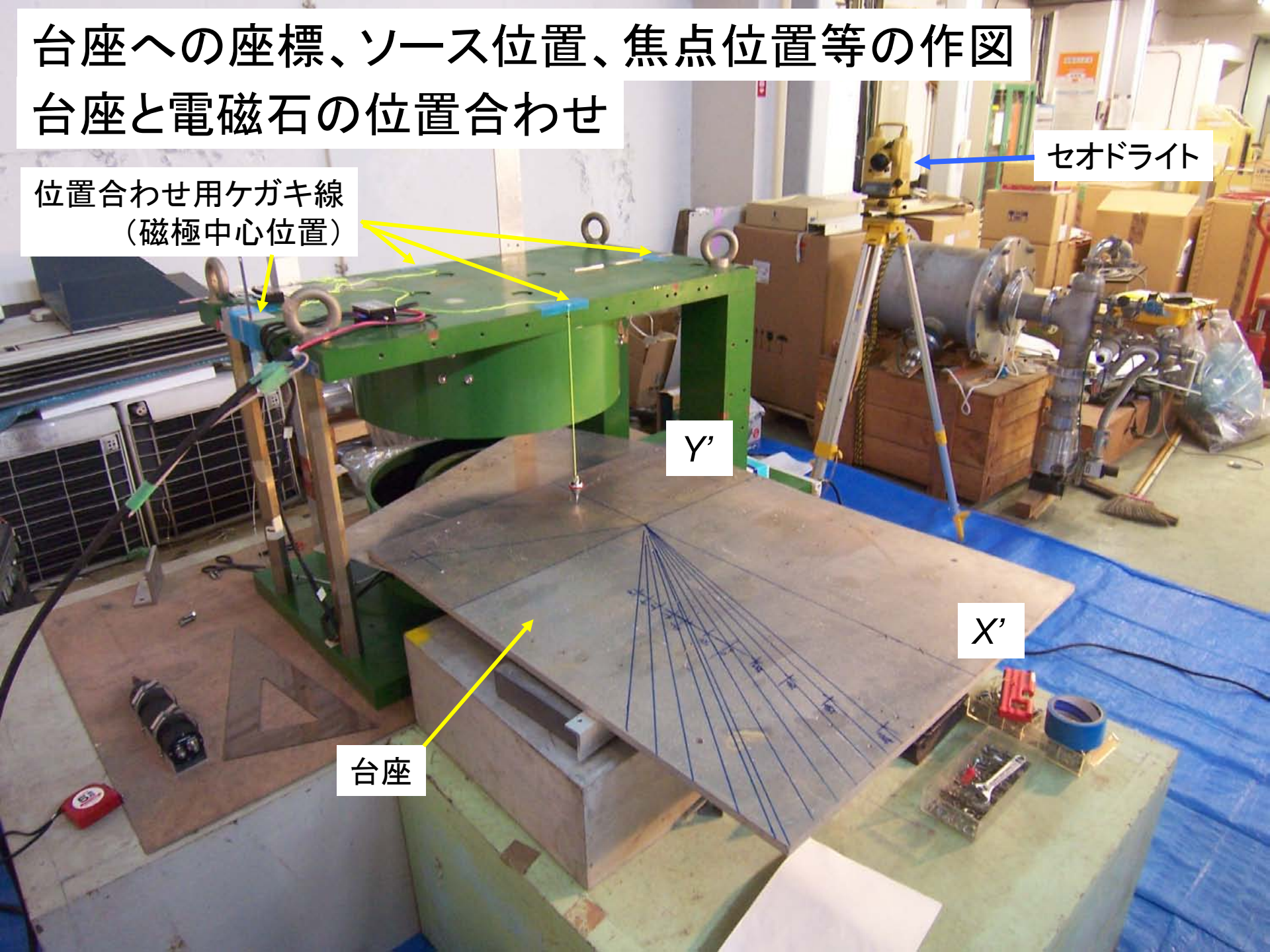
位置合わせ用ケガキ線  
(磁極中心位置)

セオドライト

$Y'$

$X'$

台座





# 励磁曲線をとろう

- ①ガウスメータのホールプローブを電磁石の磁極間隙(ギャップ)の中心に置く。  
→ガウスメータの使い方は、付録3「装置の操作と安全について」を参照。
- ②電磁石に電流を流し、励磁する。  
→電源の操作、励磁中の保安については、付録3を参照。
- ③電流値を変えながら、電流値と磁場の強さを記録し、グラフにしておく。  
→電流モニター(DCCT)の読みは、付録3を参照。

○励磁曲線は、ベータ線スペクトルの測定の際に、中心運動量に対応する磁場の励磁を電磁石コイルに流した電流値でコントロールするのに用いる。

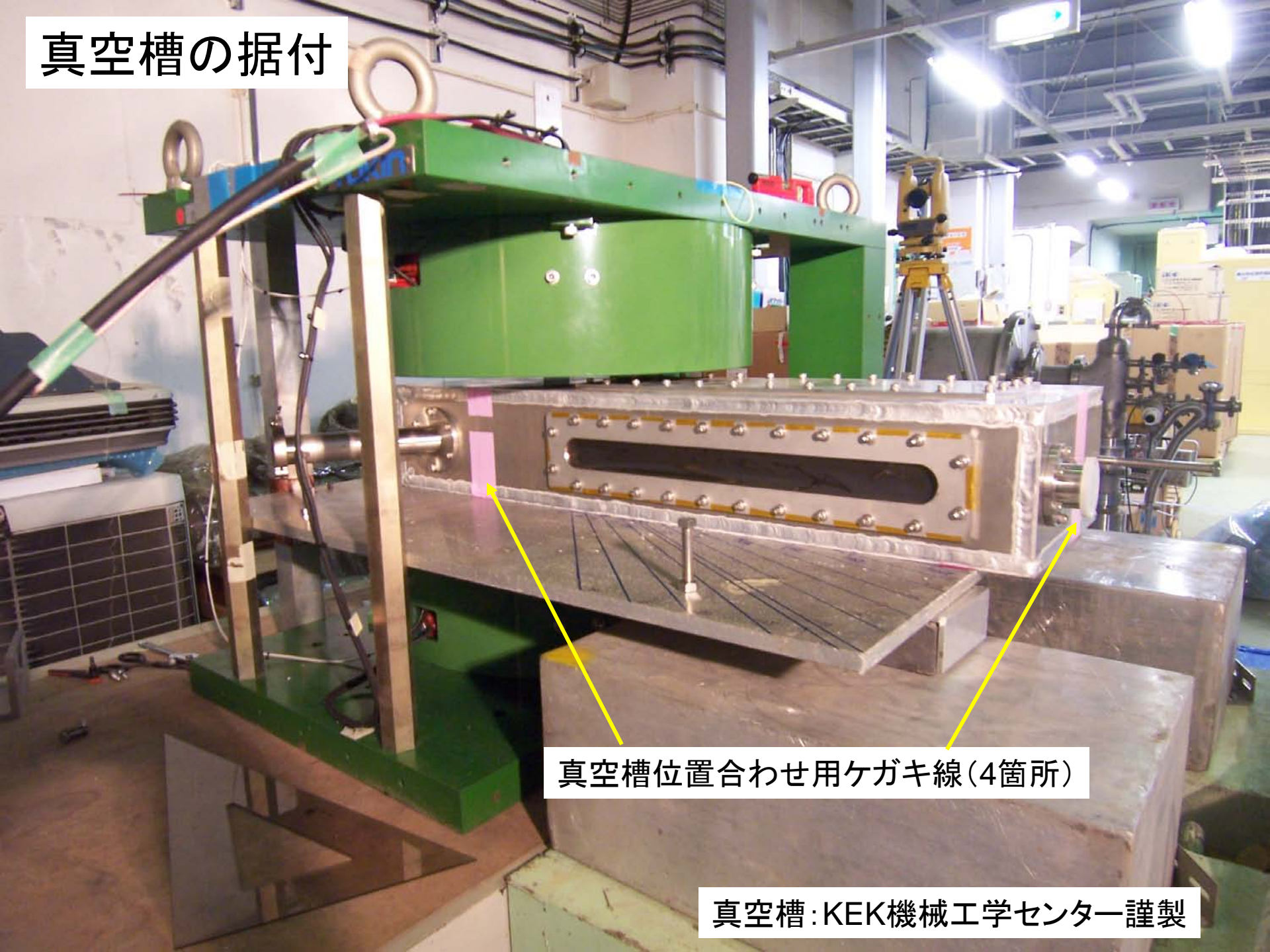
○スペクトル測定のため、中心運動量(に対応する磁場)の値を適当なステップと範囲で変化させる必要があるのだが、その際に十分な精度で電流値を与えられるような励磁曲線をとっておくことが肝心である。

Q:どのくらいのステップと範囲でとればよいか考察してみよ。

対象としているベータ線のエネルギー範囲と必要な磁場を見積もって、適当な励磁範囲とステップの感覚を備えておく必要がある。

⇒第3章「ベータ線スペクトルの測定」の冒頭の「 $^{90}\text{Sr}$ ベータ線源」を参照。

# 真空槽の据付



真空槽位置合わせ用ケガキ線(4箇所)

真空槽:KEK機械工学センター謹製

## 第3章 ベータ線スペクトルの測定

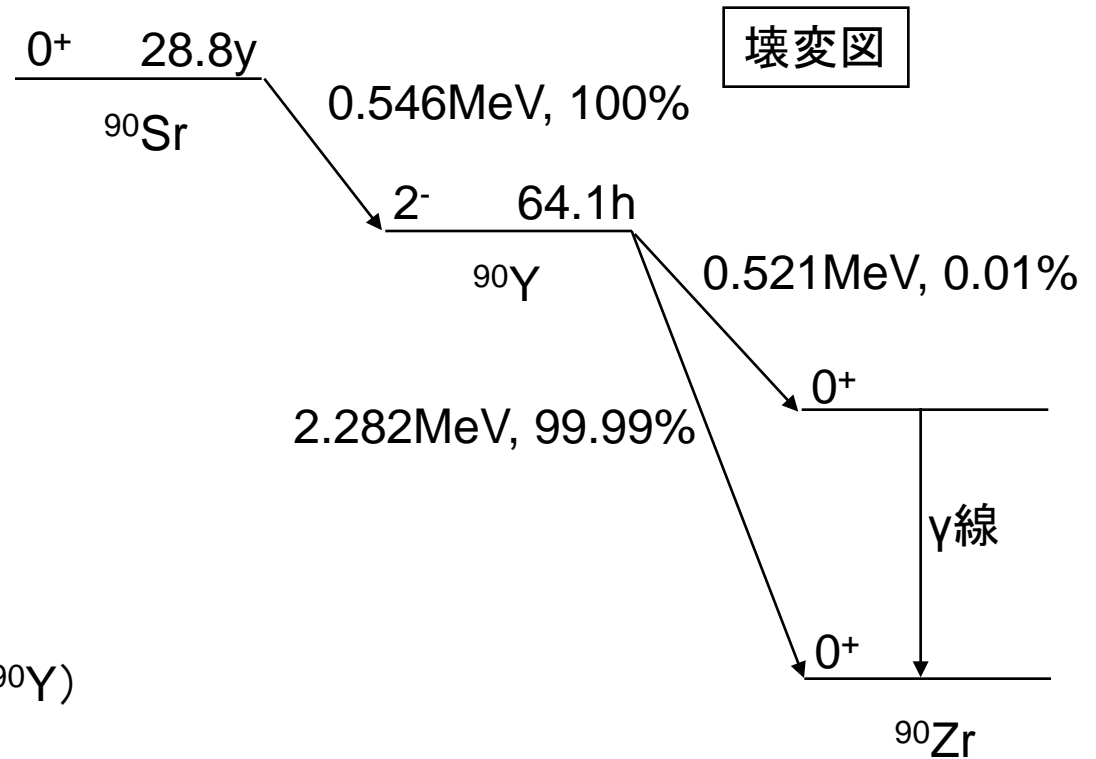
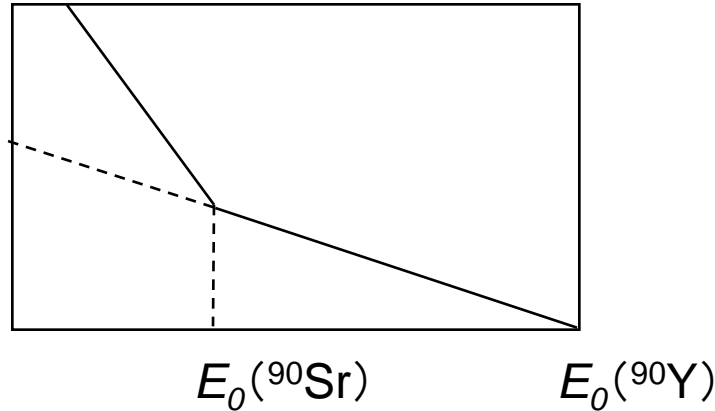
### 手順

- エネルギー校正(→今回は実施しない)
- $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ ベータ線源によるベータ線スペクトルの測定
- 中心運動量に検出器をセットし、磁場を変えながらスペクトルをとる
- 別の運動量に対する焦点位置に検出器をセットし、磁場を変えながらスペクトルをとる。
- 5通り(以上)の検出器位置に対するスペクトルをとる。  
→1人1通りのスペクトルを解析すること。あとで突き合わせ比較する。

# $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ ベータ線源

$^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ ベータ線源からの  
ベータ線エネルギースペクトル  
(カリープロット)

$[P(E)/pEF(Z,E)]^{1/2}$



特徴:

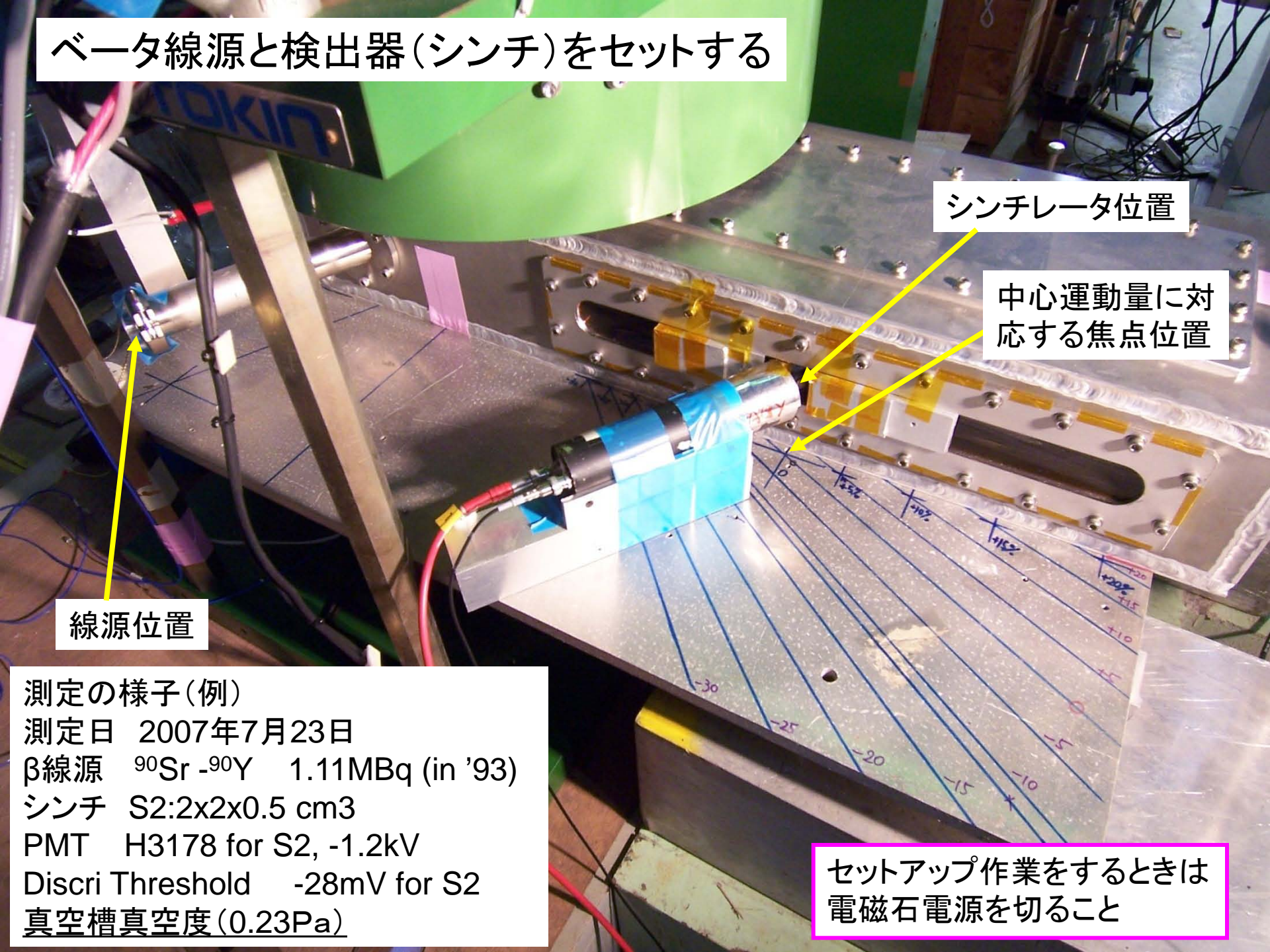
- ①  $^{90}\text{Sr}$ は半減期28.8年で $^{90}\text{Y}$ の基底状態にベータ崩壊する。Q値=0.546MeV  $\Delta J=+2$ , パリティ変化ありなので、第1禁止遷移に分類される。(壊変図)
- ②  $^{90}\text{Y}$ は半減期64.1時間で $^{90}\text{Zr}$ にベータ崩壊する。ほぼ100%が基底状態への崩壊であるが、非常にわずかに第1励起状態への崩壊分岐比がある。それぞれの崩壊のQ値は2.282MeVと0.522MeVである。(壊変図)  $\Delta J=-2$ , パリティ変化ありなので、第1禁止遷移に分類される。
- ③  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ ベータ線源においては、 $^{90}\text{Sr}$ と $^{90}\text{Y}$ は放射平衡にあり、 $^{90}\text{Y}$ から $^{90}\text{Zr}$ の第1励起状態への崩壊を無視すると、2種類のベータ崩壊が混在することになる。  
→ベータ線エネルギースペクトルの重畳。(カリープロット)

# ベータ線スペクトルをとろう

- ①まず、中心運動量の位置に検出器(シンチレータ)を置いてみる。シンチ(有感部)が焦点位置に来るように設置する。
  - 予め、検出器の動作確認を行っておくのがよい。PMT(光電子増倍管)と高圧電源を高圧線(赤いケーブル)でつなぎ、PMTとオシロを信号線(黒く細いケーブル)でつなぐ。高圧電源をゆっくり昇圧し、信号が出ているか確認する。(本演習で用いるPMT(H3178)の最大電圧は-1.5kVである。)
- ②ベータ線源を線源位置にセットする。→この作業は指導員に依頼すること。
- ③PMTからの信号線をオシロからディスクリミネータの入力に戻す。
- ④電磁石に所定の電流を流し、励磁する。
  - 電流と磁場の関係は励磁曲線により対応づけられているはずである。磁場に対応して中心軌道の運動量が決まる。
- ⑤プリセットスケアラコントローラのリセットボタンを押してから、スタートボタンを押し、一定時間の検出器の計数を測定する。
  - プリセット時間は必要な統計精度を考えて決める。時間が少ないと計数の統計的ふらつきが大きくなるし、必要以上に時間をとるのも測定時間の無駄である。
- ⑥電流値(セット値)と計数値(80MHzスケアラの値)を記録する。
- ⑦別の電流値にして、④～⑥を繰り返す。
  - ベータ線のエネルギー(運動量)範囲に対して測定範囲とステップを決めておく。
  - 測定におけるバックグラウンドを評価するために、ベータ線の最大エネルギーを超えたエネルギー(運動量)に対応した測定を複数実施してみよ。同様に、磁場を0にしたときや線源をはずしたときの測定もしておくといよい。
- ⑧中心軌道とは別の焦点位置に検出器を移して、①～⑦を繰り返す。
  - セットアップを変えるときは、必ず電磁石電源をOFFにすること。



# ベータ線源と検出器(シンチ)をセットする



シンチレータ位置

中心運動量に対応する焦点位置

線源位置

測定の様子(例)  
測定日 2007年7月23日  
β線源  $^{90}\text{Sr}$  - $^{90}\text{Y}$  1.11MBq (in '93)  
シンチ S2:2x2x0.5 cm<sup>3</sup>  
PMT H3178 for S2, -1.2kV  
Discri Threshold -28mV for S2  
真空槽真空度(0.23Pa)

セットアップ作業をするときは  
電磁石電源を切ること

# オシロスコープ

画面横  
選択ボタン

表示チャンネル(CH)  
選択ボタン

電圧表示位置(上下)調整ツマミ

時間軸表示位置(左右)調整ツマミ

トリガーレベル調整ツマミ

測定開始・停止ボタン

時間レンジ調整ツマミ

電圧レンジ調整ツマミ

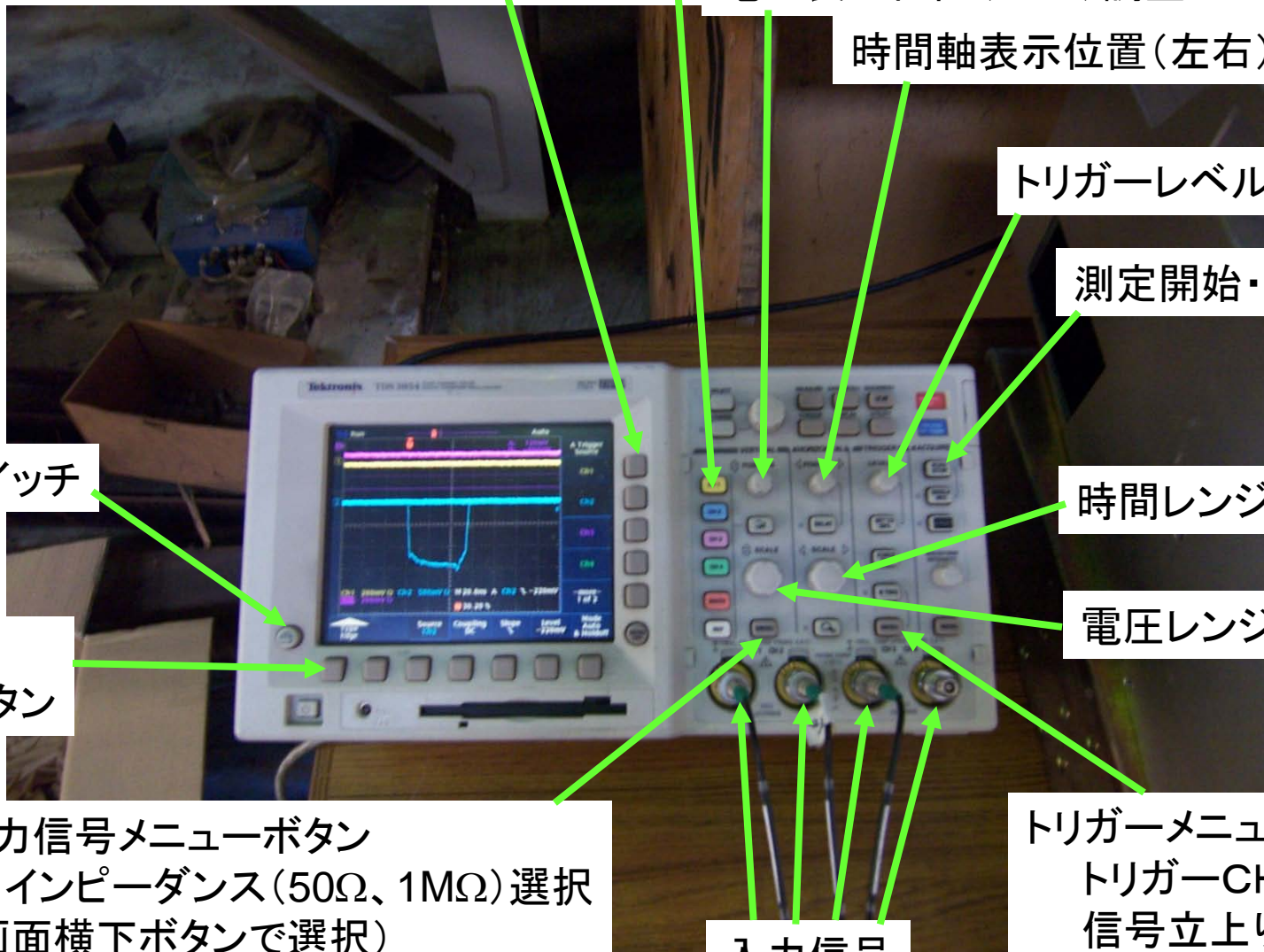
電源スイッチ

画面下  
選択ボタン

入力信号メニューボタン  
インピーダンス(50Ω、1MΩ)選択  
(画面横下ボタンで選択)

入力信号  
CH1~4

トリガーメニューボタン  
トリガーCH選択  
信号立上り方向選択  
(画面横下ボタンで選択)



コインシデンス  
(同時計数)回路

ディスクリミネータ回路  
(閾値:  $-28\text{mV}$ ~)

80MHz  
スケーラ  
(計数回路)

クロックジェネレータ  
(計時用パルス発生器)

PMT用  
高圧電源

プリセット  
スケーラ  
コントローラ

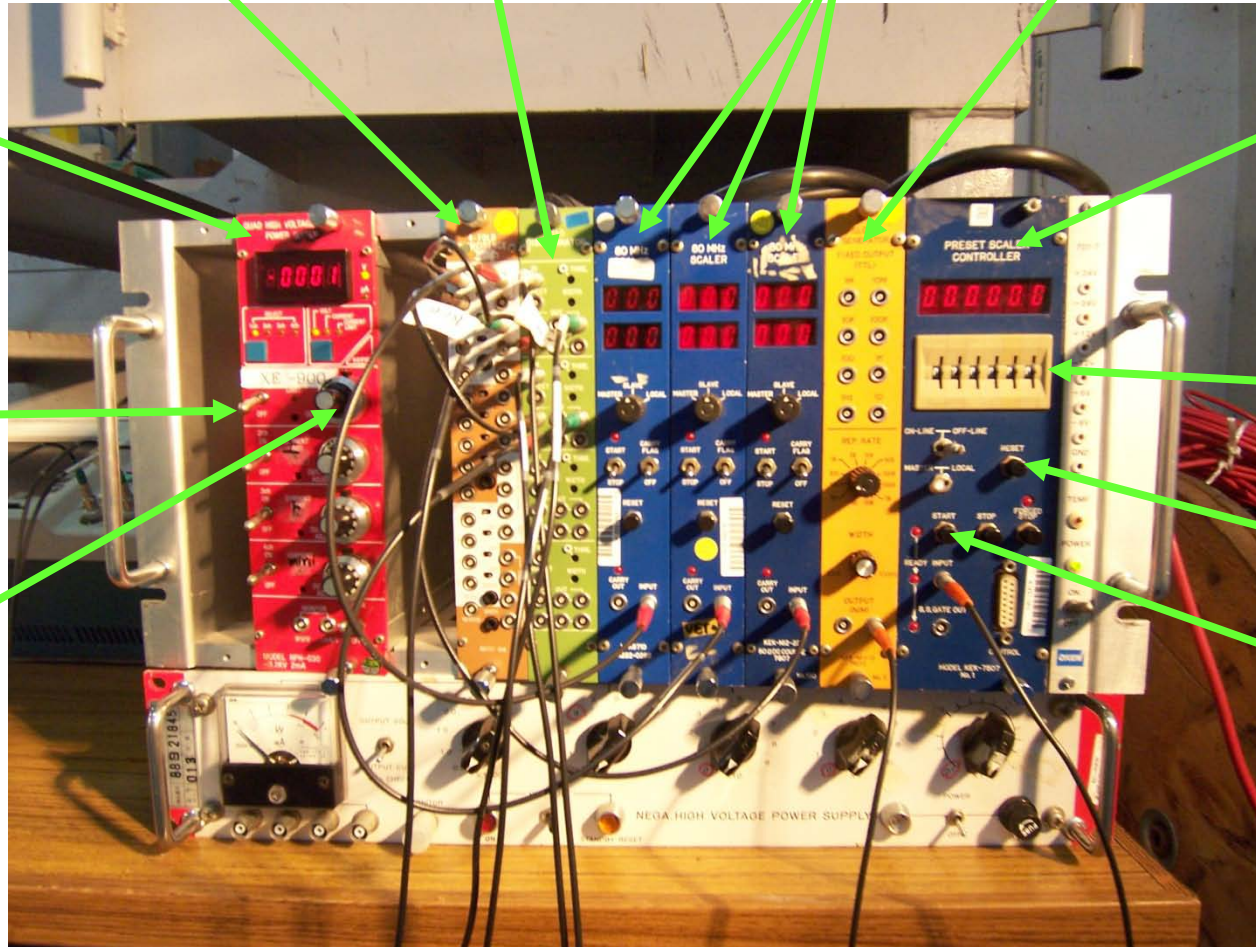
スイッチ

計測時間  
の設定

電圧調整  
ダイヤル

リセット

スタート



## 電子回路

## 第4章 ベータ線スペクトルの解析

### 手順

#### ○エネルギースペクトル導出のための補正とエラー

バックグラウンドの取り扱い

運動量分解能とエネルギー分解能

立体角

(エネルギースケール:校正 →今回は実施しない)

統計誤差と系統誤差

#### ○カーブプロット

Fermi関数の計算 → 「関数の計算アルゴリズムを与え、Excelで計算！」

直線回帰計算と誤差評価 → 直線回帰計算はExcelの機能を使うとよい

# エネルギースペクトル導出のための各種補正

ベータ線のエネルギースペクトルとは、「単位時間当たり単位エネルギー当たりの壊変数（遷移確率に比例した物理量）についてのエネルギーの関数」である。一方、生データは、「ある時間の間にある運動量範囲のベータ線が検出器を鳴らした回数」を表す。磁場を走査しているので、一応、運動量の関数となっている。この生データは、次に述べるとおり、バックグラウンド補正、運動学的補正や幾何光学的補正を経てエネルギースペクトルとなる。

## 1) 生データからバックグラウンドを差し引く

① 生データには、測定対象であるベータ線由来の計数のほかにバックグラウンドを数えているかもしれない。生データを運動量の関数としてグラフ化せよ。

→ 統計誤差 (=  $\pm \sqrt{\text{計数}}$ ) をつけよ。

→ Q: バックグラウンドの「量形」を推察してみよ。

② 推察したバックグラウンドを生データから差し引け。

→ 誤差伝播則  $\text{err}(A \pm B) = \sqrt{\text{err}(A)^2 + \text{err}(B)^2}$ 、

$\text{err}(AB) = AB * \sqrt{(\text{err}(A)/A)^2 + (\text{err}(B)/B)^2}$ 、

$\text{err}(A/B) = (A/B) * \sqrt{(\text{err}(A)/A)^2 + (\text{err}(B)/B)^2}$ 、ただし A, B に相関なし。

## 2) 横軸を運動量 $p$ から運動エネルギー $T$ に変換する。

① 全エネルギーを  $E$  として、関係式  $E^2 = m^2 + p^2$  を使う。(光速  $c$  は省略してある)

ここで、 $E = T + m$  であり、 $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$  は電子の質量である。

② 横軸の  $p$  から  $T$  への変換に伴う運動学的補正因子 ( $E/p$ ) を前項 1) ② により得られたデータに掛ける。

→ Q: この補正因子はなぜ必要か。

# エネルギースペクトル導出のための各種補正(つづき)

ベータ線エネルギースペクトル:  $P(E) \propto d\Gamma^2/dEd\Omega$ ,  $\Gamma$ は崩壊幅(確率)

生データ(ある運動量における計数率):  $N(p) \sim \Delta\Omega \cdot \Delta p P(T)(p/E)$

$\Delta p$ : 運動量アクセプタンス ( $\sim p \cdot d/\eta$ )

$d$ : 検出器の横幅

$\eta$ : 焦点位置ごとに運動量分散の違いによる運動量アクセプタンスの補正  
運動量分散  $\eta = 4\rho/(3-(\rho/R)^2)$  は、第2章「セットアップ」で与えられている。

ここで、 $\rho/R$ は中心軌道の運動量に対する焦点位置での運動量の比

$\Delta\Omega$ : 焦点位置ごとの検出器立体角

( $\sim$ (検出器の高さ)(スペクトログラフの水平角アパーチャ)/(軌道長)<sup>2</sup>)

3) 次の3つの幾何光学的補正を行う。

①線源から検出器を見た立体角因子の逆数 ( $1/\Delta\Omega$ ) を前項2)②で得られたデータに掛ける。

②焦点位置での運動量アクセプタンス因子 ( $\sim pd/\eta$ ) を①に掛ける。

→①②補正は、運動量の異なる焦点位置で採ったスペクトル間の比較を可能にする。

→Q: ①②の補正因子はなぜ必要か。

# カーブプロットを描こう

- ①得られたエネルギースペクトル $P(T)$ ( $\sim P(E)$ )から、次式によりカーブプロットが得られる。

$$[P(E)/pEF(Z,E)]^{1/2}$$

ここで、 $F(Z,E)$ はFermi関数と呼ばれる、クーロン相互作用の補正因子である。

→付録6「ベータ崩壊とベータ線スペクトル」を参照せよ。

Fermi関数は、次式により与えられる。

$$F(\pm Z,E)=(1+\gamma)/2\{4(2pR)^{2\gamma-2}\exp(\pm\pi\nu)|\Gamma(\gamma\pm i\nu)|^2/(\Gamma(2\gamma+1))^2\}$$

$$\gamma=(1-\alpha^2Z^2)^{1/2}$$

$$\nu=\alpha ZE/p$$

Z:娘核の原子番号(負号は $\beta^+$ 崩壊)

R:核半径(前出の磁場半径Rと混同しないように)

$\alpha=1/137.0359\dots$ :微細構造定数

本演習では、 $^{90}\text{Y}$ に対して、 $Z=40$ ,  $R=1.25A^{1/3}[\text{fm}]$ を用いるとよい。ただし、単位をエネルギーにあわせるためには、 $R[\text{fm}]$ を $\hbar c=197.327\dots[\text{MeV}\cdot\text{fm}]$ で割る。

ここで、ガンマ関数 $\Gamma$ を計算する必要がある。実は、ガンマ関数を数値計算で求めるアルゴリズムとして驚くほど簡単な方法が知られているが、本演習では、上出のガンマ関数の数値をエネルギーの関数として別表(→付録2「資料その他」)に与えておく。

- ②得られたカーブプロットをグラフ化せよ。

- ③また、カーブプロットを直線でフィットせよ。

→Excelの関数機能:index(Linest(...),...)を用いてフィットしたパラメータを求める。

- ④エンドポイントのエネルギーを誤差つきで求めよ。

→Q:直線からのずれについて原因を考察してみよ。

## 第5章 評価とまとめ



## ○評価のポイント

### 実験装置と測定について

バックグラウンドの要因はなにか。

統計誤差のほかに誤差となる要因はないか。(系統誤差)

→エネルギー軸の絶対値、

一様磁場(作図上の仮定)と実際の差(を校正する手段の考察など)

配置の精度、各種補正の精度

### エンドポイント( $E_0$ )の精度

#### 直線度または直線からのずれの考察

実験条件の考察: ベータ線スペクトルを歪める実験上の要因はないか。

→実験上の要因をすべて考慮した上で、物理的考察(たとえば核行列要素に対する考察など)が行える。

#### 実験上の工夫・改良点の考察

もっと効率よくすることはできないか。精度を上げるにはどうすればよいか。

低エネルギー側の感度を決めているものはなにか。

## ○まとめのポイント

1. 実験(研究)の趣旨、目的を述べる。
2. 実験の原理、実験装置の説明をする。
3. データおよびデータの解析を詳述し、得られた結果を示す。
4. 結果の評価、結果を踏まえた考察と議論を展開する。
5. 結論を述べる。

## ○発表(プレゼン)のポイント

- 要点をまとめ、1枚のスライドに過度の情報を詰め込まない。
- 説明分量は1枚/1分が1つの目安。
- 図表やグラフを効果的に使う。
- フォントはなるべく18pt以上を使う。
- よく練習して発表に臨む。

## 付録1 単位系に慣れよう

# 自然単位系

素粒子原子核研究でよく用いられる単位系は、光速 $c$ とプランク定数を $2\pi$ で割った $\hbar$ を基本単位とする自然単位系である。

エネルギーの単位を[eV]とすると、次元は、[E]~[pc]~[mc<sup>2</sup>] の関係にあるので、

エネルギー:eV

運動量:eV/c

質量:eV/c<sup>2</sup>

となる。自然単位系では、たとえば、特殊相対論の式は

$$E^2 = p^2 + m^2$$

という具合に、しばしば $c$ を落として表記される。

また、「量子」の概念における運動量と波長の関係式  $p \sim 2\pi\lambda\hbar$  に見られるように、運動量と長さの間には定数を介した関係があり、互いに単位の変換が可能である。

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m/s]} \quad \hbar = 6.5821220 \times 10^{-16} \text{ [eV s]}$$

なので、変換定数として  $\hbar c = 197.327... \text{ [MeV}\cdot\text{fm]}$  を選ぶと、自然単位系におけるエネルギーと長さの単位の関係は、

$$pc[\text{MeV}] \sim pc/\hbar c[\text{fm}^{-1}] \quad R[\text{fm}] \sim R/\hbar c[\text{MeV}^{-1}]$$

と表される。ここで、MeVは $10^6\text{eV}$ 、fmは $10^{-15}\text{m}$ である。

さらに、 $E = \hbar\omega$  にみられるように、自然単位系におけるエネルギーと時間の単位関係は、

$$E[\text{eV}] \sim E/\hbar[\text{s}^{-1}]$$

と表される。

# 磁場中の荷電粒子の運動

磁場中の荷電粒子の運動方程式(Lorentz方程式)より、

$$p=eB\rho$$

が導かれる。(→付録4「イオン光学の基礎」の「磁場による粒子の偏向」の項を参照。)

SI単位系での次元は、

$$p[\text{kg m/s}] = eB\rho[\text{C}][\text{T}][\text{m}]$$

であるが、両辺に光速 $c$ を掛けて、 $[\text{J}]=[\text{kg m}^2/\text{s}^2]$ より

$$pc[\text{J}] = ecB\rho[\text{C}][\text{m/s}][\text{T}][\text{m}]$$

$$pc/e [\text{J/C}] = cB\rho[\text{m/s}][\text{T}][\text{m}]$$

となる。さらに、エネルギー換算 $[\text{J}] = e [\text{eV}]$ を用いると、

$$pc [\text{eV}] = cB\rho[\text{m/s}][\text{T}][\text{m}]$$

となるので、運動量を自然単位系で表すと、

$$p[\text{eV}/c] = 2.9979... \times 10^8 B\rho[\text{T}][\text{m}]$$

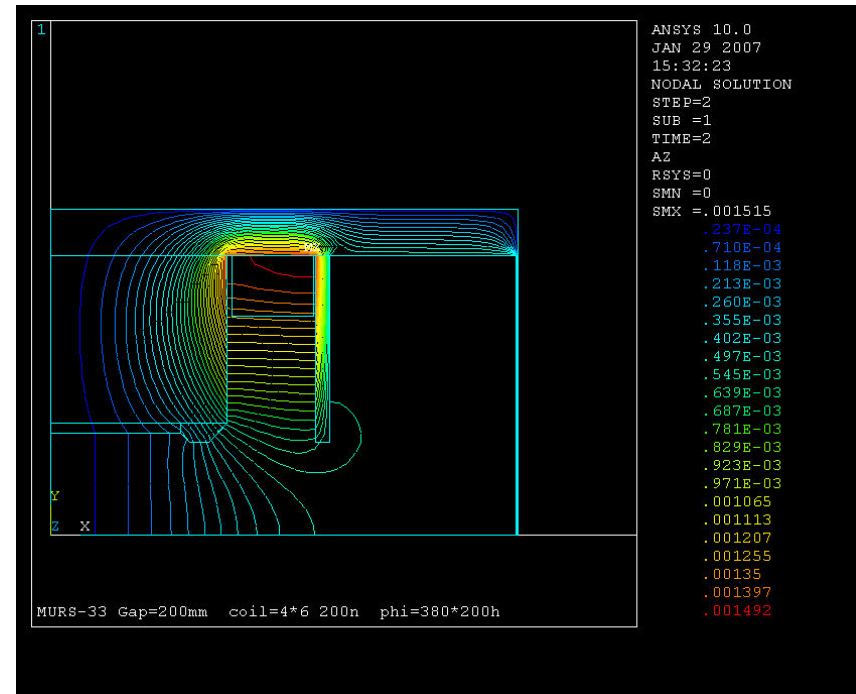
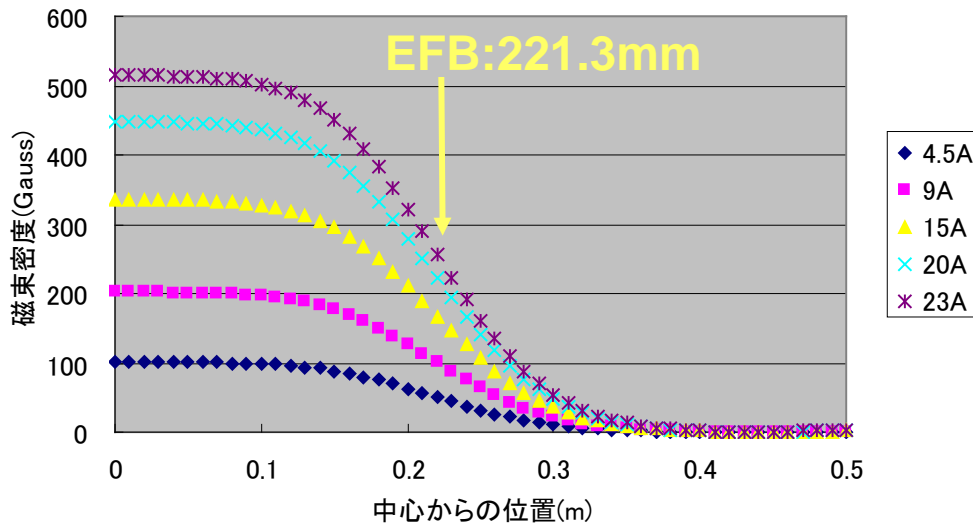
が導かれる。ここで、運動量の単位 $\text{MeV}/c$ と磁束密度の単位 $[\text{kG}] (=0.1[\text{T}])$ を用いると、

$$p[\text{MeV}/c] = 29.979... B\rho[\text{kG}][\text{m}]$$

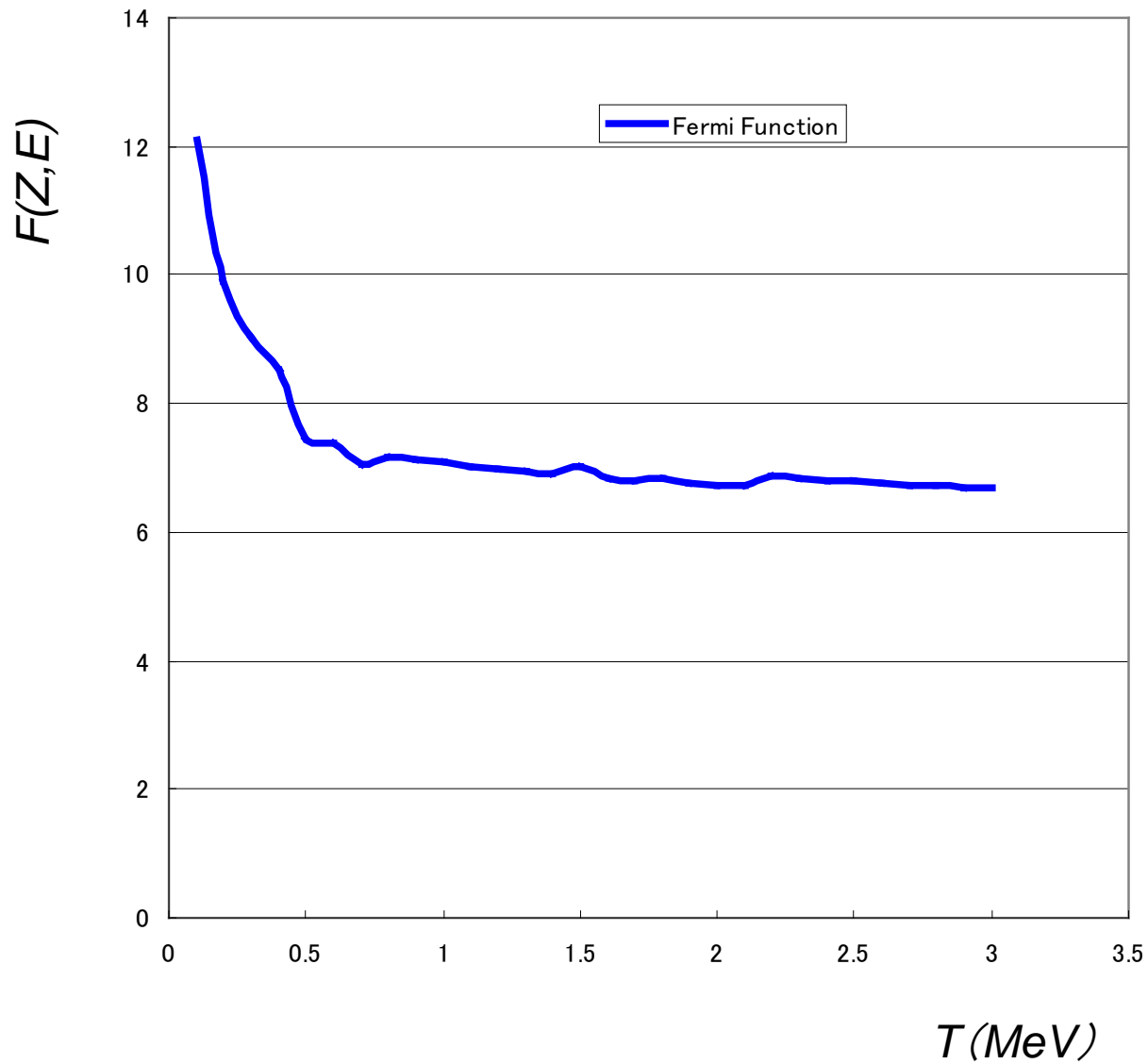
## 付録2 資料その他

# 磁場分布 (Gap200) エンドガード r=285 Gap=200

MUSR-33  
エンドガード r=285(t=15) Gap=200



# 参考資料:Fermi関数



# 参考資料: Fermi関数( $F(Z,E)$ )

Fermi関数用パラメータ				Γ関数数値計算用パラメータ							
微細構造定数 $\alpha$	0.0072993			c1	76.18009	c4	-1.23174				
$\gamma$	0.9564272			c2	-86.5053	c5	1.21E-03				
Z	40			c3	24.0141	c6	-5.40E-06				
R/hbarc	0.0283921			GLN	2.506628	SER	1				
TMP	SER	ln G	$\Gamma(2\gamma+1)$								
-1.14429	6.74E+00	6.14E-01	1.848265								
磁場 (G)	Energy (MeV)	Mom. (MeV/c)	F(Z,E)	$\nu$	$\gamma+\nu$	← ガンマ関数数値計算アルゴリズム →					Abs(Γ)^2
						TMP1	TMP2	SER	ln Γ	Γ(γ+ν)	
50.45722	0.1	0.3349627	12.0989	0.532579	0.9564272	2.6774535	-3.7789736	20.016218	0.1694521	1.0853395	1.403409
74.46933	0.2	0.4943683	9.913445	0.419912	0.9564272	2.6921496	-3.7642775	21.648635	0.2637792	1.2254641	1.694789
94.86439	0.3	0.6297619	9.01449	0.375997	0.9564272	2.6969412	-3.7594859	22.220320	0.2957795	1.2783829	1.806803
113.6074	0.4	0.7541883	8.511932	0.352678	0.9564272	2.6992716	-3.7571556	22.505875	0.3115827	1.3056186	1.864822
149.9078	0.5	0.99517	7.463548	0.296615	0.9564272	2.7042657	-3.7521615	23.135135	0.3460081	1.3676093	1.997739
165.3825	0.6	1.0979	7.382695	0.295455	0.9564272	2.7043600	-3.7520672	23.147249	0.3466657	1.3688301	2.000368
190.9002	0.7	1.2673	7.05045	0.279	0.9564272	2.7056573	-3.7507699	23.314803	0.3557411	1.3858235	2.037008
199.878	0.8	1.3269	7.159993	0.288472	0.9564272	2.7049195	-3.7515076	23.219314	0.3505734	1.3761141	2.016064
214.2034	0.9	1.422	7.13489	0.289712	0.9564272	2.7048211	-3.7516060	23.206619	0.3498855	1.3748281	2.013292
230.1407	1	1.5278	7.076708	0.28876	0.9564272	2.7048967	-3.7515304	23.216369	0.3504138	1.3758156	2.01542
245.9724	1.1	1.6329	7.02571	0.288055	0.9564272	2.7049525	-3.7514746	23.223575	0.3508042	1.3765459	2.016995
261.7138	1.2	1.7374	6.980427	0.287534	0.9564272	2.7049937	-3.7514335	23.228886	0.3510919	1.3770844	2.018156
277.3799	1.3	1.8414	6.939723	0.287151	0.9564272	2.7050239	-3.7514032	23.232795	0.3513036	1.3774808	2.01901
292.9857	1.4	1.945	6.902705	0.286867	0.9564272	2.7050463	-3.7513809	23.235682	0.3514600	1.3777736	2.019642
299.8321	1.5	1.99045	7.003055	0.294985	0.9564272	2.7043980	-3.7520291	23.152138	0.3469309	1.3693230	2.00143
324.0377	1.6	2.15114	6.837569	0.286523	0.9564272	2.7050734	-3.7513538	23.239182	0.3516496	1.3781288	2.020408
339.5019	1.7	2.2538	6.808506	0.286426	0.9564272	2.7050810	-3.7513462	23.240162	0.3517026	1.3782283	2.020622
349.7963	1.8	2.32214	6.848288	0.29057	0.9564272	2.7047528	-3.7516743	23.197809	0.3494080	1.3739365	2.01137
370.3294	1.9	2.45845	6.755882	0.286336	0.9564272	2.7050881	-3.7513390	23.241083	0.3517525	1.3783218	2.020824
385.7018	2	2.5605	6.731853	0.286326	0.9564272	2.7050888	-3.7513383	23.241176	0.3517576	1.3783312	2.020844
399.8253	2.1	2.65426	6.722926	0.287212	0.9564272	2.7050191	-3.7514081	23.232168	0.3512697	1.3774172	2.018873
401.0523	2.2	2.6624049	6.859584	0.2973	0.9564272	2.7042099	-3.7522173	23.127969	0.3456190	1.3668876	1.996186
416.3807	2.3	2.7641635	6.831965	0.296918	0.9564272	2.7042410	-3.7521861	23.131967	0.3458361	1.3672902	1.997052
431.6905	2.4	2.8657983	6.80583	0.296576	0.9564272	2.7042689	-3.7521583	23.135544	0.3460303	1.3676505	1.997828
446.9836	2.5	2.967322	6.781027	0.296269	0.9564272	2.7042939	-3.7521333	23.138757	0.3462047	1.3679742	1.998525
462.2615	2.6	3.0687457	6.757429	0.295991	0.9564272	2.7043164	-3.7521107	23.141654	0.3463620	1.3682661	1.999154
477.5259	2.7	3.1700789	6.734924	0.29574	0.9564272	2.7043368	-3.7520903	23.144276	0.3465043	1.3685304	1.999723
492.7779	2.8	3.27133	6.713415	0.295511	0.9564272	2.7043554	-3.7520718	23.146657	0.3466335	1.3687703	2.00024
508.0186	2.9	3.3725065	6.692818	0.295303	0.9564272	2.7043722	-3.7520549	23.148825	0.3467512	1.3689889	2.000711
523.2491	3	3.4736148	6.673059	0.295113	0.9564272	2.7043876	-3.7520395	23.150806	0.3468586	1.3691887	2.001141



# 測定データ解析シート(例)

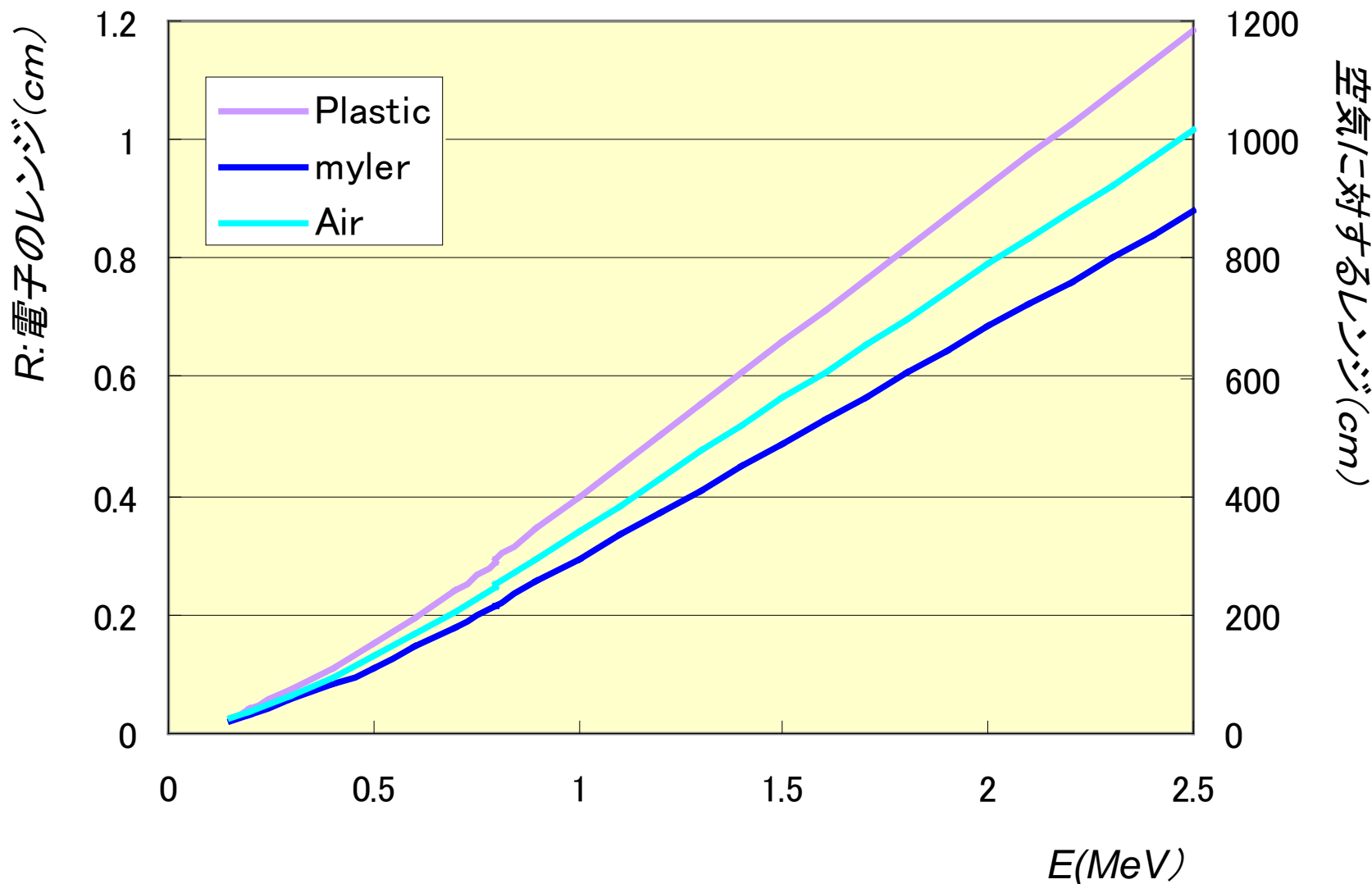
磁場半径R(m)	0.2213	立体角補正 $\Delta\Omega$	=検出器高*水平角ア パーチャ/ 軌道長 <sup>2</sup>
中心軌道半径ρ(m)		分散補正 $\eta$	= $4\rho/(3-(\rho/R)^2)$

電流計	ガウス計	運動量	エネルギー	全エネルギー	横軸変換	生データ		BG	
DCCT (1V=50A)	磁場 (G)	$p$ (MeV/c)	$T$ (MeV)	$E$ (MeV)	$dE/dp$ = $p/E$	計数率 (cps)	エラー	計数率 (cps)	エラー

BG		BG差引き後データ		補正後スペクトルP(T)		Fermi関数	カリープロット	
計数率 (cps)	エラー	計数率 (cps)	エラー	計数率 (cps)	エラー	$F(Z,E)$	$K(T)$	エラー

# 参考資料: 電子のレンジ(飛程)

$$R[\text{g/cm}^2] = 0.407E^{1.38} \quad \text{for } 0.15 < E < 0.8 \text{ MeV}$$
$$= 0.543E^{-0.133} \quad \text{for } E > 0.8 \text{ MeV}$$



# 070723のデータ

$\beta$ ソース  $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$  1.11MBq (in '93)

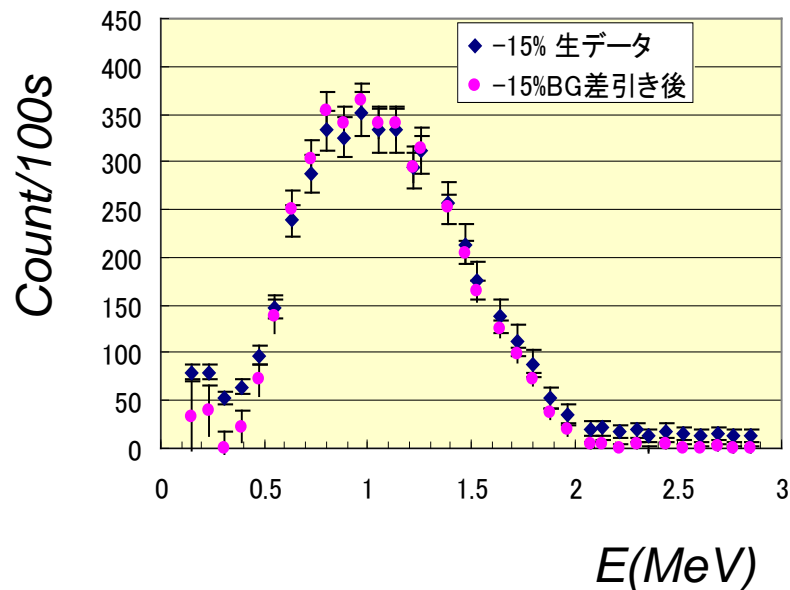
シンチ S2:2x2x0.5 cm<sup>3</sup>

PMT H3178 for S2, -1.2kV

Discr Threshold -28mV for S2

真空中測定(0.23Pa?)

## S2 Singles

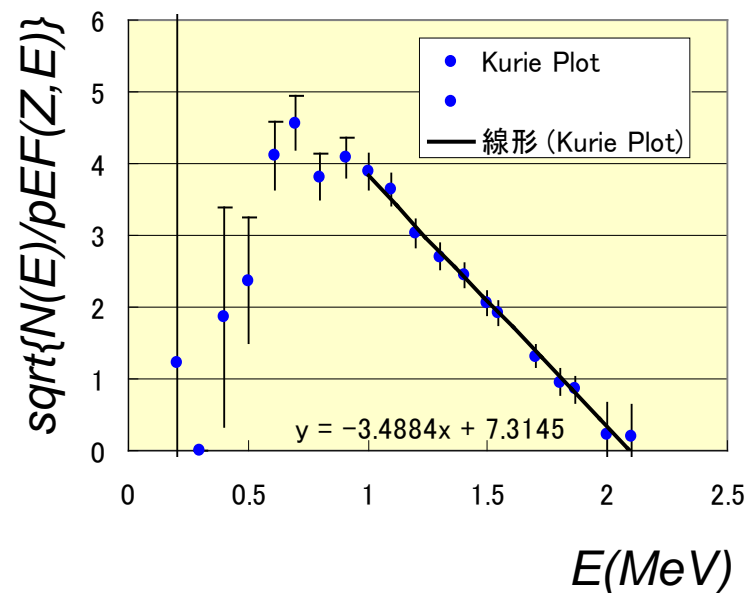


統計誤差のみ

BGとしてソースなしを仮定

S2 at  $\Delta P/P=0\%$

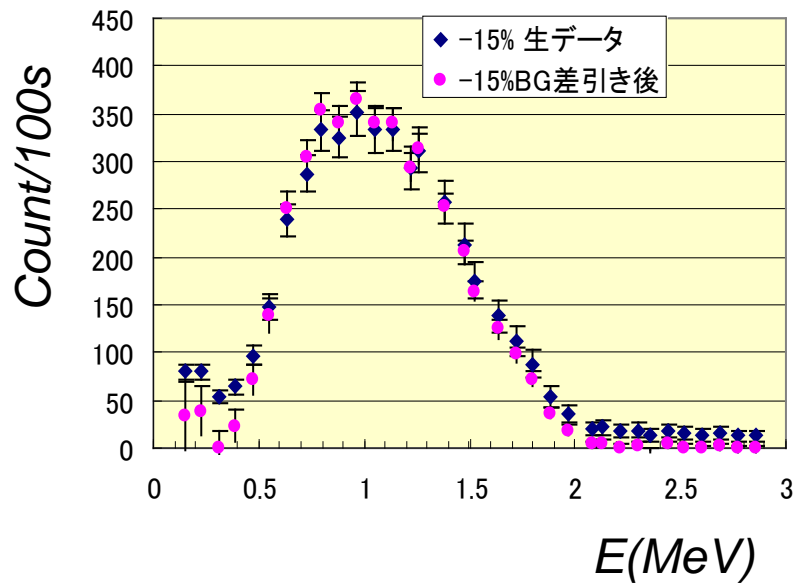
## Kurie Plot



End Point:  $2.10 \pm 0.10$  MeV

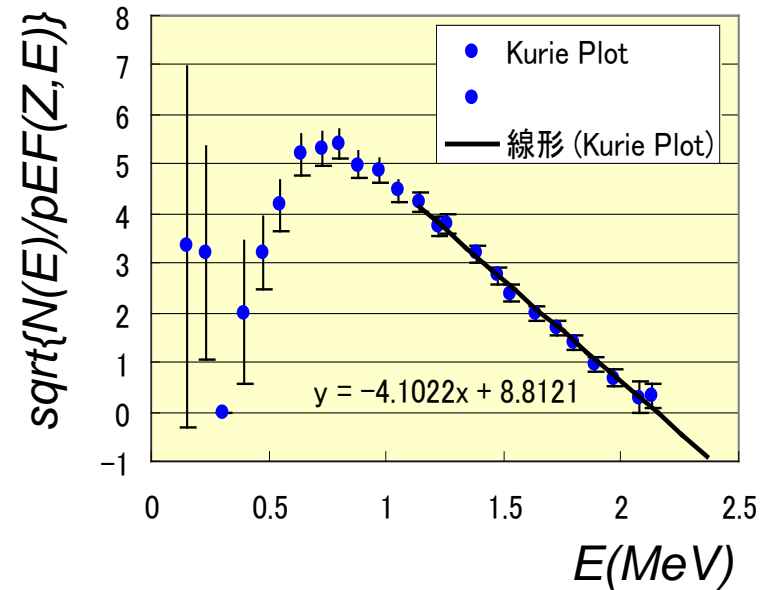
# 070723のデータ

## S2 Singles



統計誤差のみ  
BKとしてソースなしを仮定  
S2 at  $\Delta P/P = -15\%$

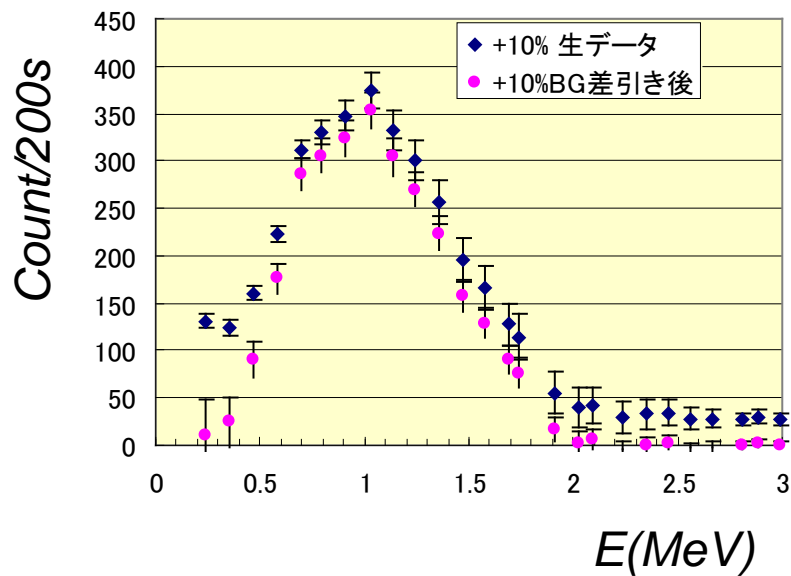
## Kurie Plot



End Point:  $2.15 \pm 0.11$  MeV

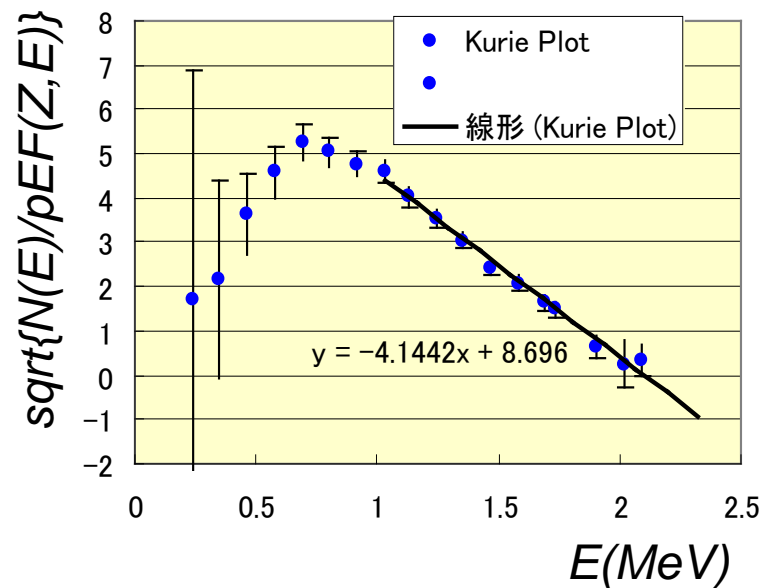
# 070723のデータ

## S2 Singles



統計誤差のみ  
BGとしてソースなしを仮定  
S2 at  $\Delta P/P=+10\%$

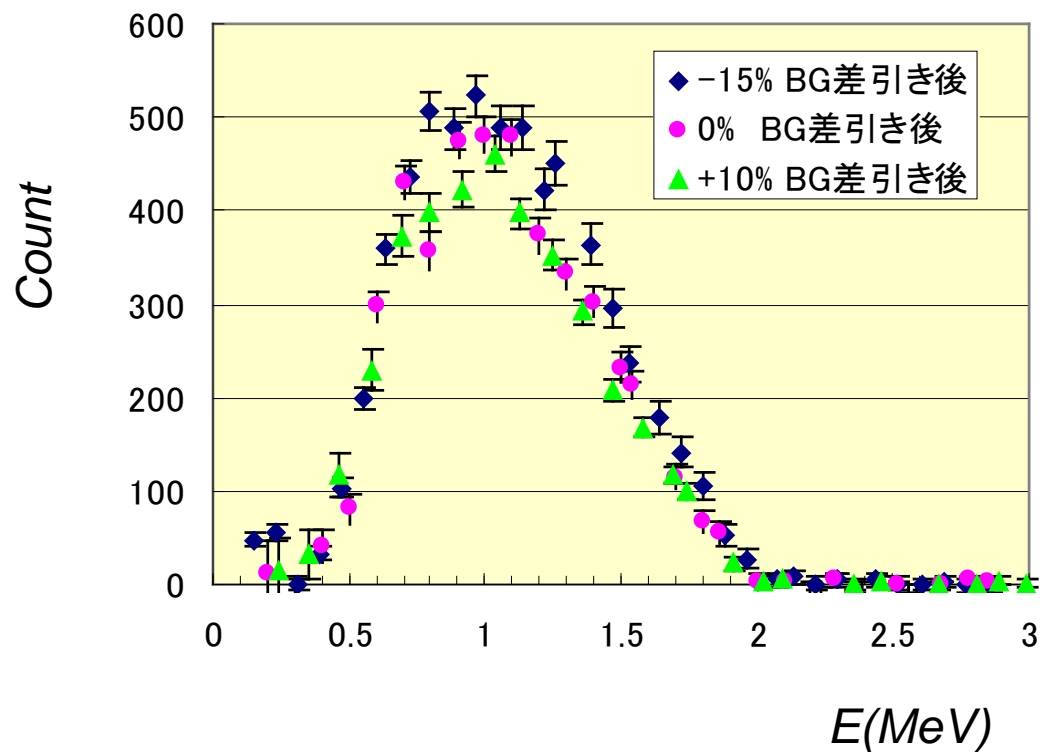
## Kurie Plot



End Point:  $2.10 \pm 0.13$  MeV

# 070723のデータ

## S2 Singles



アクセプタンス(軌道長の2乗)と分散( $\eta$ )補正

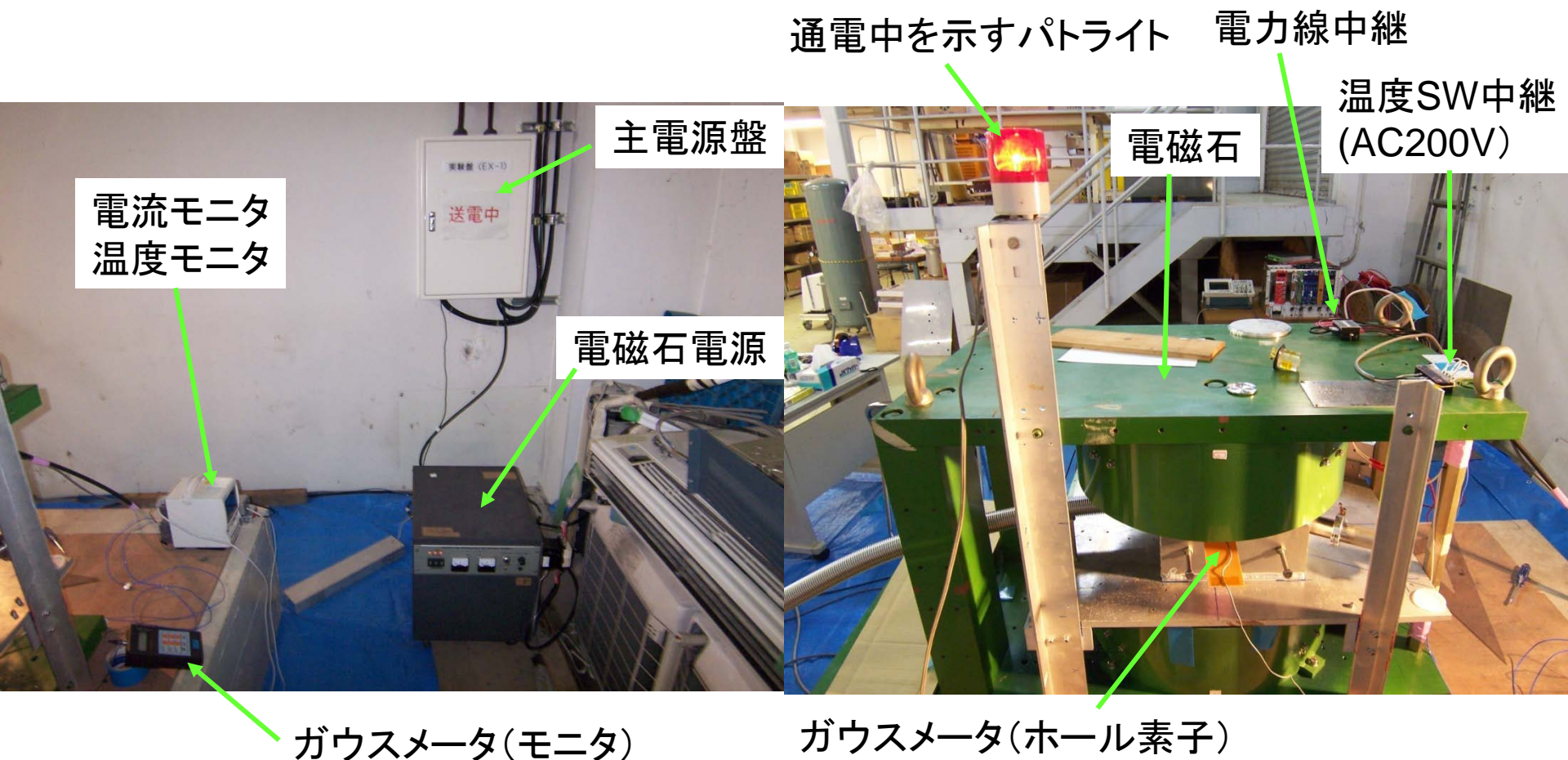
## 付録3 装置の操作と安全について

# 電気保安

電磁石電源 一次:三相200V、ブレーカー30A  
二次:直流40V100A

電磁石 定格: 12V23A 0.5kGauss

温度スイッチ(85°C at コイル)インターロック → 電源入力遮断(電磁コンタクト)





# 主電源盤と電源の操作

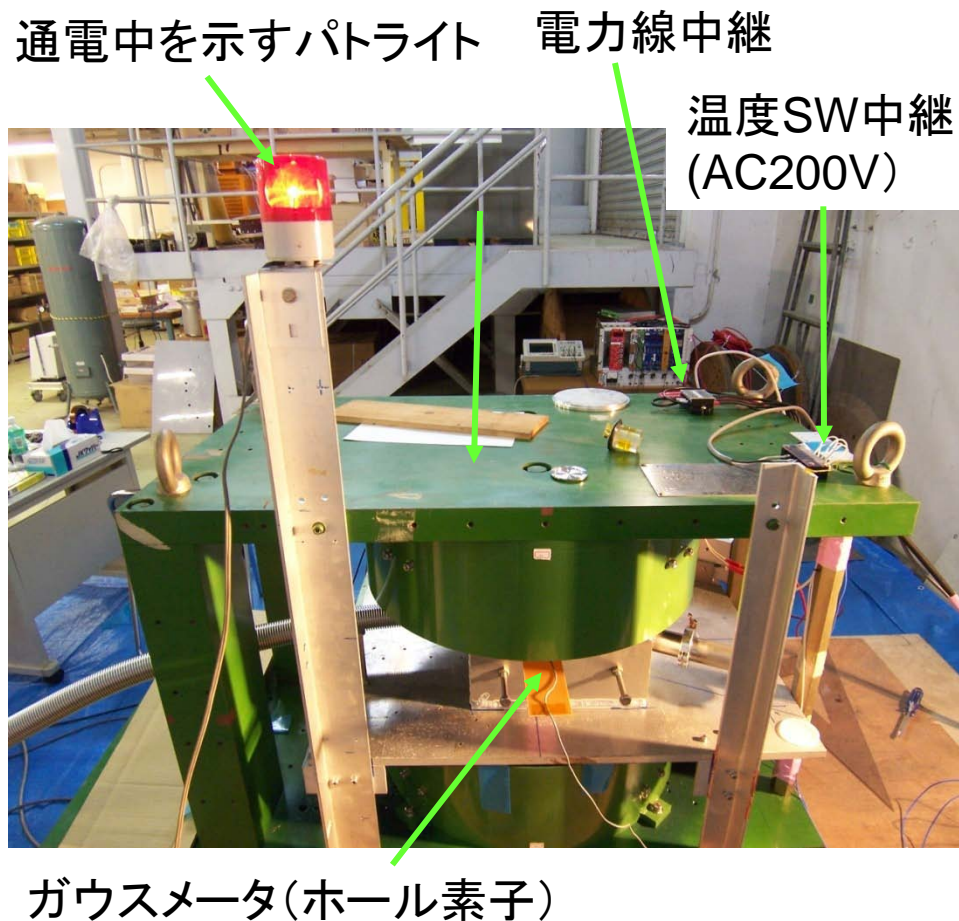
- ①通電するとき  
主電源のブレーカを入れる
- ②通電を終了するとき  
主電源のブレーカを切る

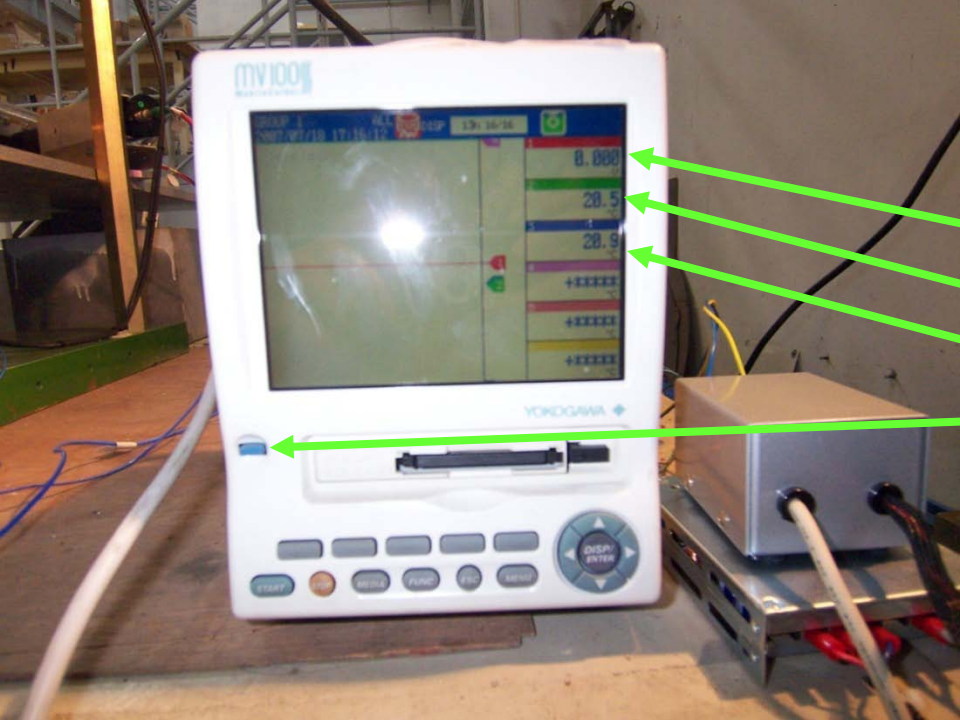
- ①主電源を入れても電磁コンタクトは遮断されたままなので、コンタクトを入れる。
- ②電磁コンタクトが入ると点灯する。
- ③電源スイッチを入れる。
- ④ヘリポットをまわして通電する。  
(電流モニターや電流計、ガウスメータによる磁場をモニターして調整する)
- ⑤電磁石定格(12V23A)以上には流さないこと。
- ⑥ヘリポットを戻し、電源スイッチを切る。



# 電磁石通電の注意

- ①通電前に電磁石の周囲を点検し、部品等(とくに磁性体)を排除すること。
- ②通電中はパトライトを点灯させ周囲に注意を喚起すること。
- ③励磁の際には、ゆっくり電流値を上げること。
- ④通電中の電磁石にはみだりに近寄らないこと。
- ⑤電磁石に通電したままで周辺で作業することは絶対にさけること。作業をするときは励磁しないこと。
- ⑥電力線には絶対に触らないこと。
- ⑦温度スイッチには200Vの電圧がかかっているので絶対に触らないこと。
- ⑧常に電流、電圧、磁場強度、温度に気を配ること。

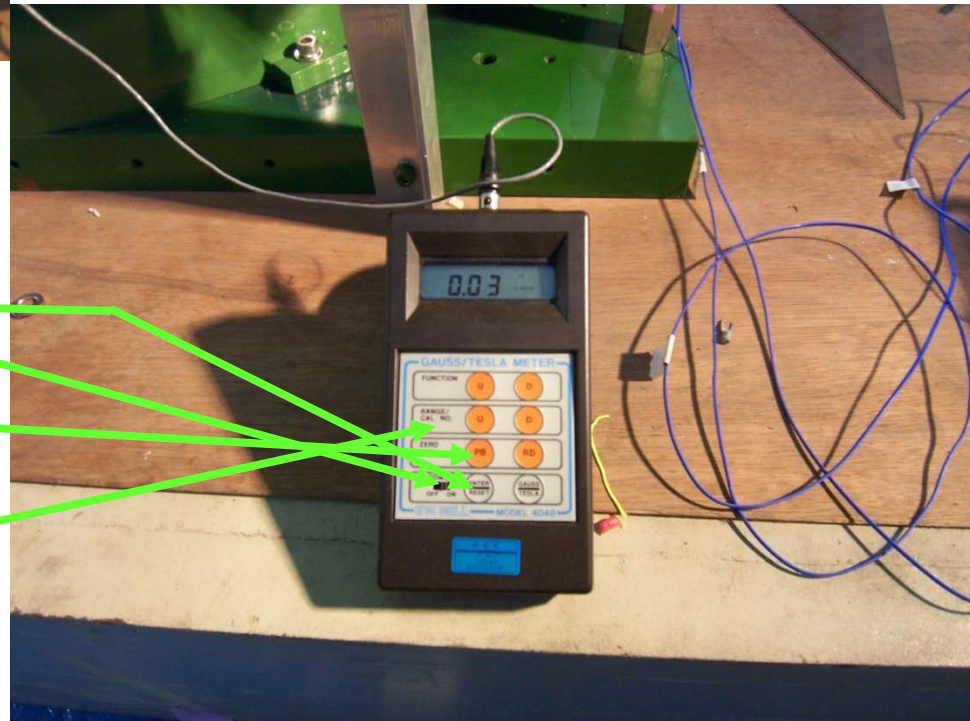




- ①電磁石電流(DCCT読み)
- ②温度モニター(上コイル)
- ③温度モニター(下コイル)
- ④電源スイッチ

### ガウスメータ(ホール素子)

- ①スイッチを入れる。
- ②reset ボタンを押す。
- ③ゼロプローブをかぶせ、“ZERO PB”を押し、プローブのゼロ点補正を行う。
- ④ゼロプローブを外す。
- ⑤“Range U”または“D”を何度か押し、kGaussレンジを選ぶ。



# ○真空装置の取り扱いと安全

コンベクトロン真空計スイッチ(大気~1Pa)

コールドカソード真空計バイアス(0.1Pa~)

真空度を悪くするときはバイアスを切ること。

排気セット主電源

ターボポンプ  
スタート・ストップ

スクロールポンプ  
主電源

真空バルブ



## 真空引きの手順:

- ①真空槽リーク弁と真空バルブをしっかり閉める。
- ②スクロールポンプをONにする。
- ③コンベクトロンをONにし、コールドカソード真空計のバイアス(HV)をOFFにする。
- ④真空バルブを少しあける。~1kPa/sの目安でバルブを調整しながら引く。1kPa以下で全開。
- ⑤数Paになったら、ターボポンプをスタートする。
- ⑥コールドカソード真空計のHVをONにする。

## 真空リークの手順:

- ⑦コールドカソード真空計のHVをOFFする。
- ⑧バルブを閉め、ターボポンプをストップする。
- ⑨真空槽リーク弁をゆっくり開ける。④参照。

# 放射線安全

- 実習場所は放射線管理区域内にあるが、特別に許可を受けて立ち入りが許されている。管理区域内では立ち入りが制限(表示あり)されている箇所があるので、所定の場所以外にはみだりに立ち入らないこと。  
(必要なら、指導員にエスコートを願い出ること。)
- 本実習は、チェックソース(放射線源)を用いる。ソースの取り扱いは必ず指導員が行うので、ソースの借り出し、保管、セット、取り外しなどの作業は指導員に依頼すること。

## その他の注意事項

- 作業の際には、必要な服装(作業服等)、履物(安全靴等)、安全装備(ヘルメット等)の着用が望ましい。
- 重量物の運搬、取り扱いには注意すること。決して無理をしないこと。  
必要なら、指導員にクレーン操作等を依頼すること。
- 高所、段差に注意。作業は十分な照明の下で実施すること。
- 薬品類(アルコール等)の取り扱いの際、換気に十分配慮すること。火気厳禁。
- 所定の機器以外の周辺機器には、みだりに触れないこと
- 周辺では、通常業務として重量物の運搬等の作業が行われているので注意すること。所定の場所以外にはみだりに立ち入らないこと。
- 所内での喫煙は決められた場所でのみ認められる。  
(飲食は可能だが節度をもつこと。)

## 緊急時の連絡先

### 火災、事故、怪我、病気

が発生したら

- すぐに、指導員に連絡し指示を仰ぐ。  
指導員の連絡先、手段は現場で教示する。
- 緊急の場合には、インフォメーションセンターへ連絡する。  
カウンターホール内々線から0-3399  
または  
外線から029-864-5572
- その他必要な場合、  
カウンターホール内々線から0-5599  
または  
外線から029-864-5599  
にかけ、カウンターホール安全監視員に事情を説明し助けを求める。

演習初日に別途指示する

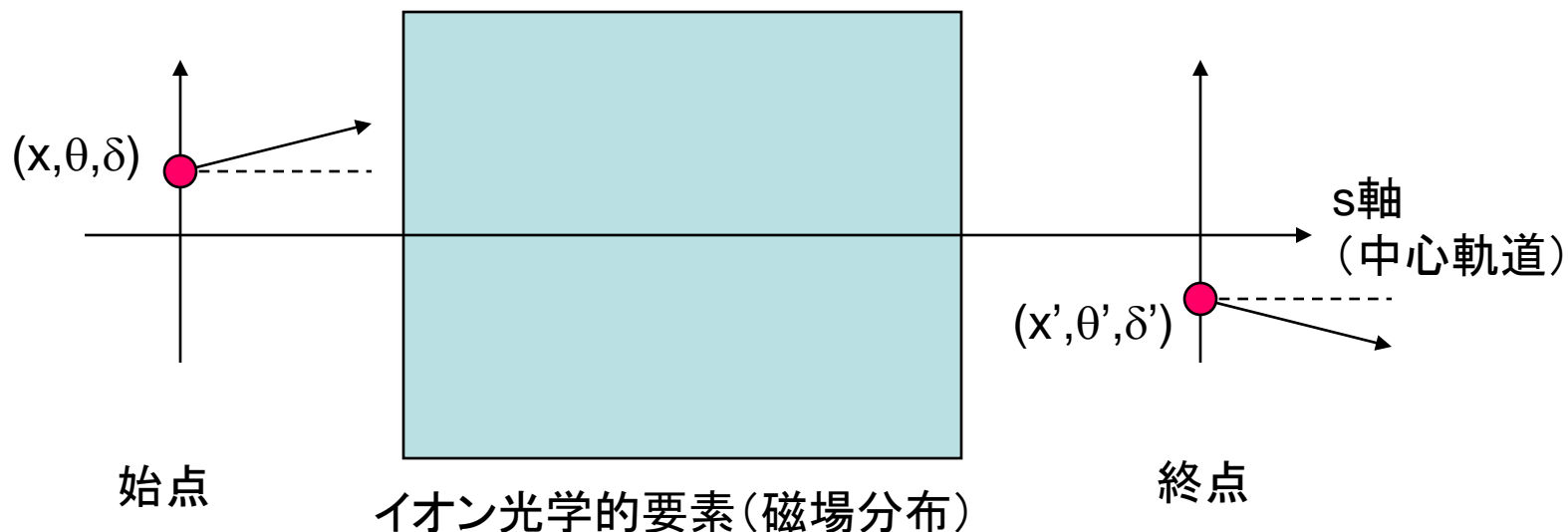
## 付録4 イオン光学の基礎

より詳しく知りたい人は、次の文献を参照するとよい。

“A First and Second-Order Matrix Theory  
for the Design of Beam Transport Systems and  
Charged Particle Spectrometers”

K.L. Brawn,  
Advances in Particle Physics, 1, pp71-134(1967)

# 輸送行列を用いた磁場中における荷電粒子の運動の記述



$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \\ \delta' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} + h.o. \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x: \text{位置} \\ \theta: \text{傾き} \\ \delta: \text{運動量} \end{array}$$

ある磁場分布をもったイオン光学的要素における荷電粒子の運動を次のように記述する。

- 荷電粒子の座標( $X$ )のイオン光学的要素(磁場分布)による変換(写像 $M$ )と考える。
- $M$ は要素の磁場分布によって決定され、運動の内容(軌道)を性格づける。

このとき、 $M$ を輸送行列という。



# 輸送行列の一般理論(詳細省略)

輸送行列の一般形式は、ビームラインに沿った距離sにおける座標(x, y)を初期座標位置(x<sub>0</sub>, x<sub>0</sub>', y<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>', δ)の周りで展開したときの展開係数によって表現される。もっとも一般的に、

$$1: x=R_{11}x_0+R_{12}x_0'+R_{13}y_0+R_{14}y_0'+R_{16}\delta+\sum_{jk}T_{1jk}q_jq_k+h.o.$$

$$2: x'=R_{21}x_0+R_{22}x_0'+R_{23}y_0+R_{24}y_0'+R_{26}\delta+\sum_{jk}T_{2jk}q_jq_k+h.o.$$

$$3: y=R_{31}x_0+R_{32}x_0'+R_{33}y_0+R_{34}y_0'+R_{36}\delta+\sum_{jk}T_{3jk}q_jq_k+h.o.$$

$$4: y'=R_{41}x_0+R_{42}x_0'+R_{43}y_0+R_{44}y_0'+R_{46}\delta+\sum_{jk}T_{4jk}q_jq_k+h.o.$$

$$6: \delta=R_{61}x_0+R_{62}x_0'+R_{63}y_0+R_{64}y_0'+R_{66}\delta+\sum_{jk}T_{6jk}q_jq_k+h.o.$$

$$(p_i=x, x', y, y', \delta \quad q_i=x_0, x_0', y_0, y_0', \delta \text{ for } i=1,2,3,4,6)$$

と書ける。展開係数はsの関数である。上の式を行列形式で表すと、次のようになる。

$$p_i = \sum_j R_{ij}q_j + \sum_{jk} T_{ijk}q_jq_k + h.o.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \\ y \\ \phi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{46} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ y_0 \\ \phi_0 \\ \delta \end{bmatrix} + h.o.$$

ここで、 $x'=dx/ds \sim \theta$ ,  $y'=dy/ds \sim \phi$  とした。

# 輸送行列の一般理論(詳細省略)

荷電粒子の運動を記述するのに直交曲線座標系  $(x, y, s)$  を採用する。  $s$  は曲率  $h_c$  (半径  $\rho_0$ ) の中心軌道に沿った曲線上の距離で表される座標である。粒子の位置  $(x, y)$  は、中心軌道からの変位として表される。

中心軌道を含む偏向面を  $y=0$  の水平面 ( $x$ -plane) に選び、磁場分布は、この偏向面について対称であると仮定する。

まず、荷電粒子の磁場中の運動方程式、

$$dp/dt = e (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を上記の直交曲線座標系で表現する。

粒子の座標  $p_i = x, x', y, y', \delta$  の初期座標位置  $q_i = x_0, x_0', y_0, y_0', \delta$  の周りでの展開式、

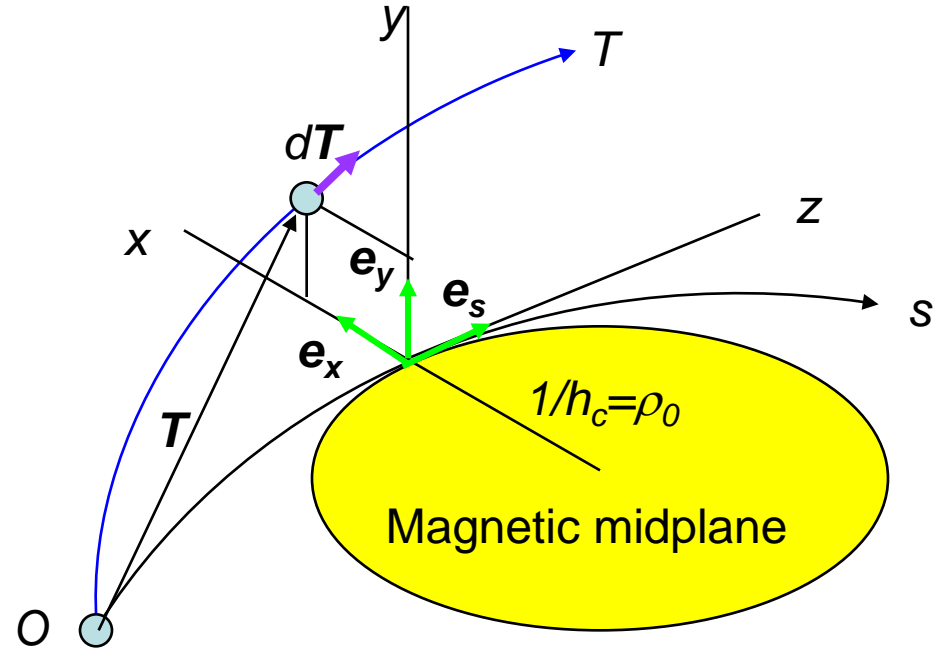
$$p_i = \sum_j R_{ij} q_j + \sum_{jk} T_{ijk} q_j q_k + h.o.$$

を運動方程式に代入すると、展開係数(輸送行列要素:  $s$  の関数)  $R_{ij}$  や  $T_{ijk}$  の満たすべき連立微分方程式が導かれる。例えば、一次の係数  $R_{ij}$  についての微分方程式は、

$$R_{1j}'' + k_x^2 R_{1j} = 0 \quad (j=1,2) \quad R_{2j} = R'_{1j} \quad R_{16}'' + k_x^2 R_{16} = h_c \quad R_{26} = R'_{16}$$

$$R_{3j}'' + k_y^2 R_{3j} = 0 \quad (j=3,4) \quad R_{4j} = R'_{3j} \quad (k_x^2, k_y^2 \text{ については次ページに示す})$$

となる。これらは、自明の初期条件  $R_{ij}(s=0)=1, R_{ij}(s=0)=0$  を使って解かれる。



# 輸送行列の一般理論(詳細省略) —1次の輸送行列—

前ページの微分方程式を境界条件の下で解いて求めて1次の輸送行列は次のとおりとなる。

$$M = \begin{bmatrix} \cos\{k_x s\} & \sin\{k_x s\}/k_x & 0 & 0 & (1-\cos\{k_x s\})h_c/k_x^2 \\ -k_x \sin\{k_x s\} & \cos\{k_x s\} & 0 & 0 & \sin\{k_x s\}h_c/k_x \\ \hline 0 & 0 & \cos\{k_y s\} & \sin\{k_y s\}/k_y & 0 \\ 0 & 0 & -k_y \sin\{k_y s\} & \cos\{k_y s\} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、再び、 $s$ はビームライン中心軌道に沿った距離を、 $h_c=1/\rho$ は中心軌道の曲率を表す。また、

$$\begin{aligned} k_x^2 &= (1-n)h_c^2, \\ k_y^2 &= nh_c^2 \end{aligned}$$

である。ただし、 $n$ は磁場勾配(四極磁場成分)のパラメータを表しており、

$$n = -1/(h_c B_y) [\partial B_y / \partial x]_{x=y=0}$$

である。また、 $M$ を点線で部分行列にわけ、左上を $M_x$ (第1,2行と第1,2列)、真中を $M_y$ (第3,4行と第3,4列)とすると、それぞれの行列式は1となっている。(*Liouville's Theorem*)

# ビームラインと輸送行列

ビームラインは、それぞれに固有の磁場分布をもった複数の光学要素がならんだシステムと考えることができる。それぞれの光学要素に対する輸送行列をそれぞれ $M_i$ とすると、連続して並ぶ $M_i$ の結合法則は次のとおりになる。

$$\begin{aligned} X_1 &= M_1 X_0 \\ X_2 &= M_2 X_1 = M_2 M_1 X_0 \\ X_3 &= M_3 X_2 = M_3 M_2 M_1 X_0 \\ &\vdots \\ X_n &= M_n X_{n-1} = M_n \cdots M_3 M_2 M_1 X_0 \end{aligned} \quad X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \theta_i \\ y_i \\ \phi_i \\ \delta_i \end{bmatrix}$$

一般に、あるビームラインの始点から終点までの光学系をあらわす1次の輸送行列は、

$$M_x = \begin{bmatrix} a_x & b_x & \eta_1 \\ c_x & d_x & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_y = \begin{bmatrix} a_y & b_y \\ c_y & d_y \end{bmatrix}$$

と書ける。ここで、輸送行列について水平面(偏向面)と鉛直面に分離して書いた。ただし、前ページの結果からわかるように、1次の輸送行列には次の重要な性質がある。

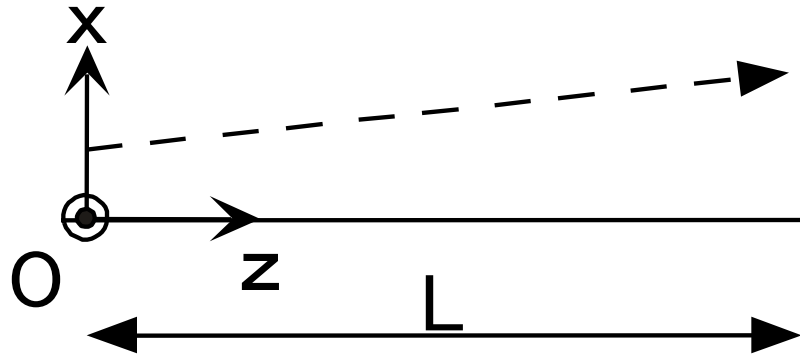
$$\det(M_x) = 1 \quad \det(M_y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{Liouville's Theorem}$$

## 主なビームライン要素

要素	概要	行列要素のパラメータ
ドリフト空間	磁場のない空間	空間の長さ $L$
偏向(双極) 磁石	一様磁場 (プリズム)	磁場 $B$ 、偏向角 $\theta$ 、 曲率半径 $\rho$ 、磁極長 $L$
収束(四極) 磁石	勾配磁場 (レンズ)	磁場勾配 $g$ 、磁極長 $L$

すべて、1次までの輸送行列で表現できる。  
これら3要素の組合せでほとんどあらゆるビームラインの性質を表現できる。

## ドリフト空間



ドリフト空間では、粒子は、はじめに与えられた方向を保ちながら、距離と方向の積だけ位置を変える。運動量に依らない。

ドリフト空間はなんら磁場のない長さの指定された空間である。

$k_x=k_y=0$  だから、ドリフト空間の長さを $L$ とすると、

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

# ビームライン要素と輸送行列 — 矩形収束磁石 —

純粋四極磁場をもつ矩形収束磁石の1次の輸送行列を求める。

純粋な四極磁場なので  $h_c=0$ , ただし、

$$-nh_c^2 = (e/p_0)[\partial B_y/\partial x]_{x=y=0} = (B_0/a)(e/p_0) = k_q^2$$

$a$ は磁極のアパーチャ(半径)、 $g=B_0/a$ は磁場勾配を表す。

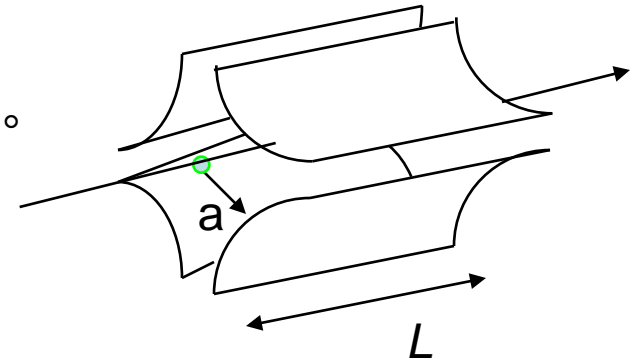
よって、

$$k_x^2 = k_q^2, \quad k_y^2 = -k_q^2$$

となるので、磁極長を  $L$  とすると、

$$M_Q = \begin{bmatrix} \cos\{k_q L\} & \sin\{k_q L\}/k_q & 0 & 0 & 0 \\ -k_q \sin\{k_q L\} & \cos\{k_q L\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\{k_q L\} & \sinh\{k_q L\}/k_q & 0 \\ 0 & 0 & -k_q \sinh\{k_q L\} & \cosh\{k_q L\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

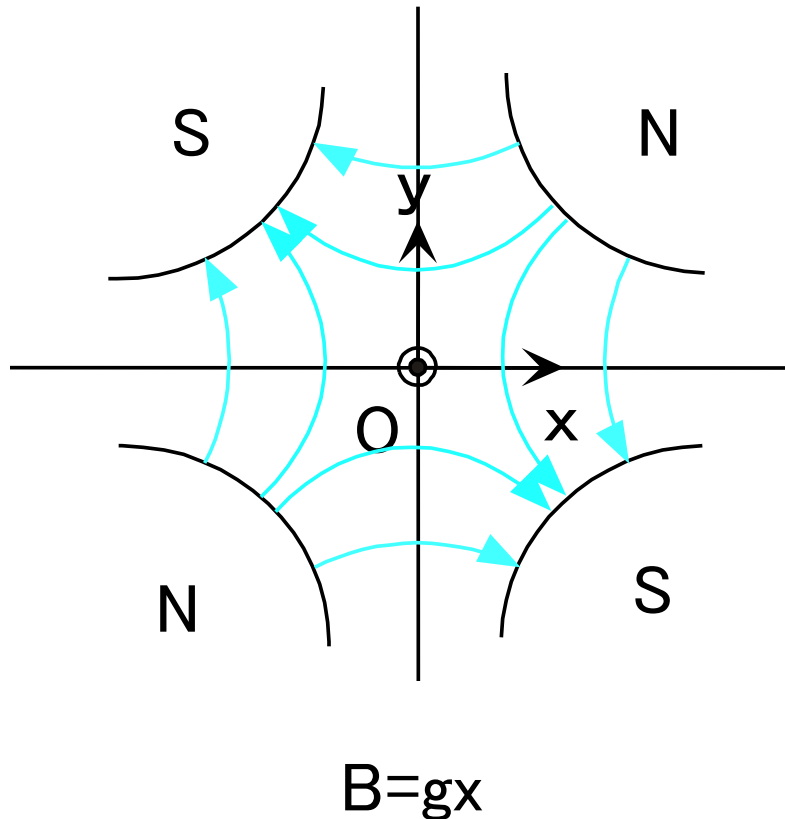
矩形の収束磁石



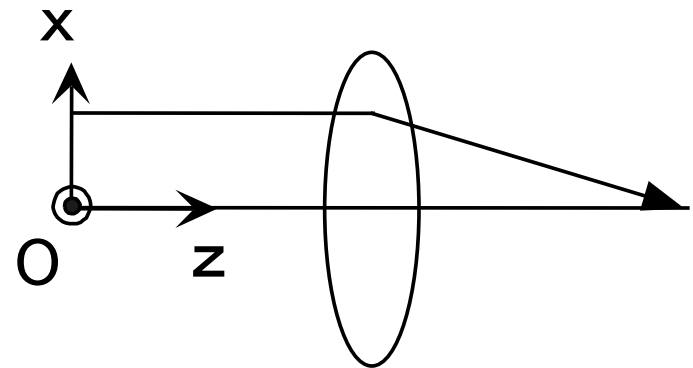
これは、レンズの収束作用を示す。作用の向き(収束か発散か)は、 $k_q^2$ の符号による。この行列要素から、水平面(x-plane)と鉛直面(y-plane)で作用の向きは反対になる。

# 収束磁石の作用

## 収束磁石



## レンズの作用



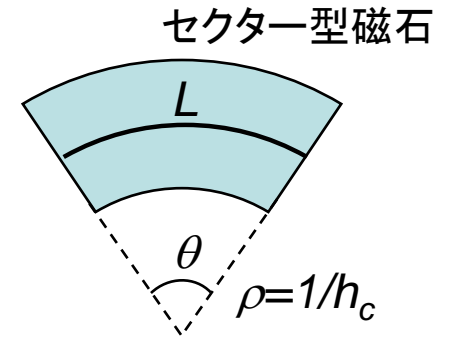
外側を通る粒子ほどより曲がる  
(中心軌道に対してより勾配がつく  
勾配の向きは極性( $k_q^2$ の符号)  
による)

中心からの距離に比例して磁場が強くなる。  
xとyで磁力線の向きに注意すると、力の向き  
は中心に対して、互いに反対になっている。



# ビームライン要素と輸送行列 —セクター(扇)型偏向磁石—

一様磁場のセクター(扇)型偏向磁石の1次の輸送行列を求める。  
 一様磁場なので $n=0$ , すなわち、 $k_x^2=h_c^2$ ,  $k_y^2=0$  の場合である。  
 偏向角を $\theta$ 、中心軌道に沿った磁極長を $L$ とすると、 $k_x L = \theta$ なので、

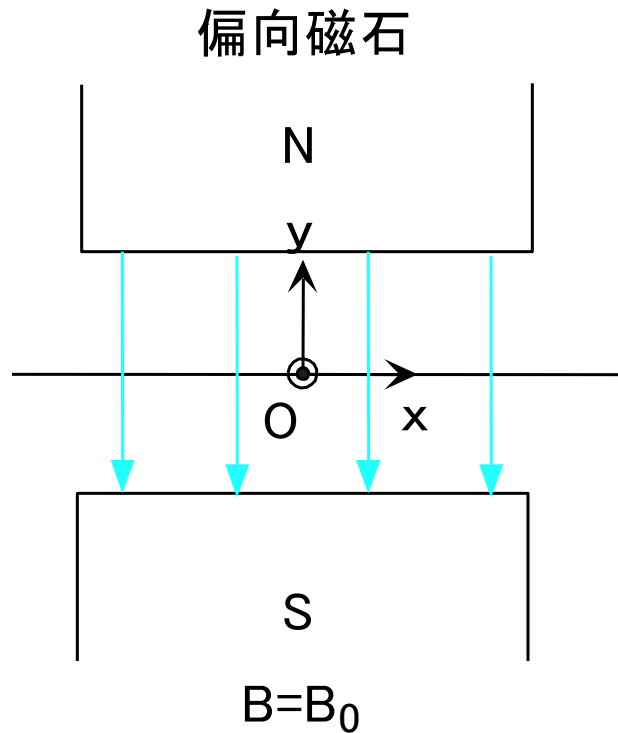


$$M_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta & 0 & 0 & (1-\cos\theta)\rho \\ -\sin\theta/\rho & \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

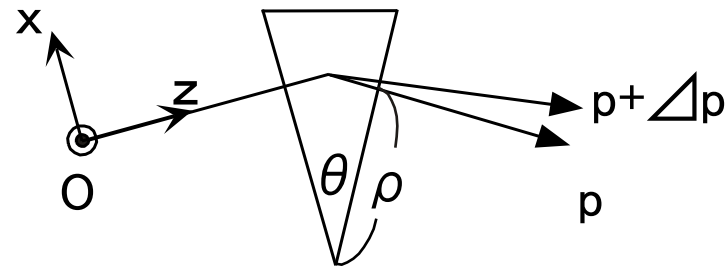
水平面(x-plane)は、レンズ(収束)とプリズム(運動量分散)の作用がある。

鉛直面(y-plane)は、ドリフト空間と同じ作用になる。

# 偏向磁石の作用

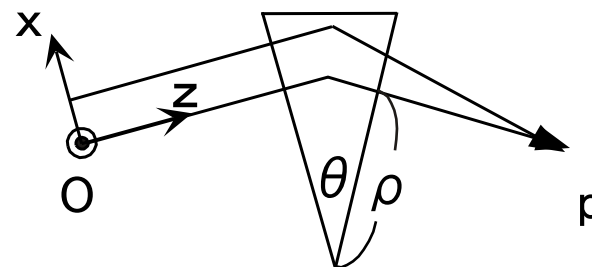


## プリズムの作用



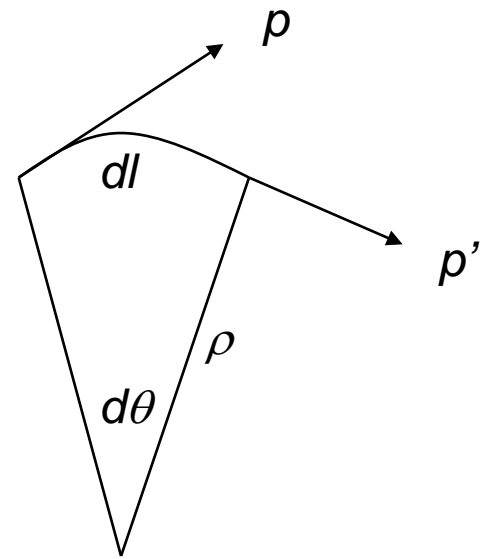
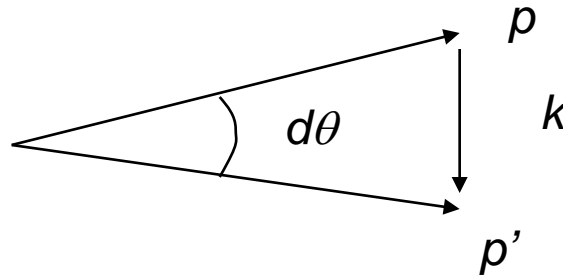
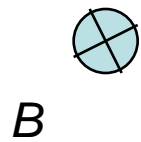
運動量の高い粒子ほど曲がらない  
(中心軌道に対してより(正の)勾配がつく)

## レンズの作用



外側を通る粒子ほどより曲がる  
(中心軌道に対してより(負の)勾配がつく)

# 磁場による粒子の偏向



磁場による荷電粒子の運動は、つぎのLorentz方程式によって記述される。

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

とくに、磁場に対して直交する平面内(上図)では、次のようになるから、

$$F dt = e v dt B, \quad p d\theta = e B dl \quad (\theta = e \int (B/p) dl)$$

$$\therefore p = e B \rho$$

磁場の強さ(B)と磁場中の荷電粒子の軌道(軌道半径:ρ)から、運動量(p)が求まる。

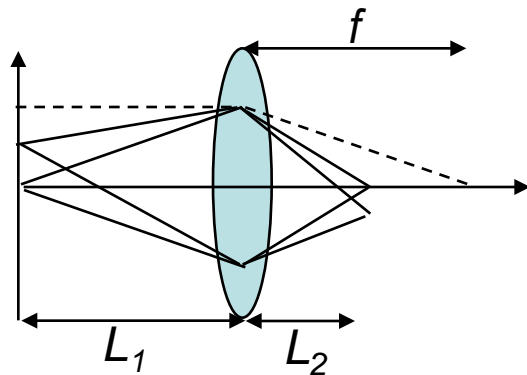
上述の関係式より、素粒子・原子核物理学においてよく使われる単位系にあわせた、

$$pc[eV] = cB\rho[Tm]$$

が便利である。ここで、光速  $c = 2.9979e+8[m/s]$  である。

# 結像光学系と分光器 (スペクトロメータ)

- ①結像光学 (point-to-point focus) : 始点のある1点から任意の方向に出た粒子 (光線) は 終点のある1点に集束する光学系。

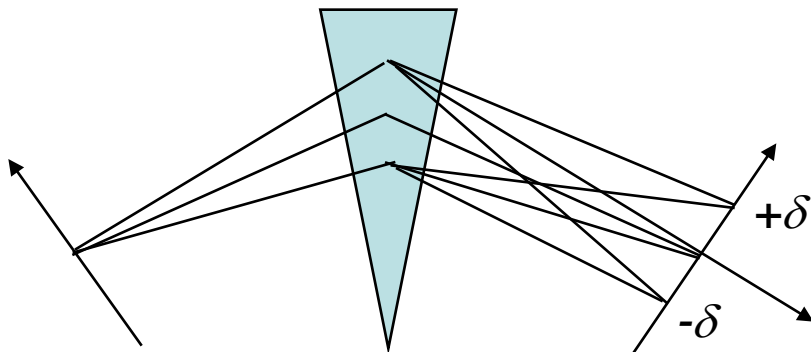


$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ -1/f & 1/m \end{bmatrix}$$

像倍率:  $m = -L_2/L_1$

焦点距離:  $f$

- ②分光器: 結像光学系において終点で運動量分散がゼロでない光学系。焦点位置と運動量に相関が現れる。相関が強く、シャープなほど運動量分解能 (分析能) がよい。



$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & \eta_1 \\ -1/f & 1/m & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

分散:  $\eta_1$

角分散:  $\eta_2$

分析能:  $\eta_1/m$

## 付録5 セクター型磁石を用いたスペクトロメータとBarber's Rule

## 運動方程式の一次近似と一次の輸送行列

磁場中での荷電粒子の運動方程式:  $dp/dt = e (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

を解くとき、粒子の位置と運動量( $x, y, \delta$ )を、粒子の進行に沿った基準軌道(中心軌道と対応する運動量(中心運動量))からの変位として表すことを考える(→直交曲線座標系)。

粒子の変位と運動量が中心軌道と中心運動量の近傍にあって、軌道上の磁場分布について  $y=0$  水平面(偏向面)で対称であると仮定し、多重極展開して、1次の項までを考慮すると、運動方程式は、中心軌道に沿った距離  $s$  を変数として、次のように表される。

$$x'' + k_x^2 x = \delta h_c$$

$$y'' + k_y^2 y = 0$$

ここで、 $h_c (= 1/\rho)$  は中心軌道の曲率(曲率半径の逆数)を表し、

$$k_x^2 = (1-n)h_c^2,$$

$$k_y^2 = nh_c^2$$

である。ただし、 $n$  は磁場勾配(四極磁場成分)のパラメータを表しており、

$$n = -1/(h_c B_y) [\partial B_y / \partial x]_{x=y=0}$$

である。

## 運動方程式の一次近似と一次の輸送行列(つづき)

一方、粒子の初期座標値  $(x_0, \theta_0, y_0, \phi_0, \delta)$  が磁場分布によって受ける変位を(一次)変換で表すことができるとすると、変換の行列を用いて、

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \\ y \\ \phi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{46} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ y_0 \\ \phi_0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

と書ける。ここで、 $x' = dx/ds \sim \theta$ ,  $y' = dy/ds \sim \phi$  とした。行列要素  $R_{ij}$  は、 $s$  の関数である。

これを前頁の微分方程式に代入し、初期座標値について整理すると、 $R_{ij}$  の満たすべき次の連立微分方程式が導かれる。

$$R_{1j}'' + k_x^2 R_{1j} = 0 \quad (j=1,2) \quad R_{2j} = R'_{1j}$$

$$R_{3j}'' + k_y^2 R_{3j} = 0 \quad (j=3,4) \quad R_{4j} = R'_{3j}$$

$$R_{16}'' + k_x^2 R_{16} = h_c \quad R_{26} = R'_{16}$$

となる。上記以外の要素は、 $R_{66} (=1)$  を除いてすべて恒等的に0となる。

## 運動方程式の一次近似と一次の輸送行列(つづき)

前頁の  $R_{ij}$  についての微分方程式は、自明の初期条件  $R_{ij}(s=0)=1$ 、 $R_{ij}(s=0)=0$  を使って解くと、

$$M = \left[ \begin{array}{cc|cc|c} \cos\{k_x s\} & \sin\{k_x s\}/k_x & 0 & 0 & (1-\cos\{k_x s\})h_c/k_x^2 \\ -k_x \sin\{k_x s\} & \cos\{k_x s\} & 0 & 0 & \sin\{k_x s\}h_c/k_x \\ \hline 0 & 0 & \cos\{k_y s\} & \sin\{k_y s\}/k_y & 0 \\ 0 & 0 & -k_y \sin\{k_y s\} & \cos\{k_y s\} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

これが、一次の輸送行列の一般解である。

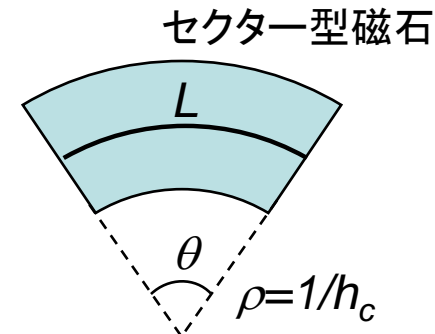


# セクター(扇)型偏向磁石に対する一次の輸送行列

一様磁場のセクター(扇)型偏向磁石の1次の輸送行列を求める。

一様磁場なので $n=0$ , すなわち、 $k_x^2=h_c^2$ ,  $k_y^2=0$  の場合である。

偏向角を $\theta$ 、中心軌道に沿った磁極長を $L$ とすると、 $k_x L = \theta$ なので、前ページの行列に代入して、



$$M_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta & 0 & 0 & (1-\cos\theta)\rho \\ -\sin\theta/\rho & \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

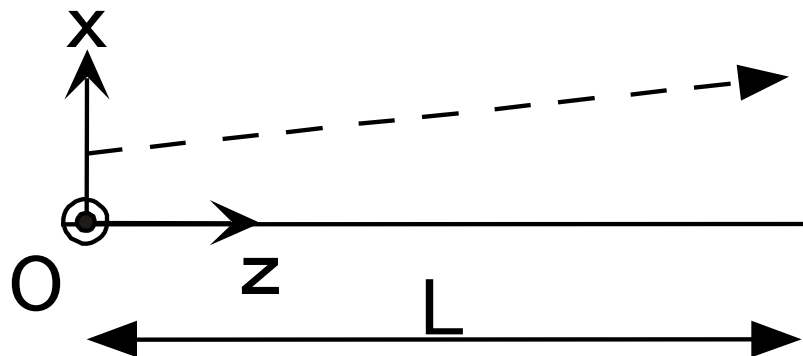
が得られる。

○水平面(x-plane)は、レンズ(収束)とプリズム(運動量分散)の作用がある。

○鉛直面(y-plane)は、ドリフト空間と同じ作用になる。

# ドリフト空間に対する一次の輸送行列

## ドリフト空間



ドリフト空間では、粒子は、はじめに与えられた方向を保ちながら、距離と方向の積だけ位置を変える。運動量に依らない。

ドリフト空間はなんら磁場のない長さの指定された空間である。

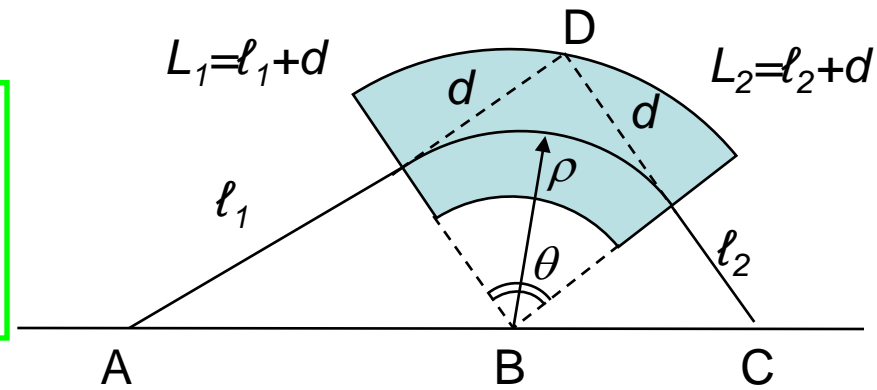
$k_x=k_y=0$  だから、ドリフト空間の長さを $L$ とすると、前々ページの行列に代入して、

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる。

# Barber's Rule

右図のとおり、物点Aから出た一定運動量の荷電粒子が一樣磁場(軌道半径 $\rho$ :偏向角 $\theta$ )によって曲げられ像点Cで収束するとき、A、C及び磁場中の軌道中心Bは一直線上にのる。



○証明

$\triangle ADC$ の面積が $\triangle ADB$ と $\triangle CDB$ の面積の和に等しいことを証明すればよい。

偏向角 $\theta$ のセクター型電磁石の前後にそれぞれ長さ $l_1, l_2$ のドリフトスペースのあるイオン光学システムを考えると、一次の輸送行列は次のように書ける。(→付録4 ビームラインと輸送行列)

$$\begin{bmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -\sin\theta/\rho & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - l_2 \sin\theta/\rho & (l_1 + l_2) \cos\theta + \rho \sin\theta - l_1 l_2 \sin\theta/\rho \\ -\sin\theta/\rho & \cos\theta - l_1 \sin\theta/\rho \end{bmatrix}$$

この光学システムが収束するときの条件(→付録4 結像光学系と分光器)は、

$$(l_1 + l_2) \cos\theta + \rho \sin\theta - l_1 l_2 \sin\theta/\rho = 0$$

ここで、 $L_1 = l_1 + d$   $L_2 = l_2 + d$  と置き換えて整理すると、

$$(L_1 + L_2 - 2d) \cos\theta + \rho \sin\theta - [L_1 L_2 - (L_1 + L_2)d + d^2] \sin\theta/\rho = 0$$

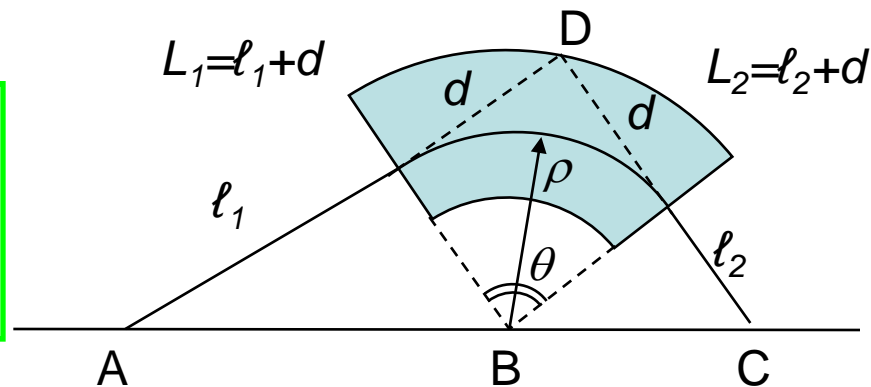
$$(L_1 + L_2)(\cos\theta + d/\rho \sin\theta) - 2d \cos\theta + (\rho^2 - d^2) \sin\theta/\rho = L_1 L_2 \sin\theta/\rho$$

ところで、 $d/\rho = \tan(\theta/2) = (1 - \cos\theta)/\sin\theta$  の関係を用いると次式が得られる。

$$L_1 + L_2 = L_1 L_2 \sin\theta/\rho \quad \dots\dots(\#) \quad \text{このとき、像倍率は } m = \cos\theta - l_2 \sin\theta/\rho = -L_2/L_1$$

# Barber's Rule

右図のとおり、物点Aから出た一定運動量の荷電粒子が一樣磁場(軌道半径 $\rho$ :偏向角 $\theta$ )によって曲げられ像点Cで収束するとき、A、C及び磁場中の軌道中心Bは一直線上にのる。



## ○証明(つづき)

前ページより、光学システムの輸送行列は、

$$\begin{bmatrix} -L_2/L_1 & 0 \\ -1/f & -L_1/L_2 \end{bmatrix}$$

となる。ただし、 $-1/f = -\sin\theta/\rho = -(1/L_1 + 1/L_2)$

次に3つの三角形の面積を求める。

$$\begin{aligned} \Delta ADC &= L_1 L_2 \sin(\pi - \theta) / 2 \\ &= L_1 L_2 \sin\theta / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta ADB + \Delta CDB &= \rho (L_1 + L_2) / 2 \\ &= L_1 L_2 \sin\theta / 2 \end{aligned}$$

ここで、(#)式の関係を使った。よって、

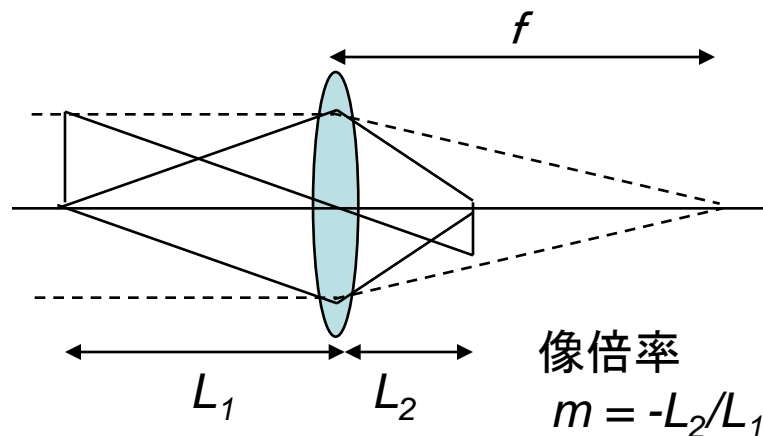
$$\Delta ADC = \Delta ADB + \Delta CDB$$

が示され、Barber's Rule (A, B, Cが一直線上にのる)は証明された。

(#)は、光学レンズにおける焦点位置と焦点距離の関係式

$$1/f = 1/L_1 + 1/L_2$$

に対応している。



一様磁場のセクター型磁石を用いた分光器(スペクトロメータ)について、1次の輸送行列要素(水平面のみ)を運動量分散まで含めて書いておく。

$$\begin{bmatrix} -L_2/L_1 & 0 & \eta_1 \\ -1/f & -L_1/L_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

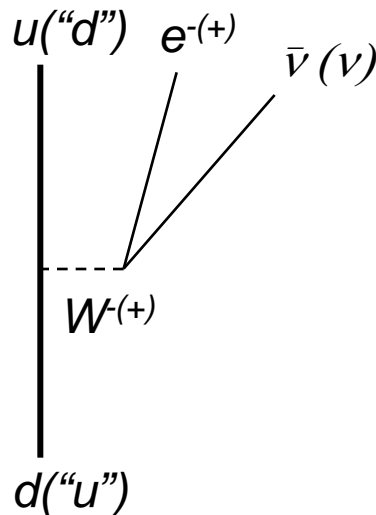
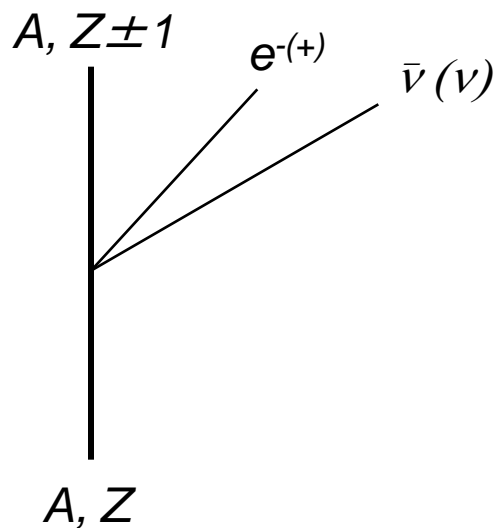
ただし、

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1 - \cos\theta)\rho + (L_2 - d)\sin\theta \\ &= L_2 \sin\theta \\ &= L_2 (1/L_1 + 1/L_2)\rho \quad (= L_2 \eta_2) \end{aligned}$$

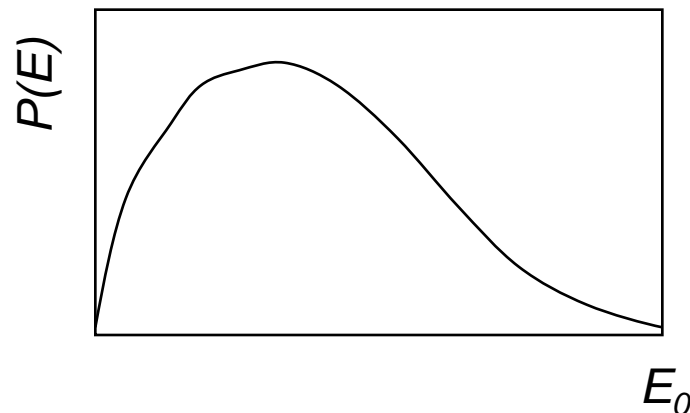
$$\begin{aligned} \eta_2 &= \sin\theta \\ &= \rho(1/L_1 + 1/L_2) \end{aligned}$$

## 付録6 ベータ崩壊とベータ線スペクトル

# ベータ崩壊基礎知識



β線のエネルギースペクトル



ベータ(β)線:主に原子核のベータ崩壊(左図)に伴って放出される電子(または陽電子)を指す。アルファ線( $^4\text{He}$ 核)、ガンマ線(光量子)とともに、放射性同位体から放出される代表的な放射線の1つ。

β線のエネルギースペクトルは $E_0$ を上限とする連続分布(右図)

$\nu$ は見えない(検出が非常に困難な)ので、β線の連続スペクトルは、一見、エネルギー保存則に違反しているように見える。 →  $\nu$ の発見

→  $E_0$ 付近のスペクトルの精密測定により $\nu$ 質量の測定も可能

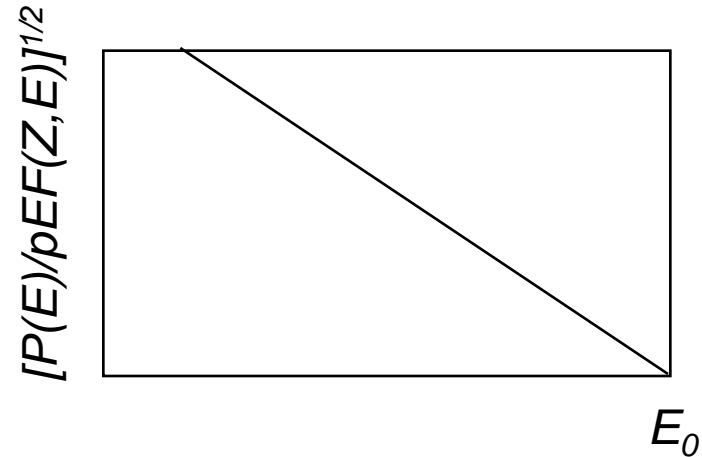
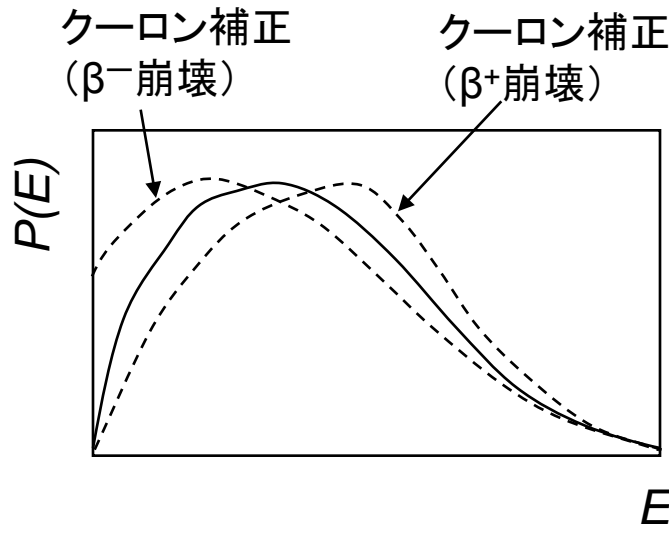
- c.f. ○ スピン偏極させた $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e + \bar{\nu}$ の放出電子の空間異方性の測定から弱い相互作用におけるパリティ(空間対称性)の非保存が示されたのは有名な話。
- ( $\nu$ の放出を伴わない)2重β崩壊の測定による $\nu$ 質量と性質(反粒子と粒子の区別のないマヨラナ粒子か区別のあるディラック粒子か)の研究は、最先端のテーマ。 79

# ベータ崩壊基礎知識

- 原子核の $\beta$ 崩壊では、 $\nu$ と $e$ の波動関数のうち、軌道角運動量( $L$ )の小さい成分ほど原子核の波動関数との重なりが大きい(長波長近似)。
- $\nu$ と $e$ が持ち出しうる角運動量( $\Delta J$ )は、原子核の始状態(親核)と終状態(娘核)の角運動量( $J_i, J_f$ )に対して、角運動量の保存則によって制限される。  
→角運動量変化( $\Delta J$ )の選択則
- 従って、 $\nu$ と $e$ が持ち出す軌道角運動量 $L=0$ (S波)が許される遷移の場合に遷移確率が最も大きくなり、許容遷移と呼ばれる。
- 許容遷移には、次の2つの場合がある。
  - Fermi型*: 核子のスピントリップを伴わない。 $\nu$ と $e$ の合成スピン=0(1重状態)  
 $\Delta J=0$ 、パリティ変化なし(S波)
  - Gamow-Teller型*: 核子のスピントリップを伴う。 $\nu$ と $e$ の合成スピン=1(3重状態)  
 $\Delta J=0, \pm 1$ 、パリティ変化なし(S波) ただし、 $J_i=0^+ \rightarrow J_f=0^+$  の場合を除く
- 許容遷移が禁止されるとき、遷移間の角運動量保存則を満たすような $\nu$ と $e$ の $L$ の成分により遷移(禁止遷移)が起こる。一般に $L$ が大きいほど遷移確率(崩壊寿命)が小さい(長い)。
  - 第1禁止遷移:  $\Delta J=0, \pm 1, \pm 2$ 、パリティ変化あり(P波)
  - 第2禁止遷移:  $\Delta J=\pm 1, \pm 2, \pm 3$ 、パリティ変化なし(D波)
  - ⋮



# ベータ崩壊基礎知識



放出電子のエネルギースペクトルは $E_0$ を上限とする連続分布

$$P(E)dE = 2\pi|H_{fi}|^2(dn/dE_0) = (1/2\pi)pE(E_0-E)^2 F(\pm Z, E)\xi C(E)$$

$$F(\pm Z, E) = (1+\gamma)/2 \{ 4(2pR)^{2\gamma-2} \exp(\pm\pi\nu) |\Gamma(\gamma \pm i\nu)|^2 / (\Gamma(2\gamma+1))^2 \} : \text{Fermi関数 (クーロン補正)}$$

$$\gamma = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2} \quad \nu = \alpha ZE/p \quad Z: \text{娘核の原子番号 (負号は}\beta^+\text{崩壊)} \quad \alpha: \text{微細構造定数}$$

$R: \text{核半径}$

クーロンポテンシャルによって電子の波動関数が平面波から歪む効果を補正する。

$\xi C(E)$ : 核行列要素に依存する項 一般に、 $C(E) \sim 1 + aE + b/E + cE^2 + \dots$  と書ける。

許容遷移は $\xi C(E)$ の $E$ 依存性が非常に弱いので

$$\text{カーブプロット: } [P(E)/pEF(Z, E)]^{1/2} \sim E_0 - E$$

をとると、スペクトルは直線になる。