

実施報告書 (大型 07-15)

格子上の非線形変数変換によるカラー閉じ込めと グルーボールの研究

柴田章博
高エネルギー加速器研究機構計算科学センター

1 研究組織

- 柴田章博 (しばたあきひろ) [研究代表]
高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・研究機関講師
- 近藤慶一 (こんどうけいいち)
千葉大学大学院・理学研究科・教授
- 加藤清考 (かとうせいこう)
高松工業高等専門学校・一般教育科・講師
- 伊藤祥一 (いとうしょういち)
長野工業高等専門学校・電子情報工学科・助教

2 研究の概要

QCD のクォーク閉じこめ機構として双対超伝導仮説が有力視されており、これまでの格子ゲージ理論のシミュレーションによって、モノポール・ドミナンスやセンターゲージドミナンスなど、仮説を支持する結果が得られている。しかしながら、最大可換ゲージ (MAG)、最大センターゲージやラブラシアンゲージなどの特定のゲージにゲージ固定した場合のみに支持する結果が得られ、他の場合に確立していない。またゲージ固定とともにカラー対称性 (グローバルゲージ対称性) を破ってしまい、カラーの閉じ込めに対しても問題となる。

我々は、 $SU(2)$ Yang-Mills (YM) 場の Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov (CFNS) 分解の格子ゲージ理論版を提唱し、数値シミュレーションが遂行できることを示した。この理論によって YM 場のゲージの選び方によらずに“アーベリアン”部分の抽出とゲージ不変にモノポールを定義することが可能になった。コンパクトな変数 (リンク変数) を用いる定式化をおこなうことで、ゲージ不変で量子化された磁荷をもつ 'tHooft-Polyakov 型のモノポールを与える。MAGを取ると、DeGrand-Toussait モノポールや可換射影によるリンク変数の分解に帰着することが示される。[5] この分解は任意のゲージで実行可能であり、ゲージに依存することなく解析を行うことができる。

実際、カラー対称性を保持するランダウゲージにおいてシミュレーション実行し、分解がカラー対称性を保持すること、そしてモノポール・ドミナンスをゲージ不変な形で再現するとともに、陽にゲージ不変な形では測ることのできない赤外領域のアーベリアン・ドミナンス及びグルーオンの質量生成についても従来の MA ゲージの研究とコンシステントな結果を得た。[4, 5]

2007年度は、 $SU(2)$ のゲージポテンシャルの分解を、 $SU(N)$ Yang-Mills 場に拡張した。リンク変数はゲージ群の stability 部分群 \tilde{H} とその商空間 G/\tilde{H} の成分とに分解することができる [1][2]。 $SU(3)$ においては、 $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal case) と $\tilde{H} = U(2)$ (minimal case) との2つの分解が可能であり、変数分解に導入したカラー場によって、理論のもつカラー対称性を壊すことなくゲージ不変なリンク変数の分解とノンアーベリアン・モノポールを定義することができる。 $SU(3)$ のそれぞれの場合について、予備的な結果であるがゲージ不変な定式化におけるモノポール・ドミナンスや“アーベリアン”・ドミナンスを示す。

3 リンク変数の分解

YM 場のリンク変数の分解 $U_{x,\mu} = V_{x,\mu} X_\mu$ で、連続極限でゲージポテンシャルの分解 $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$ を与えるものを考える。リンク上の中点で定義された場 $\mathbb{A}_{x',\mu}, \mathbb{V}_{x',\mu}$ 及び、格子点上の場 $\mathbb{X}_{x,\mu}$ とを用いて次のように対応付けられる。

$$U_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu A_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon \mathbb{A}_{x',\mu}), \quad (1)$$

$$V_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu V_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon \mathbb{V}_{x',\mu}), \quad (2)$$

$$X_{x,\mu} = V_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon \mathbb{X}_{x,\mu}). \quad (3)$$

これらの場は、ゲージ変換 Ω_x に対して、次のような変換性を持つ。

$$U_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x U_{x,\mu} = \Omega_x U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (4)$$

$$V_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x V_{x,\mu} = \Omega_x V_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (5)$$

$$X_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x X_{x,\mu} = \Omega_x X_{x,\mu} \Omega_x^\dagger. \quad (6)$$

$G = SU(3)$ の場合は、 $\tilde{H} = U(2)$ (minimal case) と $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal case) とに対応したリンク変数の分解を行うことができる $SU(3)$ minimal case においては、 $\mathbf{n}_x^{(1)} = \mathbf{h}_x = \Theta_x \lambda_8 \Theta_x^\dagger$ の一種類、maximal case においては $\mathbf{n}_x^{(1)} = \Theta_x \lambda_3 \Theta_x^\dagger$, $\mathbf{n}_x^{(2)} = \Theta_x \lambda_8 \Theta_x^\dagger$ の2種類のカラー場が導入される。

変数分解の定義方程式は、新しく導入した G/\tilde{H} のゲージ変換に対して、随伴表現に従って変換するカラー場 $\mathbf{n}_x^{(k)}$ に対して次のように与えられる。

$$D_\mu^\epsilon [V_{x,\mu} \mathbf{n}_x^{(k)}] := \frac{1}{\epsilon} \left(V_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(k)} - \mathbf{n}_x^{(k)} V_{x,\mu} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\text{Tr} \left(X_{x,\mu} \mathbf{n}_x^{(k)} \right) = 0. \quad (8)$$

ここで、 $D_\mu^\epsilon [V_{x,\mu} \mathbf{n}_x^{(k)}]$ は、 $V_{x,\mu}$ を背景場を持つ格子上の共変微分である。変数分解を求めるにあた

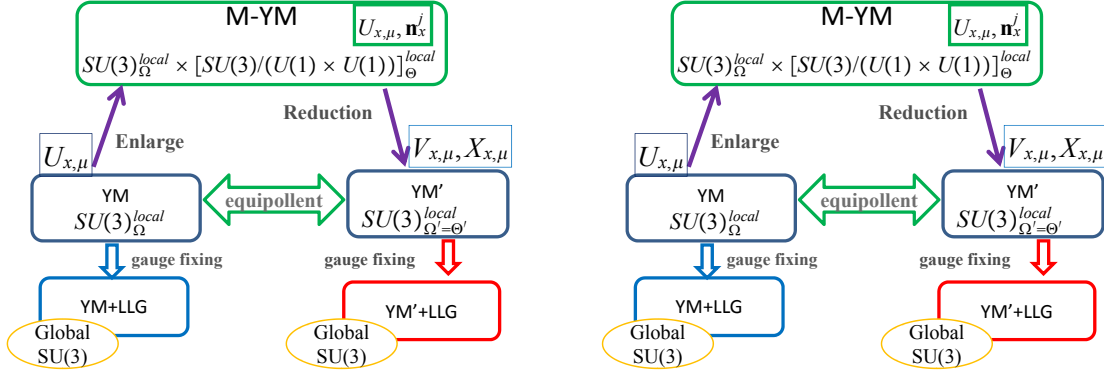


図 1: オリジナルな YM 理論は、ゲージ対称性を拡大し Master-YM 理論へと拡張し、reduction condition によって、元々の YM 理論と等価な新しい変数で記述された理論へ書き換えることができる。SU(3) の場合は、maximal (左図), minimal(右図) の分解がある。

り、次のような解の仮定をおく。

$$\tilde{V}_{x,\mu} = \alpha U_{x,\mu} + \beta_k \mathbf{n}_x^{(k)} U_{x,\mu} + \rho_k U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(k)} + \gamma_k \mathbf{n}_x^{(k)} U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{n}_x^{(k)} U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(k)} \quad (9)$$

$$\underline{V}_{x,\mu} = P_{x,\mu}^{-1} \tilde{V}_{x,\mu}, \quad P_{x,\mu} := \sqrt{\tilde{V}_{x,\mu} \tilde{V}_{x,\mu}^\dagger}, \quad (10)$$

$$V_{x,\mu} := \underline{V}_{x,\mu} \det(\underline{V}_{x,\mu})^{-1/3}, \quad X_{x,\mu} := U_{x,\mu} V_{x,\mu}^\dagger \quad (11)$$

これらを分解の定義方程式に代入し、連続極限で連続理論におけるゲージポテンシャルの分解 [3] に一致するように係数を決めるとつぎの解を得る。[1]

$$\tilde{V}_{x,\mu} = U_{x,\mu} + 6\mathbf{n}_x^{(1)} U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(1)} + 6\mathbf{n}_x^{(2)} U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(2)} \quad (\text{maximal case}) \quad (12)$$

$$\tilde{V}_{x,\mu} = U_{x,\mu} + \frac{2}{5}\sqrt{3} (\mathbf{h}_x U_{x,\mu} + U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}) + \frac{24}{5} \mathbf{h}_x U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} \quad (\text{minimal case}) \quad (13)$$

変数分解を行った理論が元々の YM 理論と等価な理論となるために、次の汎関数を最小にするような拡大されたゲージ変換の組 (Ω, Θ) を求める。

$$F_{\text{reduction}}[U, \mathbf{n}_0^{(k)}, \Omega, \Theta] = \sum_{x,\mu,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\left(D_\mu^\epsilon [U_{x,\mu}] \mathbf{n}_\mu^{(k)} \right)^\dagger D_\mu^\epsilon [U_{x,\mu}] \mathbf{n}_\mu^{(k)} \right) \quad (14)$$

ここで注意すべきことは、この reduction 条件がゲージ変換 $\Omega = \Theta$ のもとで不変であり、この変数分解が YM 場のゲージの選び方に依存しない形で従来の方法に対応する“アーベリアン”部分を抽出ができることを保証している。

4 シミュレーション

SU(3)YM 理論のリンク変数の分解は、標準的な格子ゲージ理論のシミュレーションによる配位の生成を行った後に、reduction 汎関数を最小化する操作を行うことで得ることができる [2]。新しい変数の具体的な配位を得るためには、reduction 条件 と共にオリジナルな YM 場のゲージを指

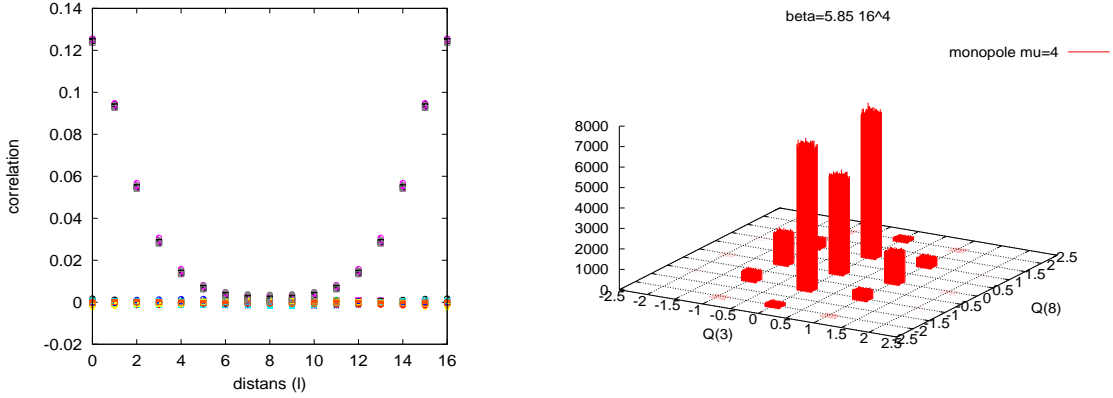


図 2: (左図)Maximal case における、 $\langle n_x^i n_x^j \rangle$ 相関関数のプロット。(右図) maximal case における磁気的モノポールの密度分布。

定する必要がある。現在は、YM 場をカラー対称性を保持したランダウゲージに対して解析を進めている。ここでは、maximal case における解析途中結果を示す。

図2(左)は、カラー場の各成分 $n_x^j = \text{tr}(\mathbf{n}_x^{(1)} \lambda^j)$ の相関関数のプロットしたものである。 $\langle n_x^j \rangle = 0$ 及び、 $\langle n_x^i n_x^j \rangle = D(x-y)\delta^{ij}$ の構造をもちカラー対称性を保持していることを示している。

また、変数分解で得られた場 $V_{x,\mu}$ のブラケットから、ゲージ不変な”アーベリアン”パートの作る field strength を得ることができる。

$$V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^{-1} V_{x,\nu}^{-1} = \exp(-ig\epsilon^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}[\mathbb{V}]) \quad (15)$$

$$g\epsilon^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}[\mathbb{V}] = \theta_{\mu\nu}^3 T^3 + \theta_{\mu\nu}^8 T^8 \quad (16)$$

この $\mathcal{F}_{\mu\nu}[\mathbb{V}]$ は定義によってゲージ不変であり、よってゲージ不変な磁気的モノポールカレント及びモノポールチャージが次のように与えられる。

$$k_\mu^{(j)} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu \theta_{\mu\nu}^{(j)} \quad (17)$$

$$Q_3 = \int k_\mu^{(3)} = 2\pi n_3, \quad Q_8 = \int k_\mu^{(8)} = 2\pi\sqrt{3}n_8 \quad (18)$$

また、モノポールチャージは、Dirac の量子化条件を満たしている。図2(右)は、maximal case におけるモノポールの磁荷密度を表している。

最後に、ゲージポテンシャル及び分解された新しい場の変数に対する相関関数(プロパゲータ)のプロットを示す。

$$D_{OO}(x-y) := \langle \mathbb{O}_\mu^A(x) \mathbb{O}_\mu^A(y) \rangle \quad \text{for } O_\mu^A(x') = \mathbb{A}_{x',\mu}^A, \mathbb{V}_{x',\mu}^A, \mathbb{X}_{x',\mu}^A, \quad (19)$$

ここで $O_\mu^A(x)$ はリンク変数から線形型のリー代数の元の抽出を行う: $\mathbb{A}_{x',\mu}^A = (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^\dagger) / (2\epsilon g)$. 図3は、相関関数 D_{AA} , D_{VV} 及び D_{XX} とそのスケールしたものをプロットしたものである。対角パート D_{VV} の相関関数は、YM 場の相関関数 D_{AA} とほぼ同様のふるまいをする一方で、非対角要素 D_{XX} は距離とともに速やかにダンプしており、対角パートが赤外領域で支配的であることを示している。非対角要素は、ゲージ変換で adjoint に変換するため $SU(2)$ で行ったように質量項を導入することができ、ダンピングファクターから質量生成を議論することができる。

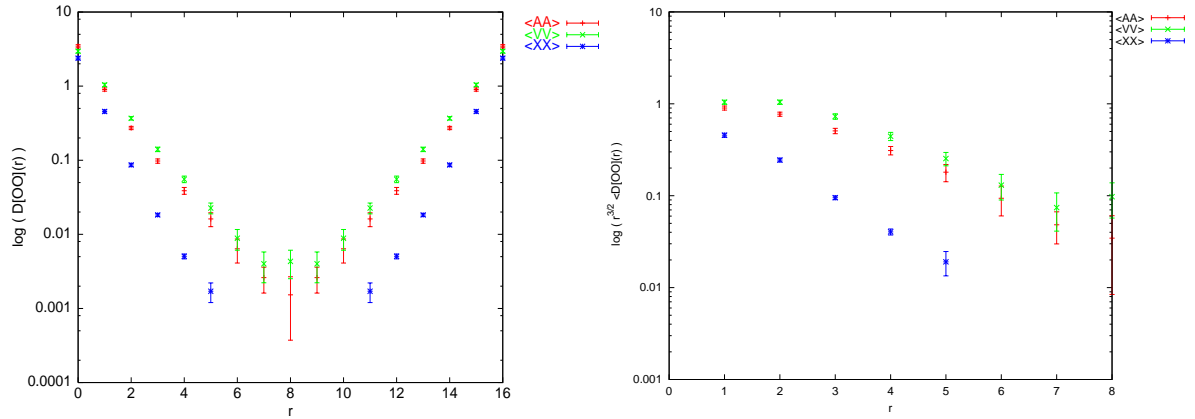


図 3: (左図) ランダウゲージにおけるオリジナル YM 場のゲージ場及び分解された新しい変数の場の相関関数 $D_{OO}(r)$ 。(右図) スケールされた相関関数 $r^{3/2}D_{OO}(r)$

5 まとめ

格子上の $SU(N)$ YM 場のゲージ変数の分解 $U = VX$ を提唱し, “アーベリアン” パートの抽出が YM 場のゲージに依存することなく定義され, その数値シミュレーションが実行可能であることを $SU(3)$ YM 理論においてデモンストレートした。われわれの方法は, 従来の最大可換ゲージにおける解析のゲージ不変な定式化と任意のゲージにおけるリンク変数の分解とシミュレーションを可能としたのみならず, $SU(N)$ では複数存在する stability 部分群 \tilde{H} に対応したゲージ場の変数分解を YM 場のゲージに依存せず与えることができる。また, 我々の提唱するゲージに依存しない変数分解によって “アーベリアン” パートから定義されるモノポールは, 非可換ストークスの定理を用いて Wilson ループ演算子から導出されるノンアーベリアン・モノポールに一致する [6]。

参考文献

- [1] New descriptions of lattice $SU(N)$ Yang-Mills theory towards quark confinement. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat]
- [2] Toward gauge independent study of confinement in $SU(3)$ Yang-Mills theory. A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-166, KEK-PREPRINT-2007-50, POS(LATTICE-2007)331, arXiv:0710.3221 [hep-lat]; Talk given at 25th International Symposium on Lattice Field Theory, Regensburg, Germany, 30 Jul - 4 Aug 2007.
- [3] Reformulating $SU(N)$ Yang-Mills theory based on change of variables, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami. CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th]
- [4] Compact lattice formulation of Cho-Faddeev-Niemi decomposition: Gluon mass generation and infrared Abelian dominance. A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-165, KEK-PREPRINT-2007-19, arXiv:0706.2529 [hep-lat]. Published in Phys.Lett.B653:101-108,2007

- [5] Compact lattice formulation of Cho-Faddeev-Niemi decomposition: String tension from magnetic monopoles S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata , T. Shinohara CHIBA-EP-158, KEK-PREPRINT-2006-2, hep-lat/0604016. Published in Phys.Lett.B645:67-74,2007.
- [6] Proving Abelian dominance in the Wilson loop operator. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]