

実施報告書 (大型 07-15)

クォーク閉じ込めに支配的な役割を果たす位相配位の数値的研究

柴田章博

高エネルギー加速器研究機構計算科学センター

1 研究組織

- 柴田章博 (しばたあきひろ) [研究代表]
高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・研究機関講師
- 近藤慶一 (こんどうけいいち)
千葉大学・理学部物理学科・教授
- 加藤清考 (かとうせいこう)
福井工業高等専門学校・一般教育科・准教授
- 伊藤祥一 (いとうしょういち)
長野工業高等専門学校・電子情報工学科・准教授

2 研究の概要

1970年代に南部, 't Hooft, Mandelstam 達によって提唱された双対超伝導描像は, クォーク閉じ込めを理解する最も魅力的かつ有力なシナリオである。特に, 随伴 Higgs 場を含まない Yang-Mills 理論や QCD において, 双対マイスナー効果を引き起こすのは, ゲージ場の位相的配位であると考えられる。これまでに多くの研究がなされ, 著しい成果が得られた。しかしながら, 特定のゲージ固定を必要としており, 特別な仮定を設けずに Yang-Mills 理論からゲージ不変な双対超伝導描像が得られること, すなわちゲージ不変な磁気モノポール配位が閉じ込めに支配的な寄与をもたらすことを立証することが求められる。

本研究では, この新しい定式化を更に発展させ, いかなる位相的配位がクォーク閉じ込めに支配的に効くのかを精査する。クォーク閉じ込めは, 従来行われているようなアーベリアン射影で得られるアーベリアン磁気モノポールに起因すると仮定する必要はない。これを明らかにすれば, 従来の常識を打ち破る成果となる。

これらの困難を解決し双対超伝導描像を確立するため, クォーク閉じ込めに効くゲージ不変な位相的配位を特別なゲージ固定に依らずに抽出できるような新しい定式化を提唱した。SU(2) Yang-Mills 場においては, Cho-Faddeev-Niemi-Chabanov (CFNS) 分解の格子ゲージ理論版を提唱し

た。さらに、その拡張として $SU(N)$ Yang-Mills 場における定式化を行った。 $SU(N)$ Yang-Mills 場に拡張した。リンク変数はゲージ群の stability 部分群とその商空間の成分とに分解することができる。 $SU(2)$ においては、stability 部分群は $U(1)$ ゲージ群が唯一であるが、 $SU(3)$ においては、 $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal case) と $\tilde{H} = U(2)$ (minimal case) との2つの分解が存在する。論文 [8] においては、 $SU(N)$ Yang-Mills 場のリンク変数による厳密な分解方程式の解を与えた。この定式化によって、閉じ込めに寄与する位相的配位をゲージに依存することなく抽出することが可能となった。また、ノンアーベリアン・ストークスの定理との関係を議論することで、YM 場の分解で得られた場の閉じ込めに果たす役割を議論することができ、分解で得られた変数を用いてゲージ不変な磁氣的モノポールが導出される。[6]

実際、 $SU(2)$ におけるシミュレーションを実行し、変数分解を実行しゲージ不変な磁氣的モノポールを抽出した。抽出したアーベリアンパートの Wilson loop、及び磁氣的モノポールによる Wilson loop の期待値からクォーク・クォーク間に働くポテンシャルを計算し、アーベリアンドミナンス及びモノポールドミナンスを YM 場のゲージに依存すること成立することを示した [9]。

本研究では、 $SU(3)$ minimal option における解析を行い、双対超電導描像による閉じ込め機構について調べる。

3 変数分解

YM 場のゲージポテンシャルを分解 $U_{x,\mu} = V_{x,\mu} X_\mu$ を、連続極限でゲージポテンシャルの分解 $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$ [3] を与えるものを考える。リンク上の中点で定義された場 $\mathbb{A}_{x',\mu}, \mathbb{V}_{x',\mu}$ 及び、格子上场 $\mathbb{X}_{x,\mu}$ とを用いて次のように対応付けられる。

$$U_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu A_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon \mathbb{A}_{x',\mu}), \quad (1)$$

$$V_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu V_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon \mathbb{V}_{x',\mu}), \quad (2)$$

$$X_{x,\mu} = V_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon \mathbb{X}_{x,\mu}). \quad (3)$$

これらの場は、ゲージ変換 Ω_x に対して、次のような変換性を持つ。

$$U_{x,\mu} \rightarrow \Omega U_{x,\mu} = \Omega_x U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (4)$$

$$V_{x,\mu} \rightarrow \Omega V_{x,\mu} = \Omega_x V_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad X_{x,\mu} \rightarrow \Omega X_{x,\mu} = \Omega_x X_{x,\mu} \Omega_x^\dagger. \quad (5)$$

ゲージ場の分解は、ゲージ群 G の stability group 部分群 $H \subset G$ とその商空間 G/H に対応して与えられる [1][2]。 $G = SU(3)$ の minimal option ($\tilde{H} = U(2)$) の場合は、変数分解 $U_{x,\mu} = X_{x,\mu} V_{x,\mu}$ は導入した随伴変換するカラー場 $\mathbf{h}_x = \Theta_x (\lambda_8/2) \Theta_x^\dagger$, ($\in G/H$) を用いて次の定義方程式で与えられる。

$$D_\mu^\epsilon[V] \mathbf{h}_x = \frac{1}{\epsilon} (V_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} - \mathbf{h}_x V_{x,\mu}) = 0, \quad (6)$$

$$g_x = e^{-2\pi q_x/N} \exp(-ia_x^{(0)} \mathbf{h}_x - i \sum_{l=1}^3 a_x^{(l)} \mathbf{u}_x^{(l)}) = \mathbf{1}, \quad (7)$$

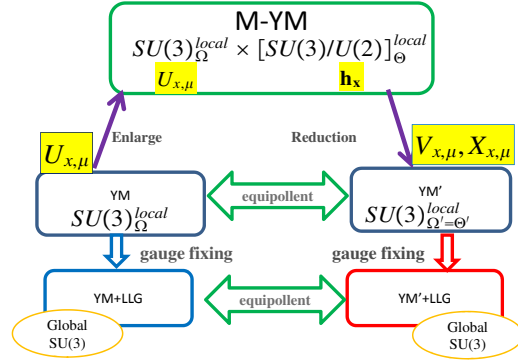


図 1: symmetry of new variables

その厳密解は次で与えられる ($N = 3$)。

$$L_{x,\mu} = \frac{N^2 - 2N + 2}{N} \mathbf{1} + (N - 2) \sqrt{\frac{2(N - 1)}{N}} (\mathbf{h}_x + U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}) + 4(N - 1) \mathbf{h}_x U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}, \quad (8)$$

$$L_{x,\mu} = \sqrt{L_{x,\mu} L_{x,\mu}^\dagger} \hat{L}_{x,\mu} \iff \hat{L}_{x,\mu} = \left(\sqrt{L_{x,\mu} L_{x,\mu}^\dagger} \right)^{-1} L_{x,\mu}, \quad (9)$$

$$X_{x,\mu} = \hat{L}_{x,\mu}^\dagger (\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{1/N} g_x^{-1}, \quad (10)$$

$$V_{x,\mu} = X_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = g_x \hat{L}_{x,\mu} U_{x,\mu} (\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{-1/N}. \quad (11)$$

ここで注意すべきは、任意の YM 場カラー場が与えられると一意に分解が決定される。

変数分解を行った変数で書かれた理論ともとの YM 理論と等価な理論を得るためには、カラー場導入で拡大したゲージ対称性をもとの YM のゲージ対称性に一致させる reduction 条件を導入する。本研究では、 $SU(2)$ の CFNS 分解で導入された reduction 条件を拡張したもの、即ち与えられたゲージ場 $U_{x,\mu}$ に対する次の汎関数を最小にするようにカラー場を \mathbf{h}_x を定める。

$$F_{\text{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}] = \sum_{x,\mu,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left((D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x)^\dagger D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x \right). \quad (12)$$

ここで注意すべきは、変換数はゲージ変換 Ω に対して \mathbf{h}_x はゲージ変換に対して $\mathbf{h}_x \rightarrow \mathbf{h}'_x = \Omega_x \mathbf{h}_x \Omega_x^\dagger$ と変換し、 $F_{\text{reduction}}$ はゲージ不変である。したがって、変数分解がゲージに依存することなく得られることを保証している。ウィルソンループはコヒーレント状態 $|\xi_x, \Lambda\rangle$ ($1 = \int |\xi_x, \Lambda\rangle d\mu(\xi_x) \langle \Lambda, \xi_x|$) を各サイトに挟んで整理すると、新しい変数を用いて書き表すことができ

る。[11][12]

$$\begin{aligned} W_C[U] &= \prod_{\langle x, x+\mu \rangle \in C} U_{x,\mu} = \prod_{\langle x, x+\mu \rangle \in C} X_{x,\mu} V_{x,\mu} \\ &= \prod_{\langle x, x+\mu \rangle \in C} \int d\mu(\xi_x) \langle \Lambda | \left(\xi_x^\dagger X_{x,\mu} \xi_x \right) \left(\xi_x^\dagger V_{x,\mu} \xi_{x+\mu} \right) | \Lambda \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

$$\cong \int d\mu(\xi_x) \prod_{\langle x, x+\mu \rangle \in C} \langle \Lambda, \xi_x | V_{x,\mu} | \xi_{x+\mu}, \Lambda \rangle =: W_C[V]. \quad (14)$$

実際、stability 部分群 \tilde{H} に対して、第一方程式はコヒーレント状態 $|\xi_x, \Lambda\rangle$ に対して固有状態であることが示される。

$$\mathbf{h}_x V_{x,\mu} - V_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} = 0 \iff \left[\xi_x^\dagger V_{x,\mu} \xi_{x+\mu}, \tilde{H} \right] \iff \xi_x V_{x,\mu} \xi_x^\dagger \in \tilde{H}, \quad (15)$$

$$\left(\xi_x^\dagger V_{x,\mu} \xi_{x+\mu} \right) | \Lambda \rangle = | \Lambda \rangle e^{i\phi}, \quad e^{i\phi} := \langle \Lambda | \xi_x^\dagger V_{x,\mu} \xi_{x+\mu} | \Lambda \rangle = \langle \Lambda, \xi_x | V_{x,\mu} | \xi_{x+\mu}, \Lambda \rangle. \quad (16)$$

また、第 2 方程式を使うと

$$\langle \Lambda, \xi_x | X_{x,\mu} | \xi_{x+\mu}, \Lambda \rangle = \text{tr}(X_{x,\mu}) / \text{tr}(\mathbf{1}) + 2\text{tr}(X_{x,\mu} \mathbf{h}_x) = 1 + 2\text{igetr}(\mathcal{X}_\mu(x) \mathbf{h}(x)) + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

であり、 $X_{x,\mu}$ の寄与は $O(\epsilon)$ であり、連続極限で消えることが示される。

ノンアーベリアンストークスの定理を用いると、ウイルソングループを境界とする面 $\Sigma : C = \partial\Sigma$ を用いて、ウイルソングループは対のように書きなおせる。[11]

$$W_C[\mathcal{A}] := \text{tr} \left[P \exp \left(-ig \oint_C dx^\mu \mathcal{A}_\mu(x) \right) \right] / \text{tr}(\mathbf{1}) = \int d\mu_\Sigma(\xi) \exp \left(\int_{S: C=\partial\Sigma} dS^{\mu\nu} F_{\mu\nu}[\mathcal{V}] \right), \quad (18)$$

ここで、 $\mathcal{V}_\mu(x) = \text{tr}(\mathcal{A}_\mu(x) \mathbf{h}(x)) \mathbf{h}(x) + \frac{1}{ig} [\partial_\mu \mathbf{h}(x), \mathbf{h}(x)]$ であり、変数分解であられる $\mathbb{V}_{x',\mu}$ の連続極限と一致する。

さらに Hodge 分解を適用するとウイルソングループは、 $\mathcal{V}_\mu(x)$ で定義される電磁的カレント j と磁気的カレント k を用いて書きなおすことができる。

$$W_C[\mathcal{A}] = \int d\mu_\Sigma(\xi) \exp \left[ig \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (k, \Xi_\Sigma) + ig \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (j, N_\Sigma) \right]. \quad (19)$$

ここで、 k, j は 1-form の保存カレント $\delta k = 0 = \delta j$ で次で与えられる。

$$k := \delta^* F = *dF, \quad \Xi_\Sigma := \delta^* \Theta_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (20)$$

$$j := \delta F, \quad N_\Sigma := \delta \Theta_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (21)$$

ここで、 $\Delta := d\delta + \delta d$ はラプラス演算子、 $\Theta_\Sigma^{\mu\nu} := \int_\Sigma d^2 S^{\mu\nu}(x(\sigma)) \delta^D(x - x(\sigma))$ は面要素である。したがって、格子上の磁気的モノポールは新しい変数を用いて次で与えられる。

$$V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^\dagger V_{x,\nu}^\dagger = \exp(-ig \mathcal{F}[V_\mu(x)]_{\mu\nu}) = \exp(-ig \Theta_{\mu\nu}^8 \mathbf{h}_{x'}), \quad (22)$$

$$\Theta_{\mu\nu}^8 = -\arg \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{h}_x \right) V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^\dagger V_{x,\nu}^\dagger \right], \quad (23)$$

$$k_{x,\mu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Theta_{\alpha\beta}^8. \quad (24)$$

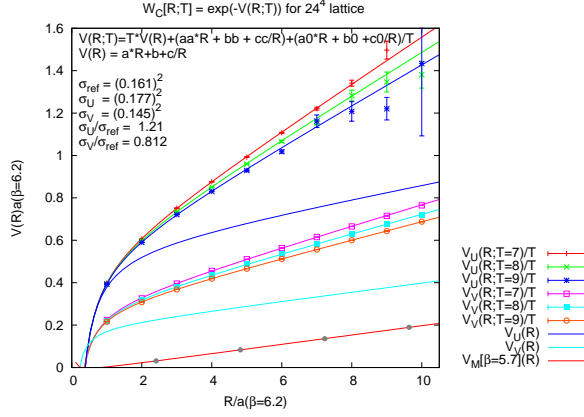


図 2: The combinational plot of the quark–anti-quark inter potential. (from above to below) $V(R, T)$ and $V(R)$ of the Wilson loop for $SU(3)$ -YM field $\langle W_{(R,T)}[U_{x,\mu}] \rangle$, and ones for $U(2)$ -part $\langle W_{(R,T)}[V_{x,\mu}] \rangle$, and $V(R)$ for the magnetic monopole part $\langle W_{(R,T)}[k_{x,\mu}] \rangle$, respectively. The static potential $V(R)$ is represented by the bold lines.

定義より、 k_μ はゲージ不変な量な量であり、tability 部分群 $\tilde{H} = U(2)$ の固有状態 $V_{x,\mu}$ から導かれるノンアーベリアンモノポールである。

したがって、格子上のアーベリアンドミナンス、磁氣的モノポールドミナンスは次で与えられる。

$$\langle W_C[U] \rangle \cong \langle W_C[V] \rangle \cong \langle W_M[k] \rangle := \left\langle \exp \left(-ig\epsilon \sum_{x,\mu} k_{x,\mu} \Xi_{x,\mu} \right) \right\rangle, \quad (25)$$

4 シミュレーション

新しい変数 $\{V, X, h\}$ で記述された理論は、reduction 条件によって決定されたカラー場を用いて、拡張された CFNS 分解を用いて生成することができる。従って、本研究では、新しい変数 $\{V, X, h\}$ の配位の生成は、(1)YM 理論のシミュレーションによる配位の生成、(2)reduction 条件によるカラー場の決定、(3) 拡張 CFNS 分解と手順で、実行できる。 $SU(3)$ YM 理論のリンク変数の生成は、Wilson アクションに対する標準的なアルゴリズムで配位を生成する。reduction 条件は、 h_x による変分を Θ_x に対する変分で読みかえることで、ゲージ固定汎関数を最小化するアルゴリズムと同類のアルゴリズムを適用できる。

図 2 は、ウィルソンループの期待値 $\langle W_C[U] \rangle$ 、 $\langle W_C[V] \rangle$ 、 $\langle W_M[k] \rangle$ それぞれから計算されるクォーク・クォーク間ポテンシャルを示している。 (R, T) の長方形のウィルソンループから得られる期待値を次の関数形で 2 次元フィットして string tension を求めた。

$$\langle W_{(R,T)}[V] \rangle = \exp(-V(R, T)), \quad (26)$$

$$V(R, T) := T \times V(R) + (a_1 R + b_1 + c_1/R) + (a_2 R + b_2 + c_2/R)/T, \quad (27)$$

$$V(R) = \sigma R + b + c/R. \quad (28)$$

$\langle W_C[V] \rangle$ から 85-90% の $U(2)$ ドミナンス、 $\langle W_M[k] \rangle$ から 75% の $U(2)$ 磁氣的モノポールドミナンスを示している。

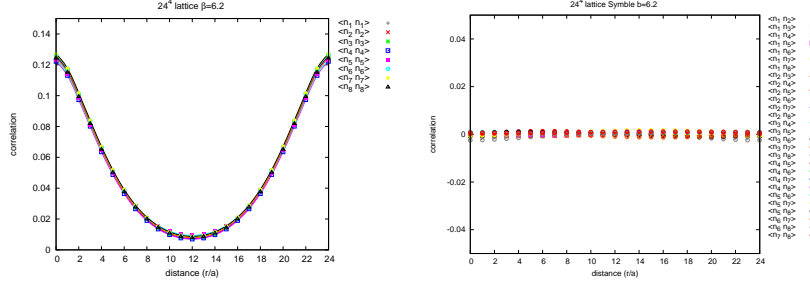


図 3: Two point-correlation functions $\langle h^A(x)h^B(y) \rangle$ ($A, B = 1, 2, \dots, 8$) measured at $\beta = 6.2$ on 24^4 lattice, using 500 configurations in the Landau gauge. The left panel shows ($A = B$) and the right ($A \neq B$).

次に、新しい変数の 2 点関数について調べる。以下 YM 場をランダウゲージに固定して、解析を進める。はじめに、カラー対象性が保たれている検証する。図 3 はカラー場 $h^A(x)$ の 2 点関数を示している。カラー場の平均は $\langle h_x^A \rangle = \pm 0.002 \cong 0$ ($A = 1, 2, \dots, 8$) であり、2 点関数はグローバル $SU(3)$ 対象性 (カラー対称性) が保持されていることが示された。

$$\langle h^A(x)h^B(y) \rangle = D(x-y)\delta^{AB}. \quad (29)$$

図 4 の左側は、新しい変数の 2 点関数 $\langle \mathcal{V}_\mu(0)\mathcal{V}_\mu(x) \rangle, \langle \mathcal{X}_\mu(0)\mathcal{X}_\mu(x) \rangle$ オリジナル YM 場の 2 点関数 $\langle A_\mu(0)A_\mu(x) \rangle$ を示す。 $\langle \mathcal{X}_\mu(0)\mathcal{X}_\mu(x) \rangle$ は、長距離相関が素早く減衰するが、 $\langle \mathcal{V}_\mu(0)\mathcal{V}_\mu(x) \rangle$ 及び $\langle A_\mu(0)A_\mu(x) \rangle$ はほぼ同じ減衰を示しており、赤外領域の $U(2)$ -dominance (\mathcal{V} -ドミナンス) が示される。

$\mathcal{X}_\mu(x)$ に関しては、ゲージ変換に対して随伴変換するため、ゲージ不変な質量項を $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}M_x^2 \text{tr} \mathcal{X}_\mu^A(x)\mathcal{X}_\mu^A(x)$ を定義できる。質量を伴うゲージ場の伝播関数の逆フーリエ変換が

$$D^{XX}(r) = \langle X_\mu(x)X_\mu(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{3}{k^2 + M_X^2} \simeq \frac{3\sqrt{M}}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-M_x r}}{r^{3/2}}. \quad (30)$$

与えられるため、 $r^{3/2}D_{\mu\nu}^{XX}(r)$ の関数系で減衰項をはかることで M_x を測ることが可能となる。図 4 の右側は $r^{3/2}D_{\mu\nu}^{XX}(r)$ とそのフィットを示しており、 $M_X = 2.4\sqrt{\sigma_{phys}} = 1.1\text{GeV}$. をえた。

5 まとめ

格子上の $SU(N)$ YM 理論のゲージポテンシャルを分解 $U = VX$ を提唱し、格子ゲージ理論に基づくモンテカルロシミュレーションの手続きを示した。実際 $SU(3)$ におけるモンテカルロシミュレーションを実行し閉じ込め機構に中心的な役割を果たす配位を抽出し、様々な量を計算できることを示した。クォークの基本表現におけるウィルソンループは、tability 部分群 $\tilde{H} = U(2)$ から構成される minimal option の V 場が閉じ込めに寄与すること、 $U(2)$ ドミナンスであることを初めて示した。これは、ノンアーベリアンストークスの定理との関連付けて変数分解を構成することによって、また格子上の定式化にする方法によって、陽にゲージ不変な形として示すことができた。また、minimal option においては、ノンアーベリアン磁氣的なモノポールがゲージ不変に定義され、磁氣的モノポールドミナンスであることを示した。。

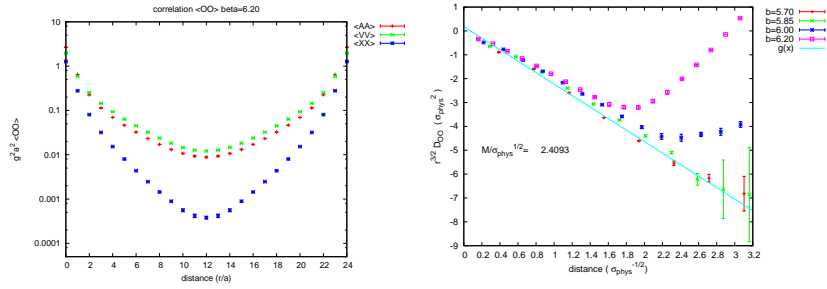


图 4: (Left) The correlators as function of distance r . measured at $\beta = 6.2$ on 24^4 lattice, using 500 configurations in the Landau gauge.: (from above to below) $\langle \mathcal{V}_\mu(0)\mathcal{V}(x) \rangle$, $\langle \mathcal{A}_\mu(0)\mathcal{A}(x) \rangle$, $\langle \mathcal{X}_\mu(0)\mathcal{X}(x) \rangle$

参考文献

- [1] New descriptions of lattice SU(N) Yang-Mills theory towards quark confinement. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat]
- [2] Toward gauge independent study of confinement in SU(3) Yang-Mills theory. A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-166, KEK-PREPRINT-2007-50, POS(LATTICE-2007)331, arXiv:0710.3221 [hep-lat]; Talk given at 25th International Symposium on Lattice Field Theory, Regensburg, Germany, 30 Jul - 4 Aug 2007.
- [3] Reformulating SU(N) Yang-Mills theory based on change of variables, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami. CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th]
- [4] Compact lattice formulation of Cho-Faddeev-Niemi decomposition: Gluon mass generation and infrared Abelian dominance. A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-165, KEK-PREPRINT-2007-19, arXiv:0706.2529 [hep-lat]. Published in Phys.Lett.B653:101-108,2007
- [5] Compact lattice formulation of Cho-Faddeev-Niemi decomposition: String tension from magnetic monopoles S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara CHIBA-EP-158, KEK-PREPRINT-2006-2, hep-lat/0604016. Published in Phys.Lett.B645:67-74,2007.
- [6] Proving Abelian dominance in the Wilson loop operator. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]
- [7] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Seikou Kato, CHIBA-EP-185, KEK-PREPRINT-2010-22, arXiv:1007.2696 [hep-th]
- [8] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, (Chiba U.) Phys.Lett.B691:91-98,2010,. KEK-PREPRINT-2009-32, CHIBA-EP-181, arXiv:0911.5294 [hep-lat]

- [9] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Seikou Kato, Shoichi Ito, Toru Shinohara, Nobuyui Fukui, PoS LAT2009:232,2009, KEK-PREPRINT-2009-28, CHIBA-EP-180, Nov 2009. 7pp.
- [10] S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, S. Ito, PoS LAT2009:228,2009, CHIBA-EP-179, KEK-PREPRINT-2009-27, arXiv:0911.0755 [hep-lat]
- [11] K.-I. Kondo, Phys.Rev.D77 085029 (2008)
- [12] K.-I. Kondo and A. Shibata, , CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203[hep-th]