
scknzw 実施報告書 2006

平成 19 年 5 月 25 日

研究テーマ

軽いクォーク質量のクローバーフェルミオン系での QCD 真空の研究

研究組織

鈴木恒雄 (代表): 金沢大学/理研
石黒克也: 金沢大学/理研
駒 佳明: 沼津高専
関戸 暢: 金沢大学/理研
中村宜文: DESY/理研
森 祥寛: 金沢大学
長谷川 将康: 金沢大学/理研

共同研究組織 [DIK collaboration]

DESY/ZIB (G. Schierholz, H. Stüebgen)

IATEP/IHEP (M. Polikarpov, A. Veselov, V. Bornyakov, M. Chernodub, F. Gubarev)

1. シミュレーションの概要

2006 年度は、 $O(a)$ で非摂動的に改良された clover Wilson fermionic action と gluonic action を用いてコンフィギュレーションの生成を行い、さらにそのコンフィギュレーションに対してゲージ固定やランダムゲージ変換といった解析を SR11000 を用いて行った。特に、Blue Gene が利用可能になった最初の年ということもあり、コンフィギュレーションを生成するコードの作成は中村 (DESY) が行い、そのコードを用いて金沢大学グループがコンフィギュレーションの一部生成を行った。DIK がこれまでに生成したコンフィギュレーションは以下の表に示した。

特に、2006 年度生成したコンフィギュレーションは表、 $\beta = 5.29$, $\kappa = 0.1362$, $24^3 \times 48$, $\beta = 5.29$, $\kappa = 0.13632$, $32^3 \times 64$, $\beta = 5.40$, $\kappa = 0.1364$, $24^3 \times 48$ のコンフィギュレーションである。解析に使用したコンフィギュレーション数は、それぞれ 391 個、195 個、199 個である。

β	κ	volume	m_π [MeV]	m_π/m_ρ	r_0/a	a [fm]
5.20	0.1355	$16^3 \times 32$	578(8)	0.602(6)	5.04(5)	$9.92(10) \times 10^{-2}$
5.25	0.13575	$24^3 \times 48$	558(4)	0.605(4)	5.53(4)	$9.04(7) \times 10^{-2}$
5.29	0.1355	$24^3 \times 48$	718(8)	0.703(6)	5.57(2)	$8.98(10) \times 10^{-2}$
5.29	0.135	$16^3 \times 32$	868(13)	0.767(3)	5.23(7)	$9.54(14) \times 10^{-2}$
5.29	0.134	$16^3 \times 32$	1100(190)	0.833(4)	4.81(8)	$10.4(2) \times 10^{-2}$
5.29	0.1362	$24^3 \times 48$	373(2)	0.429(7)	6.03(5)	$8.29(7) \times 10^{-2}$
5.29	0.13632	$32^3 \times 64$	315(3)	0.420(6)	6.05(5)	$8.26(10) \times 10^{-2}$
5.40	0.1364	$24^3 \times 48$	415(5)	0.505(9)	6.82(5)	$7.33(6) \times 10^{-2}$

ゾンマースケールを $r_0 = 0.5$ [fm] とする。

2. 解析の概要

生成されたパイオン質量の軽いコンフィグレーションを用いて、我々独自のアイデアであるモノポールの解析を行った。この研究は、前論文 (Phys.Rev.D70:074511) の続きである。

[1] Non-Abelian のポテンシャル

(1) ノンアーベリアンのリンク変数に対して APE スメアリングを行う。これを式で書くと以下のようになる。

$$U_k(s) \rightarrow V_k(s) = PROJ_{SU(2)} \left[U_k(s) + \alpha \sum_{j \neq k} U_j(s) U_k(s + \hat{j}) U_j^\dagger(s + \hat{k}) \right] \quad (1)$$

スメアリングのパラメータを決定するためにオーバーラップ ($C(\mathbf{R})$) と呼ばれる量を測定する。それは、以下の関係式で示される。

$$C(\mathbf{R}) = \langle W(\mathbf{R}, T) \rangle^{T+1} / \langle W(\mathbf{R}, T+1) \rangle^T \quad (2)$$

ただし、

$$\langle W(\mathbf{R}, T) \rangle = C(\mathbf{R}) \exp^{-V(\mathbf{R})^T} + (\text{“excited state”}) \quad (3)$$

の関係式をみたとす。オーバーラップが ”1” に近いものを基底状態に近い状態と考え、以下の解析では 1 に近い n と α をパラメータを動かして決定した。

(2) Wilson loop からポテンシャルを求める。

$$V(\mathbf{R}, T) = \ln [\langle W(\mathbf{R}, T) \rangle / \langle W(\mathbf{R}, T+1) \rangle] \quad (4)$$

(3) ポテンシャルから物理量を測定する。

QCDSF が先に出した物理量と今回解析を行ったコンフィグレーションとの整合性を見るため、ノンアーベリアンのポテンシャルを fit し、得られたパラメータから R_0 をもとめる。 R_0 の定義式は以下のようになる。

$$R_0 = \sqrt{\frac{1.65 - \alpha}{\sigma}} \quad (5)$$

ただしポテンシャルは

$$V(R) = V_0 - \frac{\alpha}{R} + \sigma R \quad (6)$$

で fit できるものとする。($R = |\mathbf{R}|$)

(4) ストリングテンション σ をポテンシャルの fit から決定する。

[2] Abelian のポテンシャル

(1) 生成されたコンフィグレーションに対して MA ゲージ固定を行う。

MA ゲージ固定とは、ある関数 $F[U]$ に対して

$$F[U] = \frac{1}{12V} \sum_{s, \mu} \sum_{i=1}^3 |U_{ii}(s, \mu)|^2 \quad (7)$$

の行列要素の対角成分が最大になるようにとることである。(ここで U はノンアーベリアンリンク変数、 V は全サイト数である。) このゲージ固定を行うために、Simulated Annealing (SA) algorithm を用いた。この時、重要な量として Gribov copy の数があげられるが、今回の解析では、Gribov copy の数が 10 回以上

で物理量が平になることがわかったので、この結果から全てのコンフィグレーションに対し Gribov copy の数を 10 回として解析を行った。

(2) ゲージ固定された SU(3) のリンク変数から 3 つのアーベリアンのリンク変数 ($u_i, i = 1, 2, 3$) を以下のように抜き出すことができる。

$$u(s, \mu) \equiv \arg[u_1(s, \mu), u_2(s, \mu), u_3(s, \mu)] \quad (8)$$

$$u_i(s, \mu) = \exp[i\theta_i(s, \mu)] \quad (9)$$

ここで、 θ_i は SU(3) のリンク変数 U_{ij} より

$$\theta_i(s, \mu) = \arg[U_{ii}(s, \mu)] - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \arg[U_{jj}(s, \mu)] \Big|_{\text{mod} 2\pi} \quad (10)$$

ただし、 $\theta_i(s, \mu) \in \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

(3) このリンク変数を用いてノンアーベリアンと同様にアーベリアンのリンク変数に対してスメアリングを行い n と α を決定する。

(4) ポテンシャルの fit からアーベリアンのストリングテンション σ_{abe} を求める。

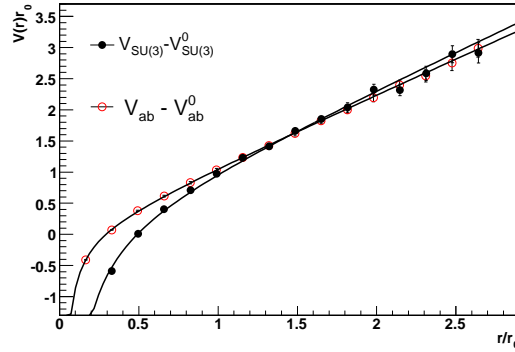


図 1: Non-abelian と Abelian の比較, $\beta = 5.29$, $\kappa = 0.13632$, $a = 8.26(10) \times 10^{-2}[\text{fm}]$

[3] Monopole と photon のポテンシャル

(1) アーベリアンのリンク変数から monopole current を求める。

スメアリングしたアーベリアンのリンク変数からブラケットを作り、そのブラケットを貫く Dirac string の数がモノポールカレントとして定義される。

$$k_i(*s, \mu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\square \in \partial f(s+\hat{\mu}, \mu)} \arg[u_i(\square)] = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (11)$$

このとき条件として以下の関係式が成り立つものとする。

$$\sum_{i=1}^3 k_i(*s, \mu) = 0 \quad (12)$$

(2) ここで格子上での monopole currents を定義すると (SU(2) の場合)、U(1) ゲージ場 u_μ は次式で与えられる。

$$u_\mu = \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(x)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

単位プラケット C に沿った u_μ の積に対してトレースをとったものをアーベリアン Wilson loop といい、

$$W_{abelain} = \frac{1}{2} Tr \prod_{x, \mu \in C} u_\mu(x) = \cos \theta_{\mu\nu}(x) \quad (14)$$

と与えられる。ここで、 $\theta_{\mu\nu}$ は物理的な feild strength と Dirac string のパートに分類することができ、

$$\theta_{\mu\nu}(x) \equiv \bar{\theta}_{\mu\nu}(x) + 2\pi n_{\mu\nu} \quad (15)$$

$$-\pi < \bar{\theta}_{\mu\nu} \leq \pi, \quad n_{\mu\nu} = -2, -1, 0, 1, 2 \quad (16)$$

となる。このとき $n_{\mu\nu}$ は非物理的な整数を示す。これが先ほど見たプラケットを貫く Dirac string の数に対応している。これらから monopole currents が以下のように導かれる。

$$k_\nu(x) = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu n_{\rho\sigma}(x + \hat{\nu}) \quad (17)$$

(3) monopole currents から monopole と photon の Wilson loop を求める。

先ほど定義した $\theta_{\mu\nu}$ を用いてアーベリアンの Wilson loop を以下のように定義することができる。

$$W_{abelian} = W_{monopole} \cdot W_{photon}$$

$$W_{abelian} = \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_x \theta_{\mu\nu}(x) M_{\mu\nu}(x) \right]$$

また、アーベリアン Wilson loop は、以下のように monopole と photon の部分に分けることができる。

$$W_{monopole} = \exp \left[-\pi i \sum_{x, x'} k_\beta(x) D(x - x') \epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} \partial_\alpha M_{\gamma\sigma}(x') \right], \quad W_{photon} = \exp \left[i \sum_{x, x'} \partial'_\mu \bar{\theta}_{\mu\nu}(x) D(x - x') J_\nu(x') \right]$$

ここで、 $J_\mu \equiv \partial'_\nu M_{\mu\nu}$ と

$$M_{\mu\nu} = \sum_{x'} [\partial_\mu D(x - x') \partial'_\sigma M_{\nu\sigma}(x') - \partial_\nu D(x - x') \partial'_\sigma M_{\mu\sigma}(x') - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} \partial'_\sigma D(x - x') \partial_\alpha M_{\beta\gamma}(x)]$$

を用いた。

(4) これらの Wilson loop から monopole と photon のポテンシャルを求める。

(5) ポテンシャルを fit したパラメータから monopole と photon のストリングテンション $\sigma_{mon}, \sigma_{ph}$ を求める。

[4] Abelian dominance and monopole dominance

先ほど求めたノンアーベリアンとアーベリアンのストリングテンションの比が $\sigma_{abe}/\sigma_{Non-abe} \doteq 1$ である場合をアーベリアンドミナンスとよぶ。同様に、アーベリアンのストリングテンションとモノポールのストリングテンションの比が $\sigma_{Mon}/\sigma_{Abe} \doteq 1$ のときをモノポールドミナンスとよぶ。今回の解析でもアーベリアンドミナンス及びモノポールドミナンスが観測された。つまりこれは、ノンアーベリアンの自由度がモノポールの自由度で説明できることを示している。

[5] Monopole cluster and density

monopole density を monopole currents より定義する。

$$\rho = \frac{1}{12V} \sum_i \sum_{s, \mu} |k_i(*s, \mu)| \quad (18)$$

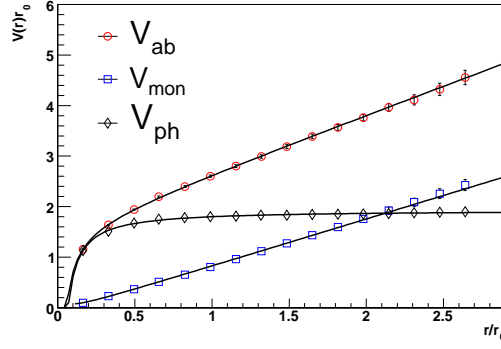


図 2: Abelian, monopole と photon のポテンシャルの比較. $\beta = 5.29, \kappa = 0.13632, a = 8.26(10) \times 10^{-2}[\text{fm}]$

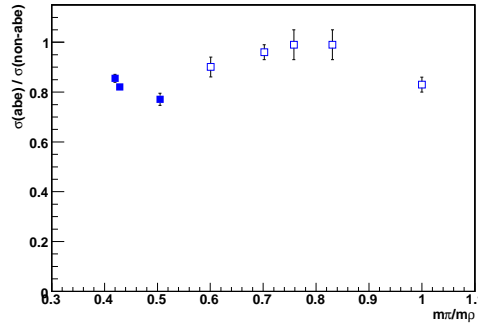


図 3: Abelian dominance、■ は、 $m_\pi = 315(3), 373(2), 415(5) [\text{MeV}]$ のデータを示す。また、□ は以前の DIK のデータを示している。

物理的な volume を十分大きくすると、図 5 のように monopole density を 2 つの部分に分けることができる。monopole length が 0 付近のものを small (ultraviolet) cluster とよび、大きいものを large (infrared) cluster とよぶ。

monopole length を large cluster と small cluster とに分離し、さらにその cluster から密度を求めると図 6 のようになる。

[6] Effective monopole action

(1) モノポールアクションを以下の手順から決定する。

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}U \delta(X^{off}) \Delta_F(U) \exp(-S(U)) \\
&= \int \mathcal{D}u \left[\int \mathcal{D}c \delta(X^{off}) \Delta_F(U) \exp(-S(U)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}u \exp(-S_{eff}(u)) \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k^{(a)} \in Z} \delta_{\partial'_\mu k_\mu^{(a)}, 0} \delta_{\sum_a k^{(a)}, 0} \int \mathcal{D}u \delta(k^{(a)}, u) \exp(-S_{eff}(u)) \\
&= \sum_{k^{(a)} \in Z} \delta_{\partial'_\mu k_\mu^{(a)}, 0} \delta_{\sum_a k^{(a)}, 0} \exp(-S_{eff}[k^{(a)}]) \tag{20}
\end{aligned}$$

このとき、 $U_\mu(s) = c_\mu(s)u_\mu(s)$ は $SU(3)$ リンク変数であり、 c_μ はその非対角グルオン成分、また $u_\mu(s)$ は $U(1)$ リンク場を示す。 $SU(3)$ の場合、この $U(1)$ リンク変数は 3 つある。 X^{off} は MA ゲージ固定によって

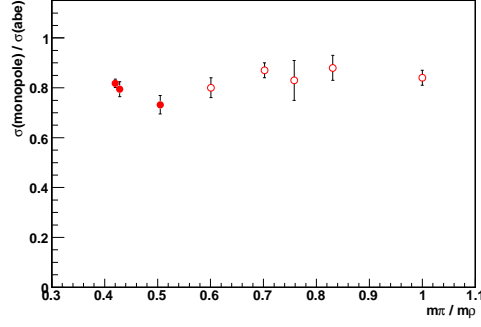


図 4: Monopole dominance. ● は $m_\pi = 315(3), 373(2), 415(5)$ [MeV] のデータを示す。また、○ は以前の DIK のデータを示している。

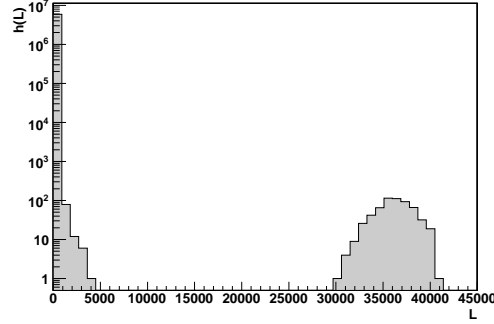


図 5: モノポール密度分布, $L_{\text{phy}} = 2.6[\text{fm}]$, $\beta = 5.29$, $\kappa = 0.13632$, $a=8.26(10)\times 10^{-2}[\text{fm}]$

対角化される演算子の非対角項を示し、 $\Delta_F(U)$ は MA ゲージ固定の Faddeev-Popov の行列式を示す。式 (19) の S_{eff} は有効アーベリアンアクションを示し、モノポールアクションは、モノポールカレントを用いてモノポール以外の寄与を積分することによって、式 (20) で示される。このような積分の実行を改良された Swendsen の方法を用いて行い、最終的にアクションの G_i (i は相互作用の数を示す) を決定するのが目的である。また、連続極限をとるために、n-blocked モノポールカレント

$$K_\mu^{(a)}(s^{(n)}) \equiv \sum_{i,j,m=0}^{n-1} k_\mu^{(a)}(ns + (n-1)\hat{\mu} + i\hat{\nu} + j\hat{\rho} + m\hat{\sigma}) \quad (21)$$

を使い、ブロックスピン変換を行う。

もし、数値解析的に得られたアクションが、 $S[K_\mu^a(s^n), n, a(\beta)] = S[K_\mu^a(s^n), b = na(\beta)]$ をみだし、スケール b のみに依存しているならば連続極限は固定した物理スケール b に対して、 $n \rightarrow \infty$, $a(\beta) \rightarrow 0$ をとることに対応している。

(2) モノポールアクションを決める。

29 個の相互作用項 (2 点相互作用項 27 個と 4 点相互作用項 2 個、6 点相互作用項 2 個) のモノポールアクションをモノポールカレントを用いて以下の形に仮定する。

$$S[k^{(a)}] = \sum_{i=1}^{29} G_i S_i[k^{(a)}] \quad (22)$$

a はカラーの足を示している。さらに、具体的に 2 点の場合の相互作用項をプロットしたものが、以下の図 7, 8 である。ただし、今回の解析では 2 本の独立なモノポールカレントの中の 1 本を用いて解析を行った。

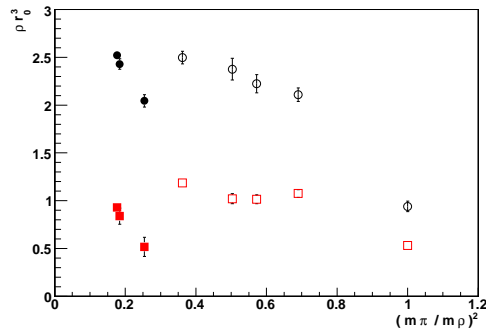


図 6: モノポール密度の質量依存性、●, ○ は全ての cluster から求められた密度を示し、また ■, □ は large cluster から求められた密度を示す。さらに、●, ■ がそれぞれ新しいデータである。

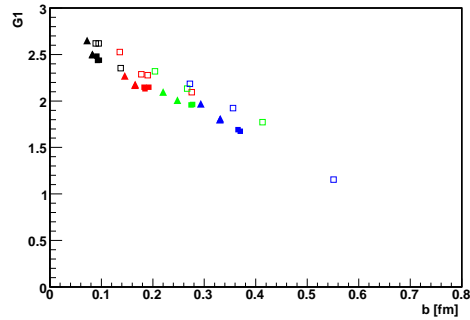


図 7: 縦軸に Self-coupling $G1$ 、横軸に $b(=n \cdot a)$ をとった場合のグラフ。▲ は $m_\pi = 315(6), 373(7), 415(9)$ [MeV] を示し、■ は $m_\pi = 554(4), 718(8), 869(3)$ [MeV] を示す。また、□ はクエンチ近似の値を示している。色の違いは各々ブロックスピン変換の回数を示している。

[7] まとめ

(1) ポテンシャルの解析

ポテンシャルの解析から、これまでと同様にアーベリアンドミナンスとモノポールドミナンスがパイオンの質量を軽くしたときにも確認された。

(2) モノポールアクション

今回の解析から $G1$ (self-coupling) は、質量依存性などの大きな変化は見られず、スケールしていることが確認された。 $G2$ も同様に、その値が質量と共に滑らかに下がり、スケールしていることがわかった。

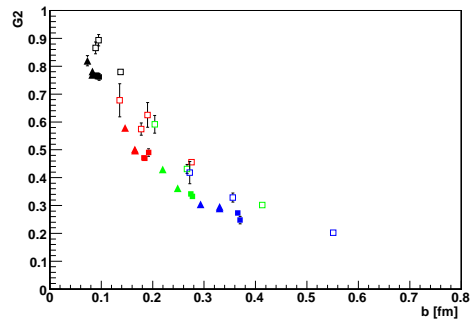


図 8: 縦軸に G_2 の coupling をとった場合のグラフ。▲ は $m_\pi = 315(6), 373(7), 415(9)$ [MeV] を示し、■ は $m_\pi = 554(4), 718(8), 869(3)$ [MeV] を示す。また、□ はクエンチ近似の値を示している。色の違いは各々ブロックスピン変換の回数を示している。

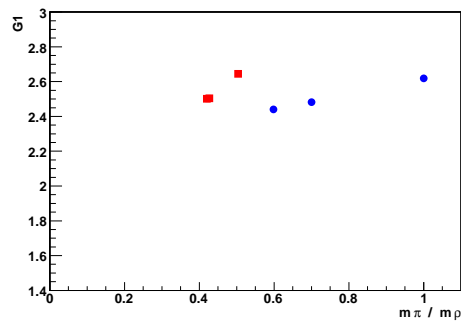


図 9: Self-coupling G_1 の m_π/m_ρ 依存性。● は $m_\pi = 315(6), 373(7), 415(9)$ [MeV] ■ は $m_\pi = 554(4), 718(8), 869(3)$ [MeV] を示す。

研究発表リスト

口頭発表

- Title: The confining potential and The low-energy effective monopole action with two flavors of dynamical quarks
Joint meeting of pacific region particle physics communites, Hawaii, Oct29 - Nov3, 2006
M. Hasegawa, Y. Nakamura, K. Ishiguro, T. Sekido, T. Suzuki with DIK
- Title: The confining potential and The low-energy effective monopole action with two flavors of dynamical quarks(2)
2007 年春季大会、首都大学東京
M. Hasegawa, Y. Nakamura, K. Ishiguro, T. Sekido, T. Suzuki with DIK