

実施報告書 (大型08-16)

格子上の非線形変数変換によるカラー閉じ込めと グルーボールの研究

1 研究の概要

クォーク閉じこめ機構として双対超伝導仮説が有力視されている。これまでも格子ゲージ理論のシミュレーションなどによって、モノポール・ドミナンスやセンターゲージドミナンスなど仮説を支持するこの結果が多数報告されているが、しかしながら、リンク変数 $U_{x,\mu}$ を最大可換ゲージ (MAG)、ラプラシアンゲージや最大センターゲージなどの特定のゲージにゲージ固定した場合においてのみ支持する結果が得られ、他の場合に確立していない。これらの結果は、ゲージ対称性のみならず、カラー対称性を破っており理論的な不満が残る。本研究では、 $SU(N)$ Yang-Mills (YM) 場の非線形変数変換に基づき新しい定式化を格子上で構成し、従来研究の問題点を克服し、モノポールドミナンスやアーベリアン・ドミナンスなどの双対超伝導描像を調べる。これまでの研究で構成した $SU(2)$ YM 理論の Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov (CFNS) 分解の格子ゲージ理論版を実装し、さらにその拡張として $SU(N)$ Yang-Mills 場の定式化を行い、数値シミュレーションを実行可能とした。

$SU(N)$ Yang-Mills 場に拡張した。リンク変数はゲージ群の stability 部分群 \tilde{H} とその商空間 G/\tilde{H} の成分とに分解することができる [1][?]。 $SU(2)$ の場合には、 $\tilde{H} = U(1)$ の 1 通りの分解であるが、 $SU(3)$ においては、 $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal case) と $\tilde{H} = U(2)$ (minimal case) との 2 種類の分解が可能である [4, 5]。

この定式化によって、任意のゲージ場 $U_{x,\mu}$ に対し YM 場のゲージの選び方によらずに、分解 $U_{x,\mu} = X_{x,\mu} V_{x,\mu}$ を得ることができる。ここで、 V, X は、 $SU(N)$ のゲージ変換に従う変数で、ヤン・ミルズ場を、Wilson ループ期待値に直接効く自由度とその残りの自由度に分離することに対応する。従来の MA ゲージにおいては、 $V_{x,\mu}$ は“アーベリアン” (対角) 部分に、 $X_{x,\mu}$ は metter 場 (非対角) 部分に対応する。実際、これまでの研究において、 $SU(2)$ において、シミュレーションを実行し、ランダウゲージにヤン・ミルズ場においてモノポール・ドミナンスや“アーベリアン”・(V) ドミナンス”を示した。また、 $SU(3)$ のそれぞれの場合については、maximal case について、予備的な結果であるがゲージ不変な定式化におけるモノポール・ドミナンスや“アーベリアン・ドミナンス”を示した。

2008年度は、 $SU(3)$ ヤン・ミルズ場について、2種類の分解とクォークの閉じ込め機構の関係について、非可換ストークスの定理に基づいて解析を進める。クォークの基本表現に対する閉じ込めのポテンシャルは、minimal case における V ドミナンス 及び、 $\tilde{H} = U(2)$ に起因する非アーベリアン・モノポールによって説明されることが示される。このことについて、とくに minimal

case において、モンテカルロシミュレーションを実行し検証を行った。

2 変数分解

$SU(N)$ YM 場のリンク変数の分解 $U_{x,\mu} = V_{x,\mu}X_{x,\mu}$ を、 $SU(2)$ における連続極限でゲージポテンシャルの分解 (Cho-Faddeve-Niemi-Shabanov 分解) $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$ の拡張として [3] 与える。格子上のリンク変数は、の中点で定義された場 $\mathbb{A}_{x',\mu}, \mathbb{V}_{x',\mu}$ 及び、格子点上場 $\mathbb{X}_{x,\mu}$ とを用いて次のように対応付けられる。

$$U_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu A_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon\mathbb{A}_{x',\mu}), \quad (1)$$

$$V_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu V_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon\mathbb{V}_{x',\mu}), \quad (2)$$

$$X_{x,\mu} = V_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon\mathbb{X}_{x,\mu}). \quad (3)$$

これらの場は、ゲージ変換 Ω_x に対して、次のような変換性を持つ。

$$U_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (4)$$

$$V_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x V_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (5)$$

$$X_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x X_{x,\mu} \Omega_x^\dagger. \quad (6)$$

$G = SU(3)$ の場合は、 $\tilde{H} = U(2)$ (minimal case) と $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal case) とに対応したリンク変数の分解を行うことができる。 $SU(3)$ minimal case においては、 $\mathbf{n}_x^{(1)} = \mathbf{h}_x = \Theta_x \lambda_8 \Theta_x^\dagger$ の一種類、maximal case においては $\mathbf{n}_x^{(1)} = \Theta_x \lambda_3 \Theta_x^\dagger$, $\mathbf{n}_x^{(2)} = \Theta_x \lambda_8 \Theta_x^\dagger$ の2種類のカラー場が導入される。変数分解の定義方程式は、新しく導入した G/\tilde{H} のゲージ変換に対して、随伴表現に従って変換するカラー場 $\mathbf{n}_x^{(k)}$ に対して次のように与えられる [1][2]。

$$D_\mu^\epsilon[V_{x,\mu}]\mathbf{n}_x^{(k)} := \frac{1}{\epsilon} \left(V_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(k)} - \mathbf{n}_x^{(k)} V_{x,\mu} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\text{Tr} \left(\left(X_{x,\mu} - X_{x,\mu}^\dagger \right) \mathbf{n}_x^{(k)} \right) = 0. \quad (8)$$

ここで、 $D_\mu^\epsilon[V_{x,\mu}]\mathbf{n}_x^{(k)}$ は、 $V_{x,\mu}$ を背景場を持つ格子上の供変微分である。¹この定義方程式の解は、maximal case、minimal case それぞれにおいて、

$$\tilde{V}_{x,\mu} = U_{x,\mu} + 6\mathbf{n}_x^{(1)} U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(1)} + 6\mathbf{n}_x^{(2)} U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}^{(2)} \quad (\text{maximal case}) \quad (9)$$

$$\tilde{V}_{x,\mu} = U_{x,\mu} + \frac{2}{5}\sqrt{3}(\mathbf{h}_x U_{x,\mu} + U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}) + \frac{24}{5}\mathbf{h}_x U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} \quad (\text{minimal case}) \quad (10)$$

と定義された変数を用いて、次のように分解される。[1]

$$\underline{V}_{x,\mu} = P_{x,\mu}^{-1} \tilde{V}_{x,\mu}, \quad (11)$$

$$P_{x,\mu} := \sqrt{\tilde{V}_{x,\mu} \tilde{V}_{x,\mu}^\dagger}, \quad (12)$$

$$V_{x,\mu} := \underline{V}_{x,\mu} \det(\underline{V}_{x,\mu})^{-1/3}, \quad X_{x,\mu} := U_{x,\mu} V_{x,\mu}^\dagger \quad (13)$$

¹リンク変数の分解の定義式は、ウィルソンループに対する、非可換ストークスの定理と V ドミナンスの議論からも導出される。[7]

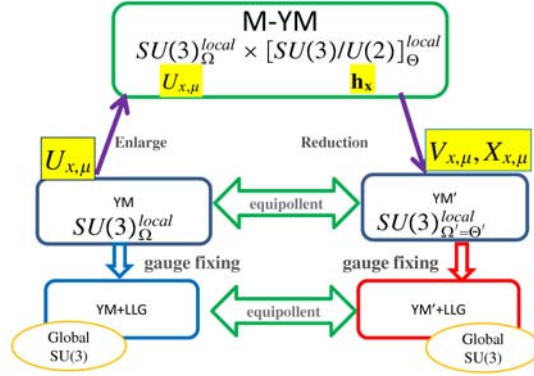


図 1: オリジナルな YM 理論は、ゲージ対称性を拡大した Master-YM 理論へと拡張し、reduction condition によって、元々の YM 理論と等価な新しい変数で記述された理論へ書き換えることができる。図は、SU(3) の minimal な場合を示す。

変数分解を行った理論が元々の YM 理論と等価な理論となるために、次の汎関数を最大にするような拡大されたゲージ変換の組 (Ω, Θ) を求める。

$$F_{\text{reduction}}[U, \mathbf{n}_0^{(k)}, \Omega, \Theta] = \sum_{x,\mu,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\left(D_{\mu}^{\epsilon}[U_{x,\mu}] \mathbf{n}_{\mu}^{(k)} \right)^{\dagger} D_{\mu}^{\epsilon}[U_{x,\mu}] \mathbf{n}_{\mu}^{(k)} \right) \quad (14)$$

ここで注意すべきことは、この reduction 条件がゲージ変換 $\Omega = \Theta$ のもとで不変であり、この変数分解がゲージに依存しない形で従来の方法に対応する“アーベリアン”部分を抽出ができることを保証している。

3 シミュレーション

Y 双対超伝導側で M 理論記述は、標準的な格子ゲージ理論のシミュレーションによって生成されたリンク変数の分解によって構成することができる。このためには、カラー場を導入する必要があるが、reduction 汎関数 (16) を最小化する操作を行うことで、与えられたリンク変数に対応するカラー場を決めることができる。ゲージ不変なオペレータに対しては、ヤン・ミルズ場の任意のゲージに対して計算可能であるが、伝搬関数などはオリジナルな YM 場のゲージを指定する必要がある。本研究では、YM 場をカラー対称性を保持したランダウゲージに対して解析を進めることとする。

まずはじめに、従来の MA ゲージではゲージ固定のために壊してしまったカラー対称性 (SU(3) グローバル対称性) の回復をカラー場 $h_x^i = \text{tr}(\mathbf{h}_x \lambda^i)$ に対して成立していることを確認する。カラー場の真空期待値はゼロ $\langle h^A \rangle = 0$ $A = 1, 2, \dots, N^2 - 1 = 8$ であり、相関関数 $\langle h^A(x) h^B(0) \rangle$ for $A, B = 1, \dots, 8$ は、図 2 に示すように、対角成分が同じ相関関数で非ゼロであり、非対角成分はゼロであるカラー対称な構造を示す。

$$\langle h^A(x) h^B(0) \rangle = \delta^{A,B} D(x) \quad (15)$$

ゲージポテンシャル及び分解された新しい場の変数に対する相関関数 (プロパゲータ) のプロット

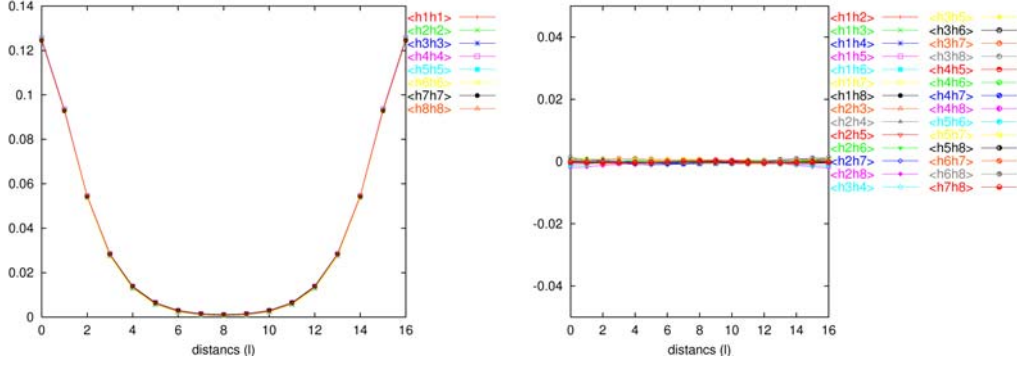


図 2: The correlation functions of the color field. (Left panel) diagonal parts, (Right panel) off-diagonal parts.

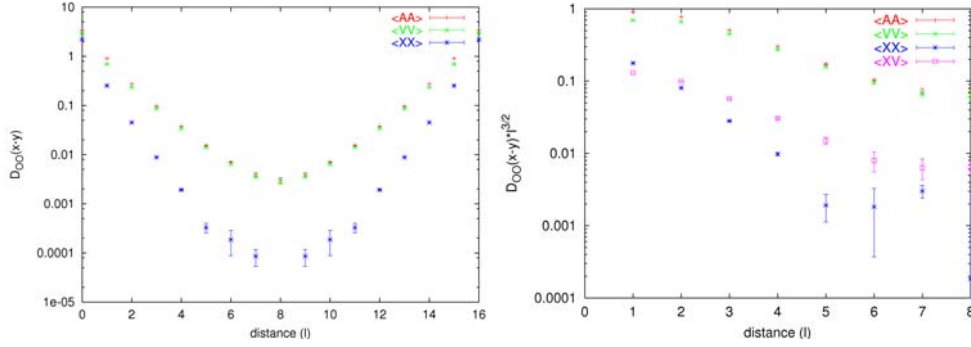


図 3: The correlation functions of original gauge field and new variables. (Left panel) The logplot of correlation functions. (Right panel) The scaled plot.

を示す。

$$D_{OO}(x-y) := \langle \mathbb{O}_\mu^A(x) \mathbb{O}_\mu^A(y) \rangle \quad \text{for } O_\mu^A(x') = \mathbb{A}_{x',\mu}^A, \mathbb{V}_{x',\mu}^A, \mathbb{X}_{x',\mu}^A, \quad (16)$$

ここで、 $O_\mu^A(x)$ はリンク変数から線形型のリー代数の元の抽出を行う: $\mathbb{A}_{x',\mu}^A = (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^\dagger) / (2\epsilon g)$. 図 3 は、相関関数 D_{AA} , D_{VV} 及び D_{XX} をプロットしたものである。対角パートの相関関数は、YM 場の相関関数とほぼ同様のふるまいをする一方で、非対角要素 D_{XX} は、距離とともに速やかにダンプしており、 D_{VV} が赤外領域で支配的であることを示している。非対角要素は、随伴変換するためゲージ不変な量項 $\mathcal{L}_{M_X} = M_X^2 \text{tr}(\mathbf{X}_\mu^2)$ を導入することができ、ダンピングファクターから質量生成を議論することができる。[8]

次に、新しい変数による static interquark potential を調べる。非可換ストークスの定理によって、基本表現のクォークのウィルソン・ループオペレータは次のように書ける。[6]

$$\begin{aligned} W_c[\mathbf{A}] &= \text{tr} \left[P \exp ig \oint_C \mathbf{A}_\mu(x) dx^\mu \right] / \text{tr}(\mathbf{1}) = \int d\mu[\xi]_\Sigma \exp \left\{ ig \int_{\Sigma: \partial\Sigma=C} dS^{\mu\nu} F_{\mu\nu}[\mathbf{V}] \right\} \\ &= \int d\mu[\xi]_\Sigma \exp \{ ig(K, \Xi_\Sigma) + ig(J, N_\Sigma) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

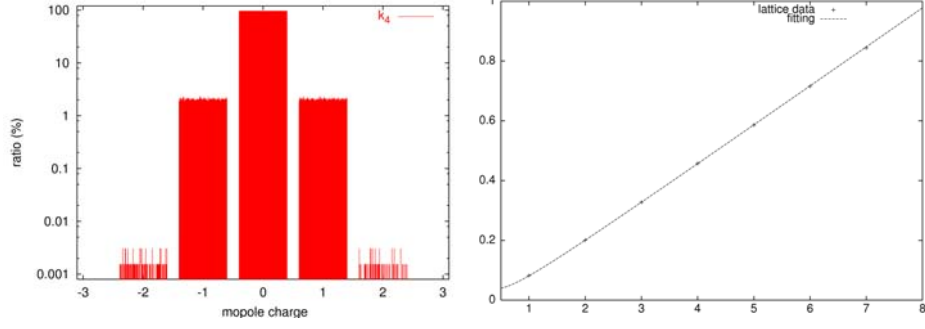


図 4: (Left panel) the magnetic monopole charge distribution, (Right panel) the static interquark potential calculated only from the magnetic monopole part.

ここでそれぞれの記号は、 $K := \delta^* F$, $J := \delta F$, $\Xi_\Sigma := \delta^* \Theta_\Sigma \Delta^{-1}$, $N_\Sigma := \delta \Theta_\Sigma \Delta^{-1}$ 4次元ラプラスアン $\Delta = d\delta + \delta d$ である。また、 Θ_Σ は、ウィルソンループ C を境界に持つような面 $\Sigma : \partial\Sigma = C$ で定義される vorticity tensor $\Theta_\Sigma^{\mu\nu} = \int_\Sigma dS^{\mu\nu}(X(\sigma))\delta(x - X(\sigma))$ である。ここで、重要なことは基本表現に対するウィルソンループは minimal case によって定義された $\mathbf{V}_\mu(x)$ で記述される。また、格子上の新しい変数 $V_{x,\mu}$ の連続極限との対応で定義される $\mathbf{V}_\mu(x)$ と等価である [7]。したがって、格子上の新しい変数によるウィルソン・ループに期待値は次のようにかくことができる。

$$\langle W_C[U] \rangle \cong \langle W_C[V] \rangle = \left\langle \exp \left(i \sum_{x,\mu} K_{x,\mu} \Xi_{x,\mu} \right) \right\rangle, \quad (18a)$$

$$\Xi_{x,\mu} = \sum_s \Delta^{-1}(s - s') \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha S_{\beta\gamma}^J(s + \mu), \quad \partial_\alpha S_{\alpha\beta}^J = J_\beta, \quad (18b)$$

ここで、磁気的カレント $K_{x,\mu}$ は、前方差分 ∂_λ を用いて次のように定義される。

$$K_{x,\mu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} \partial_\lambda \Theta_{x,\alpha\beta}^8[V], \quad \Theta_{\alpha\beta}^8[V] := -\arg \text{tr} \left(\left(\frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{2}{\sqrt{3}} h_x \right) V_{x,\alpha} V_{x+\alpha,\beta} V_{x+\beta,\alpha}^\dagger V_{x,\beta}^\dagger \right). \quad (19)$$

ここで導出された磁気的モノポールカレント $K_{x,\mu}$ は、その定義から明らかなようにゲージ不変である。さらに、 $K_{x,\mu}$ はカラー場 $\mathbf{h}_x \in G/\tilde{H} = SU(3)/U(2)$ に伴った $V_{x,\mu}$ で定義される“non-Abelian”磁気的モノポールである。図4の左は、200個の配位から計算された、整数化したモノポールのチャージ $n_{x,\mu} = K_{x,\mu}/2\pi \in \mathbb{Z}$ の分布を示す。右図は、式(18a)から計算される static potential を表す。 $\left\langle \exp \left(i \sum_{x,\mu} K_{x,\mu} \Xi_{x,\mu} \right) \right\rangle$ から計算されるポテンシャルは、 $V_m(R) = -\alpha_m/R + \sigma_m R$ に赤外領域でよい一致を示し $\sigma_m = 0.13301(36)$ を得た。これは、フルの string tension との $\sigma_m/\sigma_{full} = 0.3879(39)$ (Ref.[?]) をよく再現し、 $SU(3)$ Yang-Mills 理論において、non-Abelian 磁気的モノポールドミナンスであることを示す。

$$\sigma_m/\sigma_{full} = 0.87 \pm 0.19.$$

4 まとめ

$SU(N)$ Yang-Mills (YM) 場の非線形変数変換に基づき新しい定式化を格子上で構成し、モンテカルロシミュレーションを可能とした。 $SU(N)$ ゲージ群では変数の分解は tability 部分群 \tilde{H} に

対応して複数存在する。このことは、従来の最大可換ゲージにおける解析では見落とされていたことであり、非可換ストークスの定理に基づいた新しい定式化によって初めてゲージに依存しない形で示された。

実際に、 $SU(3)$ 理論でシミュレーションを実行し、リンク変数の非線形変化によって分解される V 場が、クォークの閉じ込めに支配的な役割を果たしていることを示した。赤外領域における V ドミナンス（従来の MAG 解析におけるアーベリアンドミナンス。maximal case と対応）やストリングテンションにおけるモノポール・ドミナンスが、ゲージ不変な形で確かめられた。

新しい定式化による双対超伝導描像の確立のためには、N-ality や有限温度転移など解析を進めていく予定である。

5 研究組織

- 柴田章博（しばたあきひろ） [研究代表]
高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・研究機関講師
- 近藤慶一（こんどうけいいち）
千葉大学大学院・理学研究科・教授
- 加藤清考（かとうせいこう）
高松工業高等専門学校・一般教育科・準教授
- 伊藤祥一（いとうしょういち）
長野工業高等専門学校・電子情報工学科・準教授

参考文献

- [1] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, New descriptions of lattice $SU(N)$ Yang-Mills theory towards quark confinement. CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat], Phys.Lett.B669:107-118,2008
- [2] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, Toward gauge independent study of confinement in $SU(3)$ Yang-Mills theory. CHIBA-EP-166, KEK-PREPRINT-2007-50, POS(LATTICE-2007)331, arXiv:0710.3221 [hep-lat]; Talk given at 25th International Symposium on Lattice Field Theory, Regensburg, Germany, 30 Jul - 4 Aug 2007.
- [3] Reformulating $SU(N)$ Yang-Mills theory based on change of variables, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami. CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th]
- [4] Compact lattice formulation of Cho-Faddeev-Niemi decomposition: Gluon mass generation and infrared Abelian dominance. A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-165, KEK-PREPRINT-2007-19, arXiv:0706.2529 [hep-lat]. Published in Phys.Lett.B653:101-108,2007

- [5] Compact lattice formulation of Cho-Faddeev-Niemi decomposition: String tension from magnetic monopoles S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata , T. Shinohara CHIBA-EP-158, KEK-PREPRINT-2006-2, hep-lat/0604016. Published in Phys.Lett.B645:67-74,2007.
- [6] K.-I. Kondo, Phys.Rev.D77 085029 (2008) (arXiv:0801.1274 [hep-th])
- [7] Proving Abelian dominance in the Wilson loop operator. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]
- [8] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Seikou Kato, Shoichi Ito, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, A New description of lattice Yang-Mills theory and non-Abelian monopoles as the quark confiner, Talk given at 26th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice2008), Williamsburg, Virginia, 14-20 Jul 2008.; PoS(LATTICE 2008)268