

大型シミュレーション研究実施報告書

研究課題 格子 QCD によるハドロン散乱長

課題番号 大型－07-13

研究組織

研究責任者	森松 治	高エネルギー加速器研究機構	准教授
研究従事者	矢木 拓也	東京大学理学系研究科	博士1年
	大谷 宗久	University of Regensburg	研究員
	橋本 省二	高エネルギー加速器研究機構	准教授

研究の動機

ハドロンの相互作用を理解することは、強い相互作用の物理の最も重要な課題の一つである。低エネルギーにおけるハドロンの相互作用は、QCD の非摂動的な現象であり、模型等によらずに理論的な解析を行うためには、格子 QCD によるシミュレーションがほとんど唯一の方法である。

カイラル対称性は、閉じ込めとともに非摂動的な QCD の最も重要な性質であり、低エネルギーにおけるハドロンの相互作用において重要な役割を果たす。実際、パイ中間子と他のハドロンの相互作用はカイラル対称性によって完全に決まってしまうし、他のハドロンの相互作用においてもカイラル対称性は重要な役割を果たすと考えられる。したがって、ハドロンの相互作用を理解するためには、カイラル対称性をできるだけ尊重する理論的定式化を用いて解析を行うことが望ましい。最近まで、格子 QCD のシミュレーションにおいては、ニールセン - 二宮の定理により、ダブリングなしにカイラル対称性を尊重するフェルミオンの定式化は存在しなかった。最近のドメインウォールフェルミオン、オーバーラップフェルミオンの理論的發展及び計算機の能力の向上により、格子上で現実的なカイラル対称性を持ち、ダブリングの問題を持たないフェルミオンを用いたシミュレーションが可能になりつつある。

本研究の目的は、カイラル対称性を尊重するオーバーラップフェルミオンの定式化を用いた格子 QCD のシミュレーションによりハドロンの相互作用を理解することにある。

研究の詳細

有限体積中 L^3 における 2 粒子系 (質量 m_1, m_2) のエネルギーの無限体積中からのずれ、 δE 、と 2 粒子の散乱長、 a_0 、は、以下の関係式 (Lüscher の公式) を満たす。(c_1, c_2 は定数)

$$\delta E = -\frac{2\pi(m_1 + m_2)a_0}{m_1 m_2 L^3} \left[1 + c_1 \frac{a_0}{L} + c_2 \left(\frac{a_0}{L} \right)^2 \right] + O(L^{-6})$$

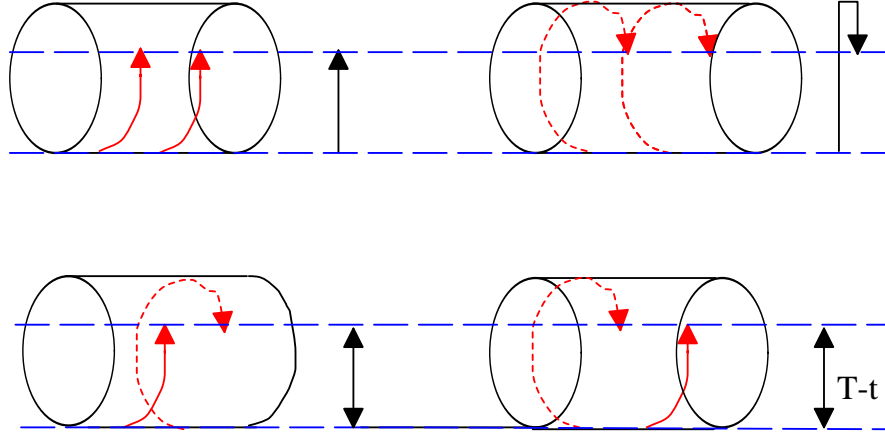


Figure 1: パイ中間子の4点関数のダイアグラム。赤の矢印はパイ中間子の伝搬を表す。下の2つのダイアグラムが *wrap-around* 効果のダイアグラム。

以下では、 $I = 2$ の $\pi\pi$ 散乱長について話を限る。
パイ中間子の2点関数は通常と同じく次のようにパラメトライズする。

$$\begin{aligned}
 C_\pi(t, 0) &= \left\langle \sum_{\vec{x}_2} O_\pi(\vec{x}_2, t) \sum_{\vec{x}_1} O_\pi^\dagger(\vec{x}_1, 0) \right\rangle \\
 &= A_1 \left(e^{-m_\pi t} + e^{-m_\pi(T-t)} \right) \\
 &= a_1 \cosh(-m_\pi(t - T/2)), \\
 a_1 &\equiv 2A_1 e^{-m_\pi T/2},
 \end{aligned}$$

ここで、 m_π はパイ中間子の質量、 T は時間方向の格子の大きさ、 A_1 は定数である。

パイ中間子の4点関数は、Figure 1 で表されるように *wrap-around* 効果を含むので、次のようにパラメトライズする。

$$\begin{aligned}
 C_{\pi\pi}(t, 0) &= \left\langle \sum_{\vec{x}_4} O_\pi(\vec{x}_4, t) \sum_{\vec{x}_3} O_\pi(\vec{x}_3, t) \sum_{\vec{x}_2} O_\pi^\dagger(\vec{x}_2, 0) \sum_{\vec{x}_1} O_\pi^\dagger(\vec{x}_1, 0) \right\rangle \\
 &= A_2 \left(e^{-E_{2\pi} t} + e^{-E_{2\pi}(T-t)} \right) + 2 \cdot Z A_1^2 e^{-E_{2\pi} t} e^{-E_{2\pi}(T-t)} \\
 &= a_2 \cosh(-E_{2\pi}(t - T/2)) + a_3, \\
 a_2 &\equiv 2A_2 e^{-E_{2\pi} T/2} \\
 a_3 &\equiv 2Z A_1^2 e^{-m_\pi T} = \frac{Z}{2} a_1^2,
 \end{aligned}$$

ここで、 $E_{2\pi}$ は有限体積中の2個のパイ中間子のエネルギー、 A_1 、 Z は定数 ($Z \sim 1$) である。

ハドロンの4点関数と2点関数より、有限体積中におけるエネルギーのずれ、 δE 、が求まる。

今年度は、昨年度に引き続いて $I = 2$ の $\pi\pi$ 散乱長について研究を行った。昨年度の研究で課題として残されたカイラル摂動理論との不一致について調べるために次の2点を改良した。

- ゲージ場の統計数を約2倍増やした。
- クォークの伝搬関数の計算において low mode average を改善した。

ゲージ場の配位は、JLQCD collaboration が生成したフル QCD のゲージ場の配位を引き続き使わせて頂いた。入力パラメータ・計算条件の中で、特に重要なものを Table 1 にまとめる。

Table 1: 入力パラメータ・計算条件

Parameter	Value
Lattice Size	$16^3 \times 32$
Flavor Number	2
Wilson Mass	-1.60
β	2.30
μ	0.20
Topological Charge	0
Gauge Action	Rectangular Improved Action
Fermion Action	Overlap Fermion
Source Type	Wall Source
Gauge Fixing or Non Fixing	Coulomb Gauge

また、シミュレーションに使用したクォーク質量 m の値 (lattice unit) と対応する格子定数 a (fm) を Table 2 にまとめた。これは、JLQCD グループの解析により得られたものである。

Table 2: クォーク質量と格子定数

m	No.conf	a [fm]
0.015	780	0.1194(16)
0.025	920	0.1207(17)
0.035	910	0.1215(16)
0.050	880	0.1235(13)
0.070	800	0.1253(14)
0.100	760	0.1275(11)
0.000	-	0.1184(12)

結果

以下で定義した量より、有効質量を抜き出した。この際 *wrap-around* 効果の確認のため、それを含まない形で想定された有効質量との比較を行った。

- Single-Pion

$$\begin{aligned} R_2(t) &\equiv \frac{C_{\pi^+}(t+1)}{C_{\pi^+}(t)} \\ &= \frac{\cosh(-m_\pi(t)(t+1))}{\cosh(-m_\pi(t)t)} \end{aligned}$$

- Double-Pion with the *wrap-around* effect

$$\begin{aligned} R_4(t) &\equiv \frac{C_{\pi^+\pi^+}(t+1) - C_{\pi^+\pi^+}(t)}{C_{\pi^+\pi^+}(t) - C_{\pi^+\pi^+}(t-1)} \\ &= \frac{\cosh(-E_{2\pi}(t)(t+1)) - \cosh(-E_{2\pi}(t)(t-1))}{\cosh(-E_{2\pi}(t)t) - \cosh(-E_{2\pi}(t)(t-1))} \end{aligned}$$

- Double-Pion without the *wrap-around* effect

$$\begin{aligned} R_4(t) &\equiv \frac{C_{\pi^+\pi^+}(t+1)}{C_{\pi^+\pi^+}(t)} \\ &= \frac{\cosh(-E_{2\pi}(t)(t+1))}{\cosh(-E_{2\pi}(t)t)} \end{aligned}$$

まず、Figure. 2 に low-mode-average (LMA) のパイ中間子 4 点相関関数への効果を示す。LMA によって相関関数の長時間の振る舞いが改善されていることがわかる。

次に、Figure. 3 に *wrap-around* 効果のパイ中間子 4 点相関関数への寄与を示す。相関関数の長時間の振る舞いに明らかに *wrap-around* 効果が寄与していることが見て取れる。

格子 QCD のシミュレーションにより、それぞれのクォーク質量の場合に得られた $I = 2$ の $\pi\pi$ 散乱長 $a_0^{I=2}$ を Table 3 に示す。最下段は Physical Point ($m_\pi = 139.6$ [MeV]) に対応する。

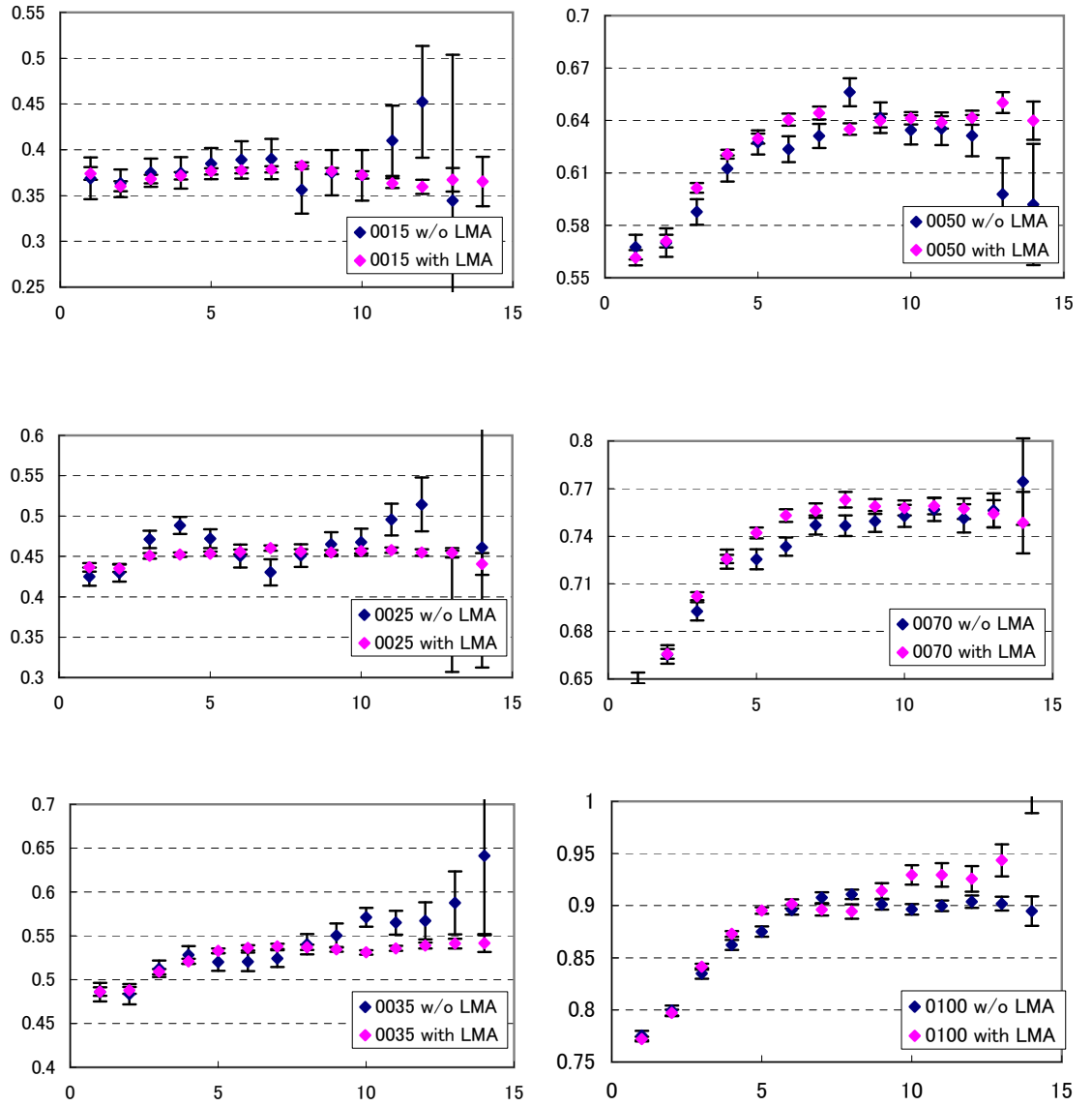


Figure 2: LMA の π 中間子の四点相関関数への影響 (wrap-around 効果込み)

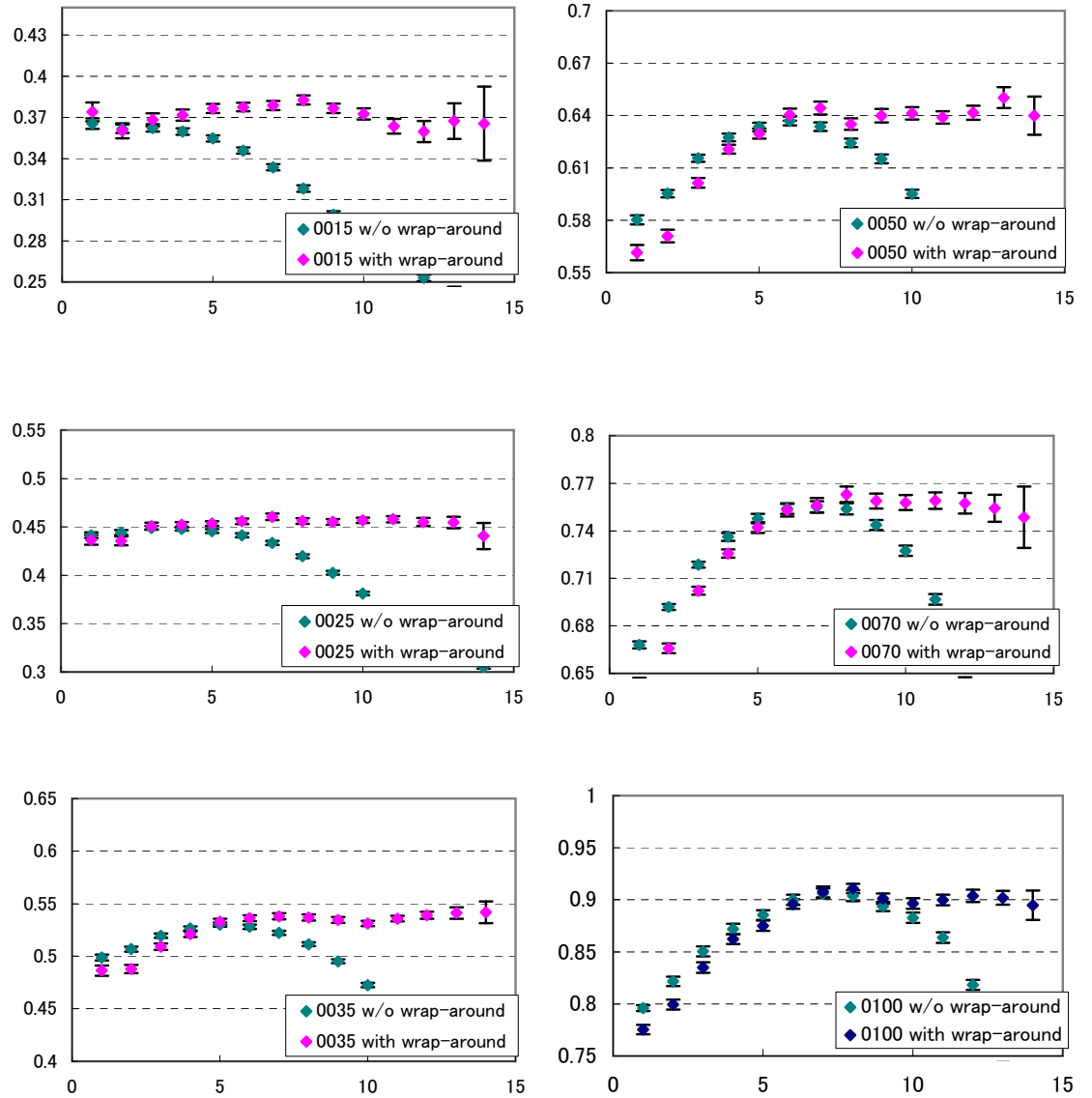


Figure 3: wrap-around 効果有効質量への影響

Table 3: 格子 QCD のシミュレーションにより得られた $I = 2$ の $\pi\pi$ 散乱長

$m_q a$	m_π [MeV]	$E_{\pi\pi}$ [MeV]	$m_\pi a_0^{I=2}$
0.015	286.0(20)	616.1(63)	-0.1904(25)
0.025	366.4(15)	760.7(37)	-0.2170(25)
0.035	434.9(13)	890.9(32)	-0.2380(28)
0.050	522.4(13)	1067.9(42)	-0.3622(47)
0.070	618.2(15)	1257.4(53)	-0.4490(57)
0.100	746.1(25)	1505.9(52)	-0.4556(24)
-	Physical Point	-	-0.04401(74)

カイラル摂動理論との比較

カイラル摂動理論 (ChPT) によると、2ループ (NNLO) での $I = 2$ の $\pi\pi$ 散乱長は下式で記述される。

$$m_\pi a_0^{I=2} = -\pi\xi \left\{ 1 + \xi \left[\frac{3}{2} \ln \xi - l_{NLO}^{\pi\pi} \right] + \xi^2 \left[-\frac{31}{6} (\ln \xi)^2 + l_{NNLO_1}^{\pi\pi} \ln \xi + l_{NNLO_2}^{\pi\pi} \right] \right\} + O(\xi^4)$$

ここで m_π は中間子の質量、 $a_0^{I=2}$ はこの系の散乱長、 ξ は摂動展開における展開係数

$$\xi = \left(\frac{m_\pi}{4\pi f_\pi} \right)^2$$

である。 $l_i^{\pi\pi}$ ($i = NLO, NNLO, \dots$) は、それぞれ各次数で寄与するカイラルラグランジアンの中の”low energy constant”の線形結合である。2フレーバーの NLO については $O(\xi^2)$ のカイラルラグランジアンに由来する 4 つの”low energy constant”で書き下すことができる。すなわち、

$$l_{NLO}^{\pi\pi} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\tilde{l}_1 + \frac{8}{3}\tilde{l}_2 - \frac{1}{2}\tilde{l}_3 - 2\tilde{l}_4 - \frac{3}{2} \ln \frac{16\pi^2 F^2}{\mu^2}.$$

\tilde{l}_n は以下で定義され、

$$\tilde{l}_n = \ln \frac{\Lambda_n^2}{\mu^2} \quad (n = 1, \dots, 4)$$

Λ_n は $O(p^4)$ のカイラルラグランジアンの結合乗数に由来する”intrinsic scale”である。

実際にカイラル外挿を行う際には、NNLO において第二項を無視する。これは数値計算において第二項からの寄与と第三項からの寄与を区別することが困難であるからである。したがって、フィット関数は

$$m_\pi a_0^{I=2} = -\pi\xi \left\{ 1 + \xi \left[\frac{3}{2} \ln \xi + l_a \right] + \xi^2 \left[-\frac{31}{6} (\ln \xi)^2 + l_b \right] \right\} + O(\xi^4)$$

となる。

格子 QCD のシミュレーションにより得られた $a_0^{I=2} m_\pi$ の ξ に対する振る舞いを figure 4 に示す。ここで、 ξ を求めるために必要な f_π は JLQCD のグループにより求められた値を用いた。得られた振る舞いを、NLO と NNLO のカイラル摂動理論の結果と比較した。結果は NLO と NNLO のカイラル摂動理論の結果どちらとも矛盾しないことがわかった。

成果の発表

口頭発表

矢木拓也、大谷宗久、橋本省二、森松 治「オーバーラップフェルミオンを用いた、I=2 Pi-Pi 散乱長の格子 QCD 計算」日本物理学会第 6 2 回年次大会

矢木拓也、大谷宗久、橋本省二、森松 治「動的オーバーラップフェルミオンを用いた、I=2 Pi-Pi 散乱長の格子 QCD 計算」日本物理学会第 6 3 回年次大会

Takuya Yagi, Shoji Hashimoto, Osamu Morimatsu, Munehisa Ohtani 'I=2 pi-pi scattering length with dynamical overlap fermion' Lattice 2007

proceedings

Takuya Yagi, Shoji Hashimoto, Osamu Morimatsu, Munehisa Ohtani 'I=2 pi-pi scattering length with dynamical overlap fermion' PoS(LATTICE 2007)086

論文

本研究の成果については、現在論文を準備中である

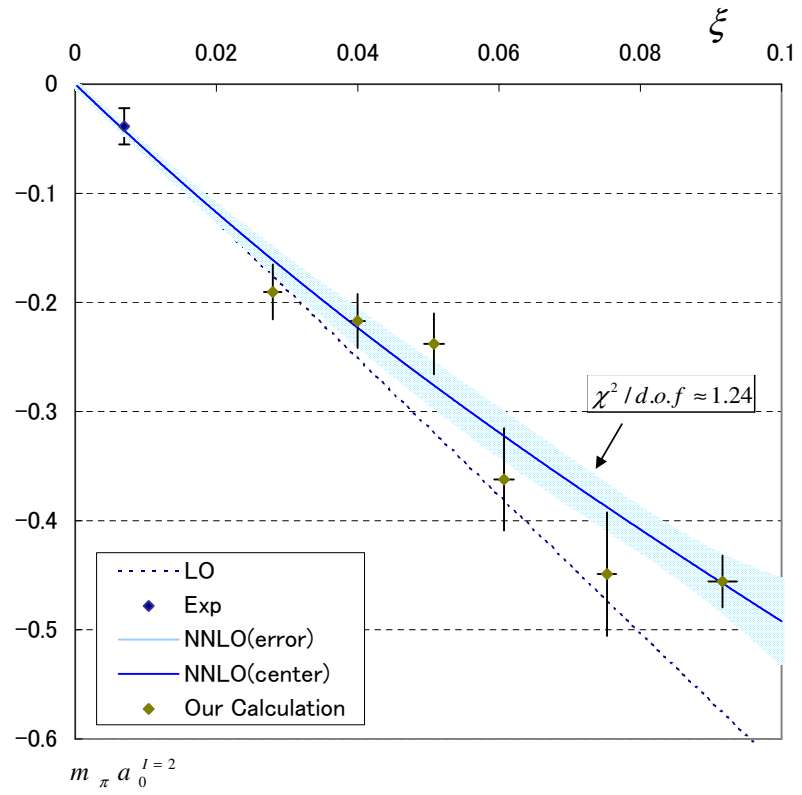


Figure 4: $m_\pi a_0$ vs ξ