

大型シミュレーション研究実施報告書

研究課題 格子 QCD によるハドロンの散乱と共鳴

課題番号 大型－09/10-21

研究組織

研究責任者	森松 治	高エネルギー加速器研究機構	准教授
研究従事者	矢木 拓也	東京大学理学系研究科	博士 4 年
	大谷 宗久	杏林大学医学部	講師
	橋本 省二	高エネルギー加速器研究機構	教授

研究の動機

2007 年に Belle collaboration により以下のような性質を持つ新しいハドロンの Z(4430) が報告された [1]。

- 崩壊チャンネル: $Z^+(4430) \rightarrow \pi^+ \psi'$
- 質量ピーク: $4433 \pm 5 \text{ [MeV}/c^2]$
- 崩壊幅: $45^{+35}_{-18} \text{ [MeV}/c^2]$ (非常に鋭い)
- 量子数: $I^G(J^P) = 1^+(0^-, 1^-, 2^-)$

崩壊チャンネルより, Z(4430) が hidden charm sector ($c\bar{c}$) を持ち, かつ electric charge ($\bar{d}u$) を持つことがわかる。これまで知られてきた, ($c\bar{c}$) を含むエキゾチックハドロンの X(3872), Y(4260) 等と異なるのは, この electric charge を持つということである。つまり Z(4430) というハドロンの存在するのならば, それは ($c\bar{c} + \bar{d}u$) で構成されなければならないのである。このことから, Z(4430) は 4 クォーク状態の強い候補として, 注目を集めている。

我々は Z(4430) の物理を知るための第一歩として, それと期待される束縛状態を作り得る $D_1 D^*$ の S 波の散乱長の精密計算を行った。仮に $D_1 D^*$ が束縛状態を作るならば, その散乱長は引力的な振る舞いを示すことが必要条件となる。そして引力を示すのならば, その相互作用の振る舞いからそれが束縛状態を作るのかどうかを議論することができるのである。また他のチャンネルとの結合の効果を調べるために Z(4430) と同じ量子数を持ち, かつその質量の和が 4430 [MeV] 近傍に存在するような S 波の D 中間子散乱とチャーモニウム・中間子散乱の散乱長を計算した。具体的なチャンネルについては次のセクションで具体的に説明する。これらの内二つのチャンネルで作られる行列要素を計算することでチャンネル間の結合の大きさを議論できる。

散乱長の計算は, ルシャールの公式を用いて有限体積中での四点の相関関数のエネルギー固有値を通して行われる。そして二つの中間子が束縛状態を作るかどうかは, そのエネルギー固有値とその体積依存性から判断することができる。そこで我々は散乱長の計算を四つのクォーク質量・二つの体積で行い, そのクォーク質量・体積依存性も議論した。

計算の詳細

セットアップ

本計算に於いては我々自身の手によって作成されたゲージ配位を用いて格子 QCD 計算を行った。ゲージ配位の作成，そしてクォーク伝播関数の計算に用いたセットアップ・数値パラメータ等を以下に与える。

- ゲージ配位
 - ゲージ作用 : Pure Gauge (Quenched Approximation)
 - 格子空間のサイズ : $L^3 \times T = 24^3 \times 48$, and $16^3 \times 48$
 - 統計数 : $N = 2000$ (for $L = 24$), and 3000 (for $L = 16$)
 - ゲージカップリング : $\beta = 6.15$
 - 格子定数 : $a^{-1} \sim 2.81[4]$ [GeV] ($a \simeq 0.07$ [fm])
 - ゲージ固定の有無 : クーロンゲージに固定
- クォーク伝播関数
 - フェルミオン作用 : Wilson Action
 - ホッピングパラメータ (チャームクォーク) : $\kappa = 0.136$
 - ホッピングパラメータ (ライトクォーク) : $\kappa = 0.152, 0.1525, 0.1528, 0.1531$
 - 境界条件 : 時間方向への周期的境界条件 : $\psi(x + T) = \psi(x)$

クエンチ近似で $\beta = 6.15$ というパラメータはチャーモニウム，及びチャーモニウムと関係したエキゾチック中間子についての先駆的研究 [13] で用いられたものを使用した。そのため，格子定数の値 $a^{-1} \sim 2.81[4]$ [GeV] も [13] において 中間子・中間子の質量比から決定されたものをそのまま引用している。

格子定数からそれぞれのホッピングパラメータに対応するクォーク質量を見積もることができる。擬スカラー粒子の質量を測定すると $\kappa = 0.136, 0.152, 0.1525, 0.1528, 0.1531$ が $m_\pi \simeq 3000, \text{ and } 800 \text{ } 500$ [MeV] に対応していることがわかる。したがって $\kappa = 0.136$ をチャームクォークとして固定し， $\kappa = 0.152, 0.1525, 0.1528, 0.1531$ をライトクォークとした。

一般に格子シミュレーションにおいてクォーク (質量 m_i $i = u, d, s, c, b, t$) のコンプトン波長が格子定数 a よりも十分短くなければならないのは直感的に考えても明らかである。

$$m_i a \ll 1 \tag{1}$$

つまり取り扱うクォークの質量が重ければ重いほど格子定数はより小さくしなければならない。この条件は u, d, s クォークのみが関係するような物理を議論する際には問題にはならないのだが，特に D 中間子のような軽い質量のクォークと重い質量のクォークが混在する系をを同時に関係する場合は大きな困難となる。計算機資源は有限であるから，重いクォークに合わせて格子定数を非常に細かくすればするほど，格子空間はあまり大きく取れなくなる。すると今度は前章で与えたような有限体積効果が問題として立ちふさがるのである。また散乱長の格子 QCD 計算は微小な相互作用を対象としているので，一般に高い統計精度が要求される。

従って本計算では Pure Gauge・Wilson Action というゲージ配位・フェルミオン作用を使うことで十分細かい格子定数で，かつある程度の格子サイズを持ったゲージ配位・複数のクォーク質量での計算を実現した。

Interpolating Fields for Charmed meson scattering

前述したように $Z(4430)$ を, $D_1 D^*$ がその threshold において S 波状態で結合した分子状態であると考え。このとき崩壊チャンネル $Z(4430) \rightarrow \pi^+ \psi(2S)$ より, 系全体のアイソスピン・G パリティが決定されこれと D_1, D^* の J^P の全角運動量がそれぞれ $1^+, 1^-$ であることから $Z^+(4430)$ の $I^G(J^P)$ は $I^G(J^P) = 1^+(0^-, 1^-, 2^-)$ と推定できる。図 (1) に $Z(4430)$ と結合するチャンネルを S 波の状態を中心にまとめた。左列より中間子の組み合わせ・相互作用が無い場合のハドロン質量の和・量子数・G パリティについての固有状態が与えられている。G パリティについての固有状態を与える際に, D 中間子にフレーバーを示す添え字を明示した。一般に K 中間子と同様に D 中間子もスピンパリティを示す添え字とフレーバーを示す添え字を組み合わせで表示される。これについては表 (2) にまとめた。

表 1: 【 $I^G(J^P) = 1^+(0^-)$ 】 ($Z(4430)$ に結合する)

	combination	threshold[MeV]	quantum number	eigen state
S-wave ($J^P = 0^-$)	$D \otimes D_0^*$	4270	$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}(0^- \otimes 0^+)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (D^+ \bar{D}_0^{*0}\rangle - D_0^{*+} \bar{D}^0\rangle)$
	$D_1 \otimes D^*$	4430	$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}(1^+ \otimes 1^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{D}_1^0 D^{*+}\rangle + \bar{D}^{*0} D_1^+\rangle)$
	$\chi_{c1}(1P) \otimes \rho$	4280	$0^+ \otimes 1^+(1^{++} \otimes 1^{--})$	$ \chi_{c1}(1P) \rho\rangle$
	$J/\psi \otimes a_1$	4360	$0^- \otimes 1^-(1^{--} \otimes 1^{++})$	$ J/\psi a_1\rangle$
P-wave	...			
	$\psi' \otimes \pi$	3830
	...			
D-wave

表 2: D 中間子のスピンパリティ・フレーバー添え字

Flavor		Spin	
D^+	$c\bar{d}$	D	0^-
D^-	$\bar{c}d$	D^*	1^-
D^0	$c\bar{u}$	D_0^*	0^+
\bar{D}^0	$\bar{c}u$	D_1	1^+

各状態を記述するために必要とされる中間子の interpolating fields を用意する。D 中間子については

$$\begin{cases}
 O_{\bar{D}_1^0}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x) & (2a) \\
 O_{D^{*+}}^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu c(x) & (2b) \\
 O_{D^{*0}}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu u(x) & (2c) \\
 O_{D_1^+}^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu\gamma^5 c(x) & (2d)
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 O_{D^+}(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^5 c(x) & (3a) \\
 O_{\bar{D}_0^{*0}}(x) \equiv \bar{c}(x)u(x) & (3b) \\
 O_{D_0^{*+}}(x) \equiv \bar{d}(x)c(x) & (3c) \\
 O_{\bar{D}^0}(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^5 u(x) & (3d)
 \end{cases}$$

と与えられ, u, d クォークから作られる軽い中間子やチャーモニウムについても同様に

$$\begin{cases} O_\rho^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu u(x) & (4a) \\ O_{a_1}^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x) & (4b) \end{cases} \quad \begin{cases} O_{J/\psi}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu c(x) & (5a) \\ O_{\chi_{c1}(1P)}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu\gamma^5 c(x) & (5b) \end{cases}$$

で与えられる。パイ中間子散乱の議論と同様にこれらの Interpolating Field を用いて 2 点の相関関数

$$C_h(t) \equiv \sum_{\vec{x}} \langle 0 | O_h(x) O_h^\dagger(0) | 0 \rangle \quad (6)$$

$$\propto \exp(-m_h t) + \exp(-m_h(T-t)) + \dots \quad (7)$$

$$\propto \cosh(-m_h(t-T/2)) + \dots \quad (8)$$

が与えられ、その時間依存性から運動量ゼロでのエネルギー固有値、すなわちハドロンの質量 m_h を引き出すことが出来る。式 (8) の第 2 項は時間方向の周期的境界条件に由来する。実際には次のような smearing を施すことで、励起状態より質量が軽く空間的に広がった基底状態をより観測しやすくした。

$$C_h^A(t) \equiv \sum_{\vec{x}} \langle 0 | O_h(x) O_h^{A\dagger}(0) | 0 \rangle \quad (9)$$

$$O_h^A(x) \equiv \sum_{\vec{x}_1} \sum_{\vec{x}_2} \bar{\psi}^f(\vec{x}_1, t) \Gamma_h \psi^g(\vec{x}_2, t) F(\vec{x} - \vec{x}_1) F(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (10)$$

$$F(\vec{x}) = A \exp(-B|\vec{x}|^2) \quad (11)$$

上式に於いて、 $\bar{\psi}^f \Gamma_h \psi^g$ はハドロン h とオーバーラップを持つような量子数を持った interpolating field である。本計算に於いては $B = 0.050$ 、そして A は

$$\sum_{\vec{n}} F(\vec{n}) = 1 \quad (12)$$

を満たすように選んだ。

一方で二粒子状態 $D_1 \otimes D^*$ 、 $J/\psi \otimes a_1$ 、 $\chi_{c1}(1P) \otimes \rho$ 、そして $D \otimes D_0^*$ の S 波を表す Interpolating Fields を $O_i (i = 1, \dots, 4)$ とすると上で挙げた演算子を組み合わせることで以下のように記述できる。

$$\begin{cases} O_1(x, y) \equiv g_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[O_{D_1}^\mu(x) O_{D^{*+}}^\nu(y) + O_{D^{*0}}^\mu(x) O_{D_1^+}^\nu(y) \right] & (13a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_2(x, y) \equiv g_{\mu\nu} \left[O_{\chi_{c1}(1P)}^\mu(x) O_\rho^\nu(y) \right] & (13b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_3(x, y) \equiv g_{\mu\nu} \left[O_{J/\psi}^\mu(x) O_{a_1}^\nu(y) \right] & (13c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_4(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[O_{D^+}(x) O_{D_0^{*0}}(y) - O_{D_0^{*+}}(x) O_{D^0}(y) \right] & (13d) \end{cases}$$

これらを用いて四点関数は以下の四行四列の行列で定義される。

$$C_{ij}(t) \equiv \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle 0 | O_i(x, y) O_j^\dagger(0, 0) | 0 \rangle \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

$$\propto \cosh(-m_{ij}(t-T/2)) + \dots \quad (15)$$

パイ中間子散乱を議論したときと同様、2つの空間座標について和を取ることで S 波への射影を取るだけでなく、さらに2つの中間子それぞれの運動量をゼロにするような射影を行うことができる。(パイ中間子散乱のところできちんと議論する) 例えば $D_1 D^*$ の四点関数ならば、 $\vec{p}_{D_1} + \vec{p}_{D^*} = \vec{0}$ という S 波の条件に加えてさ

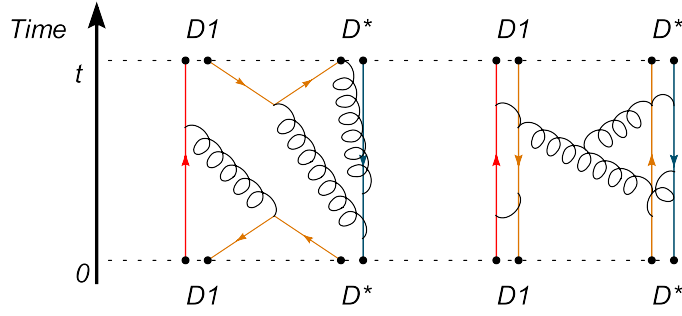


図 1: $D_1 D^*$ 散乱において現れるダイアグラム

らに $\vec{p}_d + \vec{p}_c = \vec{p}_e + \vec{p}_u = \vec{0}$ という拘束条件が与えられることに相当する。これによって D 中間子系のチャンネルと軽い中間子・チャーモニウム系のチャンネル間の結合の影響を抑制することができる。

また全ての四点関数に $c\bar{c}$ の対消滅・対生成を伴うダイアグラムが存在するが、今回の計算ではその効果は削除した。物理的には J/ψ の崩壊幅が非常に狭いことからこのプロセスの寄与は非常に小さいと推測される。また実際的にもこのダイアグラムを計算するには全ての time slice をソースとするクォーク伝播関数が必要となってしまうため、計算時間が T 倍 (T:時間方向の箱の大きさ) となるので取り入れるのは現実的ではない。図 (1) に $D_1 D^*$ 散乱においてあらわれるダイアグラムを簡潔に与える。左図が $c\bar{c}$ の対消滅・対生成を伴うダイアグラムに相当する。

有効質量

次のセクション以降で主に議論の対象となるのは相関関数から引き出されるエネルギー固有値である。パイ中間子散乱の議論と同様に有効質量が固有値を決定する上で非常に重要な指標となる。まずは wrap-around effect を考慮せずに、有効質量 $m_{\text{eff}}(t)$ を計算する。そして wrap-around effect の影響が非常に大きいようであればパイ中間子散乱の議論と同様の手段でこれを処理することにする。その際の実効質量は 1 粒子状態・2 粒子状態ともに

$$m_{\text{eff}}(t) \equiv \ln \left(R(t) + \sqrt{R(t)^2 - 1} \right) \quad (16)$$

$$R(t) \equiv \frac{C(t+1) + C(t-1)}{2C(t)} \quad (17)$$

で定義される有効質量を用いる。もし $C(t) \propto \cosh(-m(t - T/2))$ と振舞っていれば

$$R(t) = \cosh(-m) \quad (18)$$

$$\rightarrow m_{\text{eff}}(t) = \ln(\cosh(-m) + \sinh(-m)) \quad (19)$$

$$= m \quad (20)$$

となるからである。wrap-around term が存在していても同様に有効質量が定義できるがその場合やや煩雑な形式になるのでパイ中間子散乱の議論においては、Newton 法による数値計算から有効質量を決めたのである

結果と解析

有効質量

図 (2), (3), (4), そして (5) に各チャンネルの四点関数の有効質量をまとめた。各図において左一列が $V = 24^3$, そして右一列が $V = 16^3$ の場合のプロットとなっていて, 一行目から下って行くにつれて, $\kappa = 1.52, 1.525, 1.528, 1.531$ と, よりクォーク質量が軽い場合の有効質量に対応している。また各プロットにおいて”4 point function”が四点関数の有効質量に対応し, そして”mass thresholds”とは相互作用が無い場合の2粒子の有効質量の和を意味し, 例えば図 (2) では D_1 と D^* をそれぞれ格子ボックス中に単独で置いた場合の有効質量の和 $m_{\text{eff}, D_1}(t) + m_{\text{eff}, D^*}(t)$ を与えたものである。詳しい議論は次のセクションで行うが, 四点関数の有効質量と mass thresholds を比較することで各チャンネルに引力が見えることがわかる。特に D 中間子の系ではクォーク質量についての依存性が伺える。

それぞれの図を見ると, パイ中間子散乱の際に与えた有効質量と比べて wrap-around effect はほとんど見られないことがわかる。 $\chi_{c1}(1P)\rho$ について $t \sim 20$ 辺りではようやく四点関数の有効質量がカーブを描くのが見える程度である。 $D_1 D^*, D D_0^*$ のチャンネルについても同様の振る舞いが見えるが”mass threshold”のプロットと比較すると各々の1中間子の有効質量がプラトーが崩れたことに起因するものとは有意には区別できないことが判る。 $J/\psi a_1$ に関してはかなり早い時間でプラトーが崩れてしまうので wrap-around effect を議論できる状況ではない。従ってこれらのチャンネルについては wrap-around effect を特に考慮しない。

それぞれの有効質量のプロットにおいて, 基底状態に十分な精度で達していると推定できて, かつプラトーが崩れていない時間範囲を”fit range”として, その範囲で各々の相関関数に χ^2 フィットを施す。その際には励起状態に由来する系統誤差の影響をなるべく押さえ込むために, 四点の相関関数とそれに対応する1中間子状態を記述する2つの二点関数を全て共通の fit range でフィットすることに注意した。

$L \cdot T = 24^4 \cdot 48$ の有効質量については $D_1 D^*, D D_0^*$ のチャンネルについてはかなり早い時間で基底状態に達している。しかし $t \sim 20$ 前後ではプラトーが完全に崩れているのでその領域はなるべく避けて fit range を決定した。 $\chi_{c1}(1P)\rho$ のチャンネルについては wrap-around effect の影響が有意に現れる領域を避けるように fit range を選んだ。 $J/\psi a_1$ は非常に早い時間でプラトーが崩れてしまっているため, 崩れていない時間領域で強引にフィットを行った。この場合, 基底状態に達しているとは非常に考えにくいいため相関関数のフィットから得られる全ての物理量に有意な系統誤差が含まれていると考えなくてはならない。各チャンネル・各クォーク質量についての fit range をどう選んだのかについては次のセクションで与える表 (3) にまとめた。

今回はパイ中間子散乱同様に基底状態のみを考えるので, 時間方向の周期的境界条件から

$$C_{ii}(t) = A \cosh(-m_{ii}(t - T/2)) \quad (21)$$

の関数系でフィットすれば良い。これにより得られた各状態のエネルギー固有値についての議論を次のセクションで行う。

また $L \cdot T = 16^3 \cdot 48$ で測定された相関関数から計算された有効質量に関しては $\chi_{c1}(1P)\rho$ のチャンネルを例外として非常に短時間でプラトーが崩れており, $L = 24$ と同じ fit range でエネルギー固有値を読み取ることは大変難しい。そのため $D_1 D^*, D D_0^*$ の D 中間子系の相関関数については $L \cdot T = 24^4 \cdot 48$ の場合と全くオーバーラップを持たない領域でフィットを行わざるを得なかった。これによって D 中間子系の体積依存性を議論する際には結果の整合性が取れなくなるであろうことが予想される。

$$D_1 D^*$$

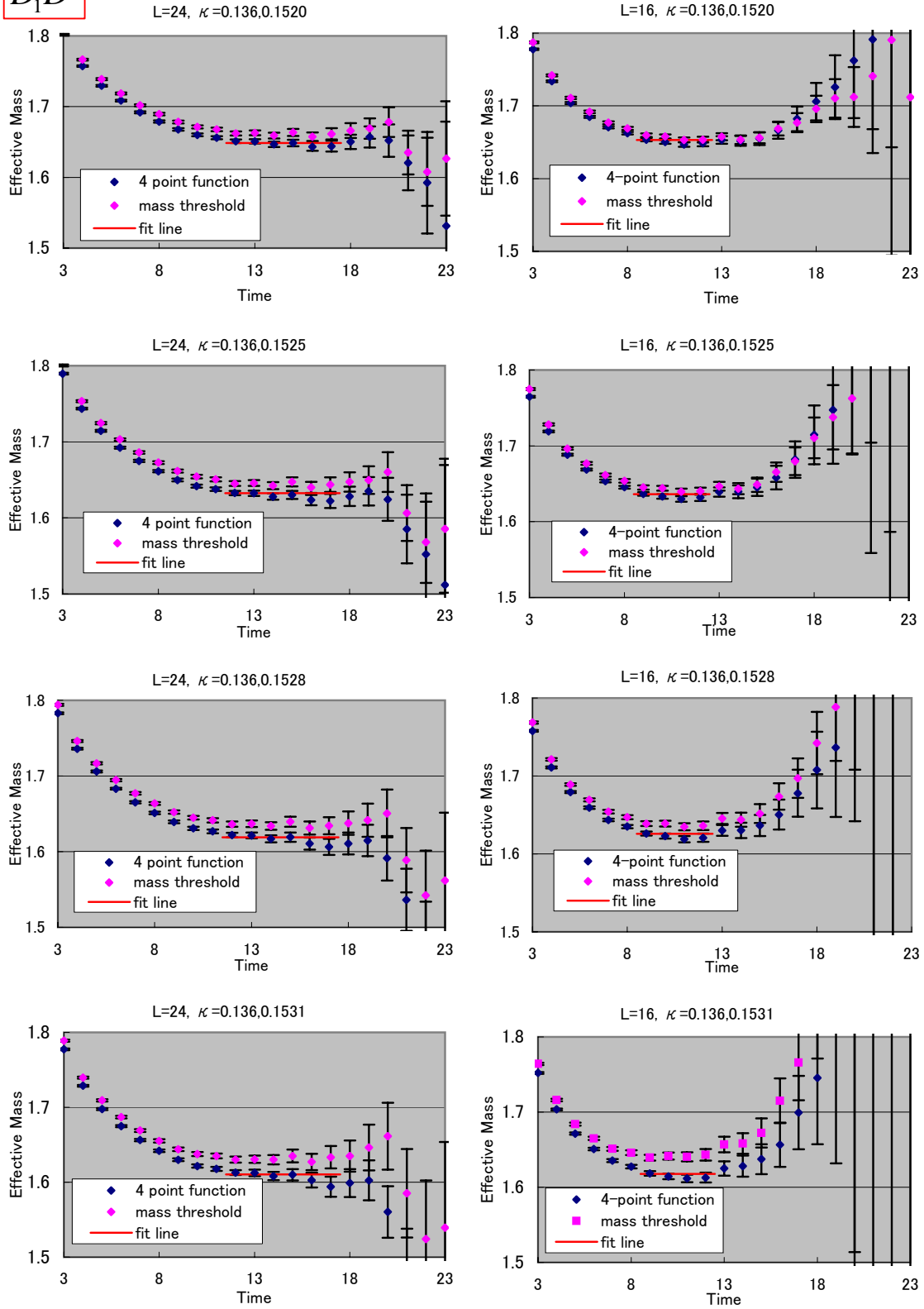


図 2: $D_1 D^*$ の四点関数の有効質量

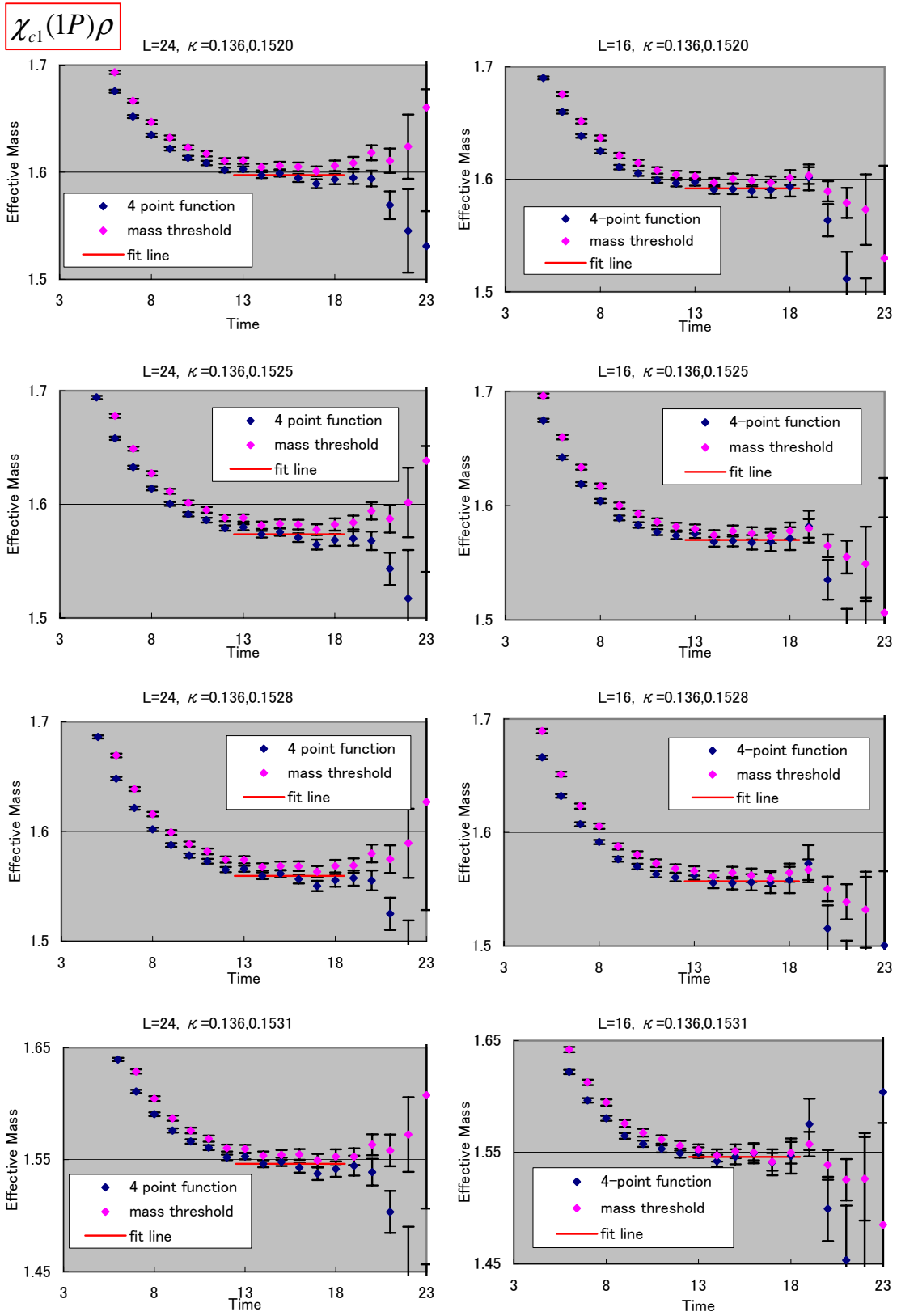


図 3: $\chi_{c1}(1P)\rho$ の四点関数の有効質量

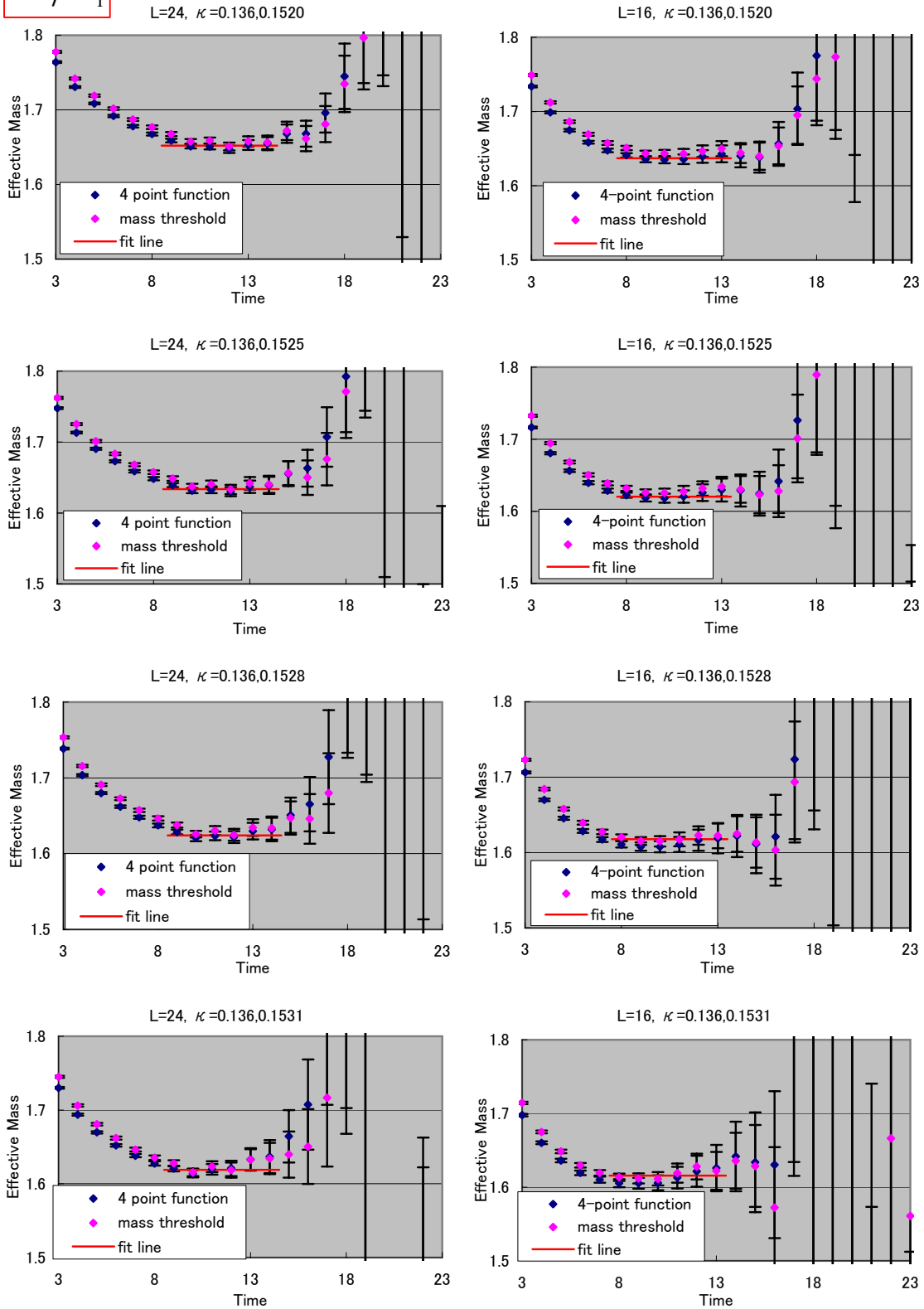
$J/\psi a_1$ 

図 4: $J/\psi \otimes a_1$ の四点関数の有効質量

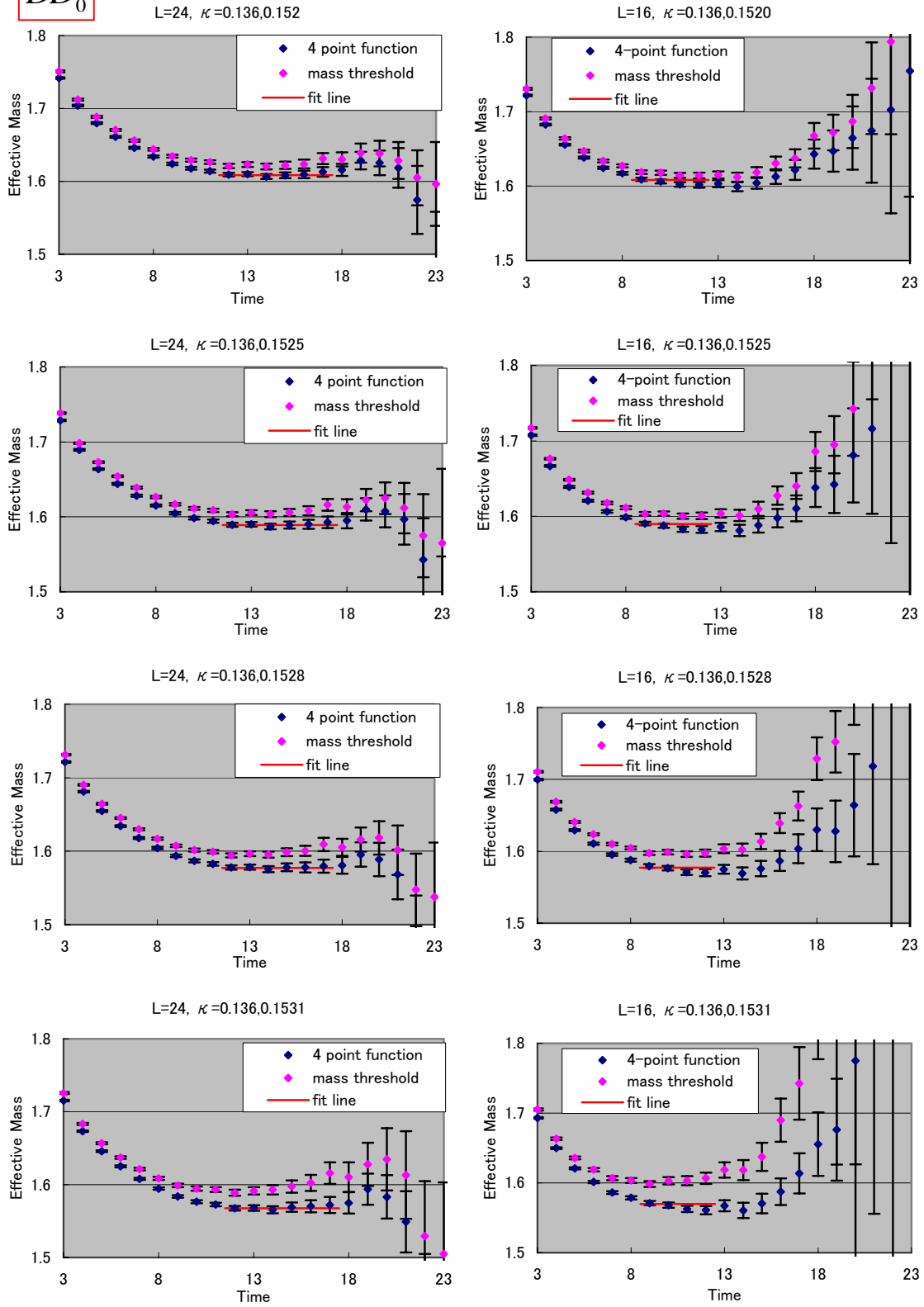
DD_0^* 

図 5: DD_0^* の四点関数の有効質量

表 3: Numerical Results for $V \cdot T = 24^3 \cdot 48$

Channel	κ	N	fit range	$m_{h_1 h_2}$	m_{h_1}	m_{h_2}	δE	η
$D_1 D^*$ ($h_1 = D^*$) ($h_2 = D_1$)	0.1520	2000	12-17	1.6486(30)	0.73390(41)	0.9271(28)	-0.0124(10)	-0.148(12)
	0.1525	2000	12-17	1.6301(35)	0.72383(44)	0.9204(33)	-0.0141(14)	-0.167(16)
	0.1528	1999	12-17	1.6190(39)	0.71784(46)	0.9177(38)	-0.0165(17)	0.194(20)
	0.1531	1993	12-17	1.6103(47)	0.71168(50)	0.9188(48)	-0.0201(25)	-0.236(30)
$\chi_{c1}(1P)\rho$ ($h_1 = \rho$) ($h_2 = \chi_{c1}$)	0.1520	2000	13-18	1.5973(22)	0.37197(66)	1.2338(17)	-0.00846(84)	-0.0706(70)
	0.1525	2000	13-18	1.5736(23)	0.34889(81)	1.2338(17)	-0.0090(10)	-0.0717(80)
	0.1528	1993	13-18	1.5596(24)	0.33490(96)	1.2338(17)	-0.0091(12)	-0.0697(93)
	0.1531	1993	13-18	1.5464(27)	0.3207(12)	1.2337(17)	-0.0080(16)	-0.059(12)
$J/\psi a_1$ ($h_1 = a_1$) ($h_2 = J/\psi$)	0.1520	2000	9-12?	1.6522(32)	0.59178(31)	1.06673(31)	-0.00632(66)	-0.0702(73)
	0.1525	2000	9-12?	1.6338(40)	0.57351(38)	1.06673(31)	-0.00641(82)	-0.0697(89)
	0.1528	1993	9-12?	1.6240(47)	0.56368(46)	1.06673(31)	-0.00638(99)	-0.069(11)
	0.1531	1993	9-12?	1.6191(59)	0.55619(59)	1.06671(31)	-0.0038(17)	-0.041(19)
$D D_0^*$ ($h_1 = D$) ($h_2 = D_0^*$)	0.1520	2000	12-17	1.6085(27)	0.71036(35)	0.9115(28)	-0.01329(96)	-0.155(11)
	0.1525	2000	12-17	1.5890(31)	0.69952(37)	0.9054(34)	-0.0159(13)	-0.183(15)
	0.1528	1993	12-17	1.5773(35)	0.69310(39)	0.9033(39)	-0.0191(16)	-0.218(18)
	0.1531	1993	12-17	1.5676(41)	0.68659(42)	0.9066(49)	-0.0256(23)	-0.292(26)

エネルギー固有値の解析

表 (3) に $L = 24$ の場合の各チャンネル・各クォーク質量における統計数, 2 メソン系のエネルギー, メソン単体の質量, そしてメソン間相互作用の強さの目安となる δE と η の値をまとめた。 δE についてはさらに図 (6) に各々の値を示した。図において横軸はクォーク質量の目安となる $1/\kappa$ であり, $1/\kappa_c$ はカイラル極限に相当する。図表共にエネルギーの次元を持つ物理量は格子単位系で記されている ($m \rightarrow ma$)。 δE の定義はパイ中間子散乱の議論と全く同じであり, 四点の相関関数から導き出される有限の箱の中に 2 粒子を置いたときのエネルギーより 2 粒子の質量を引いた $\delta E (\equiv m_{h_1 h_2} - m_{h_1} - m_{h_2})$ に他ならない。また η とは第二章に登場した (出来れば式番号も振る) 有限体積中でのハドロン散乱を理解する上で重要なパラメータである。今の場合, 2 粒子の換算質量を $\mu (\equiv \frac{m_1 \cdot m_2}{m_{h_1} + m_{h_2}})$ と置くと

$$\eta \equiv \frac{L^2 p^2}{4\pi^2} = \frac{L^2 \mu \delta E}{2\pi^2} \quad (22)$$

で定義される量である。

有効質量を与えた際にも少し触れたが, まず図表より全てのチャンネルにおいて引力が見えることが直ちに判る。特に $D_1 D^*$, $D D_0^*$ というチャームメソン間には比較的強い引力が働いており, カイラル極限に近づいて行くにつれてさらに強く引き合うというクォーク質量依存性の存在が明瞭に見える。一方で $\rho \chi_{c1}(1P)$, $J\psi a_1$ のチャームoniumと軽い中間子間に働く相互作用はチャームメソン間よりもずっと弱い引力がはたらいており, クォーク質量依存性もほとんど見られないことが伺える。

表 4: Numerical Results for $V \cdot T = 16^3 \cdot 48$

Channel	κ	N	fit range	$m_{h_1 h_2}$	m_{h_1}	m_{h_2}	δE	η
$D_1 D^*$ ($h_1 = D^*$) ($h_2 = D_1$)	0.1520	3000	9-12	1.6507(24)	0.73260(55)	0.92430(20)	-0.0062(11)	-0.0328(57)
	0.1525	2999	9-12	1.6337(27)	0.72277(59)	0.92013(24)	-0.0092(14)	-0.0484(72)
	0.1528	2995	9-12	1.6232(29)	0.71693(62)	0.92061(28)	-0.0144(17)	-0.0752(89)
	0.1531	2777	9-12	1.6152(35)	0.71094(69)	0.92934(38)	-0.0251(26)	-0.131(14)
$\chi_{c1} (1P)\rho$ ($h_1 = \rho$) ($h_2 = \chi_{c1}$)	0.1520	3000	13-18	1.5921(34)	0.3693(12)	1.2302(18)	-0.0075(22)	-0.0275(81)
	0.1525	2999	13-18	1.5699(28)	0.3463(15)	1.2301(18)	-0.0066(27)	-0.0231(94)
	0.1528	2995	13-18	1.5570(42)	0.3330(18)	1.2303(18)	-0.0062(31)	-0.021(11)
	0.1531	2777	13-18	1.5458(52)	0.3194(24)	1.2301(19)	-0.0037(41)	-0.012(14)
$J/\psi a_1$ ($h_1 = a_1$) ($h_2 = J/\psi$)	0.1520	3000	9-12?	1.6355(46)	0.5822(41)	1.06158(32)	-0.0083(11)	-0.0403(52)
	0.1525	2999	9-12?	1.6189(58)	0.5652(52)	1.06158(32)	-0.0079(14)	-0.0379(65)
	0.1528	2995	9-12?	1.6085(68)	0.5549(62)	1.06161(32)	-0.0081(16)	-0.0381(73)
	0.1531	2777	9-12?	1.6071(94)	0.5535(86)	1.06171(33)	-0.0081(25)	-0.0382(12)
$D D_0^*$ ($h_1 = D$) ($h_2 = D_0^*$)	0.1520	3000	9-12	1.6062(23)	0.70963(48)	0.9071(21)	-0.01056(92)	-0.0545(48)
	0.1525	2999	9-12	1.5876(26)	0.69904(51)	0.9033(25)	-0.0147(12)	-0.0753(63)
	0.1528	2995	9-12	1.5762(28)	0.69265(54)	0.9047(30)	-0.0211(16)	-0.1072(82)
	0.1531	2777	9-12	1.5678(34)	0.68615(61)	0.9152(41)	-0.0336(26)	-0.171(13)

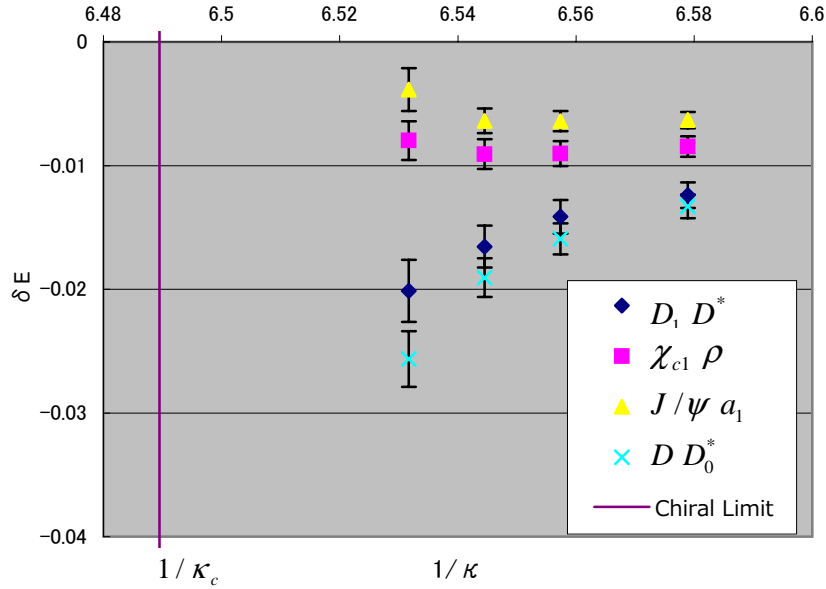


図 6: 各チャンネルにおける E の大きさとそのクォーク質量依存性 ($L=24$)

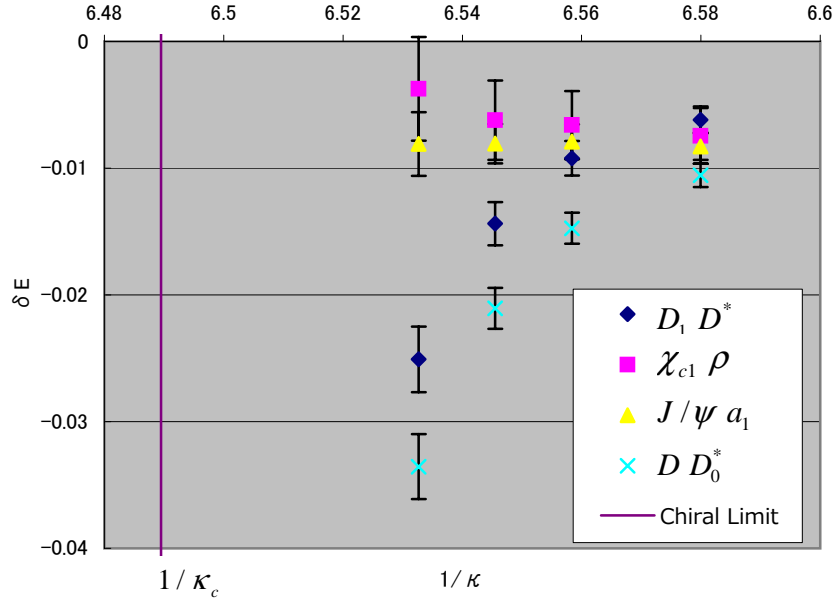


図 7: 各チャンネルにおける ΔE の大きさとそのクォーク質量依存性 ($L=16$)

2章で議論したように散乱長 a_0 と箱の大きさ L の比 a_0/L についての展開形で与えられるルシャーの公式

$$\delta E = -\frac{2\pi a_0}{\mu L^3} \left\{ 1 + c_1 \frac{a_0}{L} + c_2 \frac{a_0^2}{L^2} + O\left(\frac{a_0^3}{L^3}\right) \right\} \quad (\text{この式は 2 章に移転させる予定}) \quad (23)$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\pi} Z_{00}(1, 0) = -2.837297 \\ c_2 = \frac{1}{\pi^2} \{ Z_{00}(1, 0)^2 - Z_{00}(2, 0) \} = 6.375183 \end{cases} \quad (24)$$

の収束半径は δE が負の側では非常に小さいため引力の解析には不適切である。(図 a_0/L を展開形で厳密系と比較した式, 2章で与えた 参照)。本計算においては, 得られた相互作用が非常に強い引力であることから η は収束半径の外に存在している可能性があるため非展開形の公式(2章をレファアーする)

$$p \cot \delta(p) = -\frac{1}{\pi L} S(\eta) \quad (25)$$

$$\eta \equiv \frac{L^2 p^2}{4\pi^2} \quad (26)$$

を用いなければならない。 $S(\eta)$ のグラフから引力側では箱が大きければ大きいほど δE そして η には高い精度が要求されるが, 本計算で用いた箱はそれほど大きくなく, また統計数も大きいので十分な精度で計算できると推測される。

散乱長及び高次の scattering parameter と, 相互作用による位相差との関係式

$$p \cot \delta(p) = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (r_i^2 p^2)^i \quad (27)$$

を合わせると

$$\frac{a_0}{\pi L} = \lim_{L \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \frac{1}{-S\left(\frac{p^2 L^2}{4\pi^2}\right) + \frac{1}{2} 2\pi^2 \frac{2\pi r_0}{L} \left(\frac{pL}{2\pi}\right)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi r_i}{L}\right)^2 \left(\frac{pL}{2\pi}\right)^2\right]^i} \quad (28)$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{-S(\eta) + \pi^2 \frac{2\pi r_0}{L} \eta \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi r_i}{L}\right)^2 \eta\right]^i} \quad (29)$$

$$\sim \frac{1}{-S(\eta)} \quad (30)$$

を得る。ゆえに L が十分に大きく、かつ η が小さければ、 $S(\eta_c) = 0$ を満たす η_c と散乱長が発散する η を同一視することが可能となる。従って η の値からそれぞれの状態を

1. 斥力的な散乱状態
2. 引力的な散乱状態
3. 束縛状態

に分類することが可能となる。そこで得られた η と $a_0/L \sim \left(\frac{1}{\pi} S(\eta)\right)^{-1}$ の交点を図 (9) にまとめた。図において曲線が a_0/L の η についての振る舞いを示し η_c は先ほど与えた散乱長が発散する特異点を示す。図中のプロットは各チャンネル・各クォーク質量における相関関数の解析から得られた η であり、上図は全てのチャンネルの情報を一つにまとめた図、下の四図は各チャンネルについてピックアップしたものである。そして各プロットの誤差は相関関数の統計誤差に由来するものである。図より、 $\chi_{c1}(1P)\rho$, $J/\psi a_1$ のチャーモニウムと軽い中間子の弱い引力が働くチャンネルに関しては $\eta_c > \eta > 0$ という引力的な散乱状態であることがわかる。これらについては式 (30) を用いて各クォーク質量における散乱長の計算を行った。値の提示、及び考察については次のサブセクションで行う。

一方で $D_1 D^*$ と $D_1 D^*$ の D 中間子散乱の比較的強い引力が働くチャンネルにおいては、 $\eta > \eta_c$ を全てのクォーク質量について満たすことが直ちにわかる。これは $D_1 D^*$ と $D_1 D^*$ がそれぞれ束縛状態であることを示唆する。

一般に有限体積中に現れる束縛状態は、 $\eta > \eta_c$ において現れる。すなわち $\eta \sim \eta_c$ が束縛状態を丁度作るエネルギーで、このときが束縛エネルギー $E_b = 0$ に対応する。従って有限体積中で測定された相関関数から読み取られる δE そのものが無限体積中での束縛エネルギーにはならない。また η_c の値自体は箱の大きさに顕著に依存する量であるから、「体積を変化させていったときにエネルギー固有値が変化しない状態が束縛状態である」という主張は厳密には正しくない。メソンやバリオンの 1 粒子状態のように硬く強く束縛しているか、箱の大きさが非常に大きい場合にはこの影響はほとんど無視できる。しかし 2 つのメソンの束縛状態のような緩く弱い相互作用を扱う場合や、箱の大きさがそれほど大きいわけではない場合には有意に影響が出ると考えられる

無限体積と有限体積でどれほどの差が出るかについては式 (26) と束縛条件を作る条件 $\gamma + p \cot \delta(p)|_{p^2 = -\gamma^2} = 0$ より与えられる。

$$-\gamma = \frac{1}{\pi L} S(\eta) \quad (31)$$

右辺の $\eta = \frac{\mu \delta E}{2\pi^2}$ が有限の箱で測定された相関関数から引き出される物理量で左辺の運動量 γ が束縛状態での運

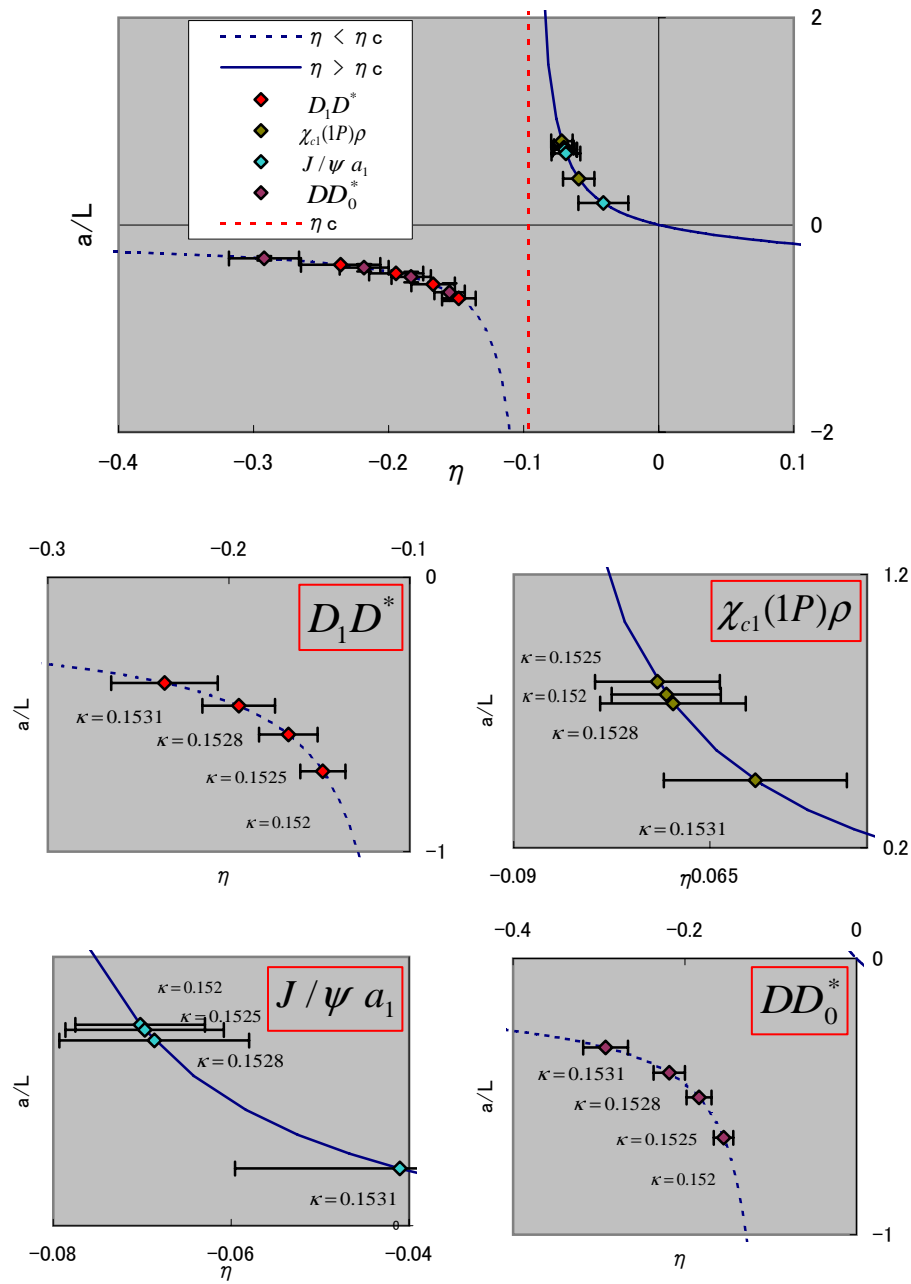


図 8: η の値による各状態の分類 ($L=24$)

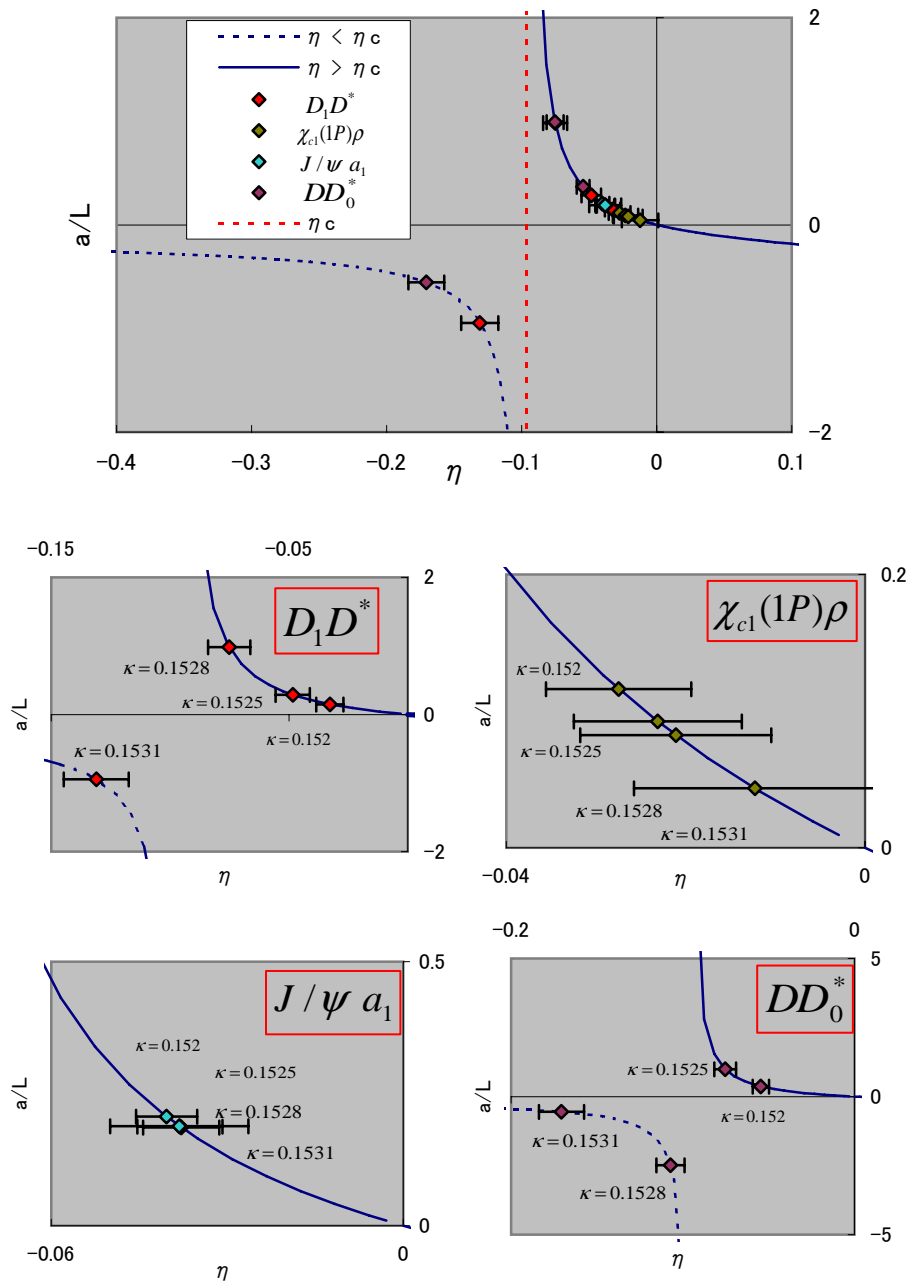


図 9: η の値による各状態の分類 (L=16)

動量を与える。これを用いると束縛エネルギーと格子上で測定されるエネルギーとの関係を記述できる。

$$\eta_b \equiv -\frac{L^2}{4\pi^2}\gamma^2 \quad (32)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^4}S(\eta)^2 \quad (33)$$

$$E_b \equiv -\frac{\gamma^2}{2\mu} \quad (34)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 L^2 \mu} S(\eta)^2 \quad (35)$$

等を得る。が得られる。図 (10) に上式で記述される格子上での測定量と無限体積での物理量の関係を与える。左図が η で書かれた体積に依存しない形でグラフを書いた場合で、右図は $a = 2.8[\text{GeV}]$ 、 $\mu \sim 0.4(D_1 D^*$ の換算質量に相当) を代入し箱の大きさを $L = 16 \sim 1.1[\text{fm}]$ と $L = 24 \sim 1.7[\text{fm}]$ 、そして比較のための $L = \infty(E_b = \delta E)$ と $L = 32 \sim 2.1[\text{fm}]$ にセットされた体積依存性を露わに入れた場合でありのグラフである。どちらの図も横軸が格子上で測定された物理量 η 、 δE に相当し、縦軸がそれを無限体積へと焼き直した値に相当する。

予想通り、有限体積効果に起因する束縛エネルギーのずれは先に議論したように相互作用 γ と箱の大きさ L が小さい場合に大きく寄与することがわかる。

$L = 24$ については十分に相互作用が強ければ δE とはそこまで差は出ないことがわかる。しかし得られた δE の値は $D_1 D^*$ についても、それよりも引力がやや強い DD_0^* でも $\delta E = -30 \sim -60[\text{MeV}]$ 程度であるから、有限体積効果は正しく考慮する必要がある。

$L = 16$ に関しては非常に有限体積効果が大きいため、仮に束縛状態が見えたとしても相関関数から得られる δE と E_b の値には大きくずれが生じることがわかる。 $L = 32$ になれば δE はより速く E_b に収束するが $\delta E = -0.005 \sim -0.01$ ($-15 \sim -30[\text{MeV}]$) の領域では無視できない影響が生じる。

一般に Molecular State とは束縛エネルギーが数 MeV 程度であるとも言われている。もしそのようなものが正しく格子上で観測されたとすれば、それは図 (10) の右図においてほとんど x 軸の近傍に位置するため η_c の体積依存性を露わに受けることになると予想される。したがってこのとき格子上で測定される δE は体積の変化に対して

$$\delta E \propto \frac{1}{L^2} \quad (36)$$

と振舞うと考えるのが自然である。。

カイラル外挿

表 (5) に各チャンネル・各クォーク質量で得られた $\cot \delta$ 、カイラル外挿のためのパイ中間子質量 m_π 、散乱長 a_{a0} 、そして束縛エネルギー E_b を与えた。散乱長と束縛エネルギーに関しては後述するカイラル外挿によって得られた物理的極限 $m_\pi = 140[\text{MeV}]$ での値も与えている。

D 中間子散乱

先ほどの議論を通して得られた、有限体積で測定された相互作用から変換された無限体積での束縛エネルギーに $m_\pi \rightarrow 140[\text{MeV}]$ へとカイラル外挿を施す。 $D_1 D^*$ と DD_0^* のどちらも相互作用の大きさはクォーク質量に対して強い依存性を示している。しかしパイ中間子散乱の議論とは異なり、D 中間子間の相互作用がクォーク質量

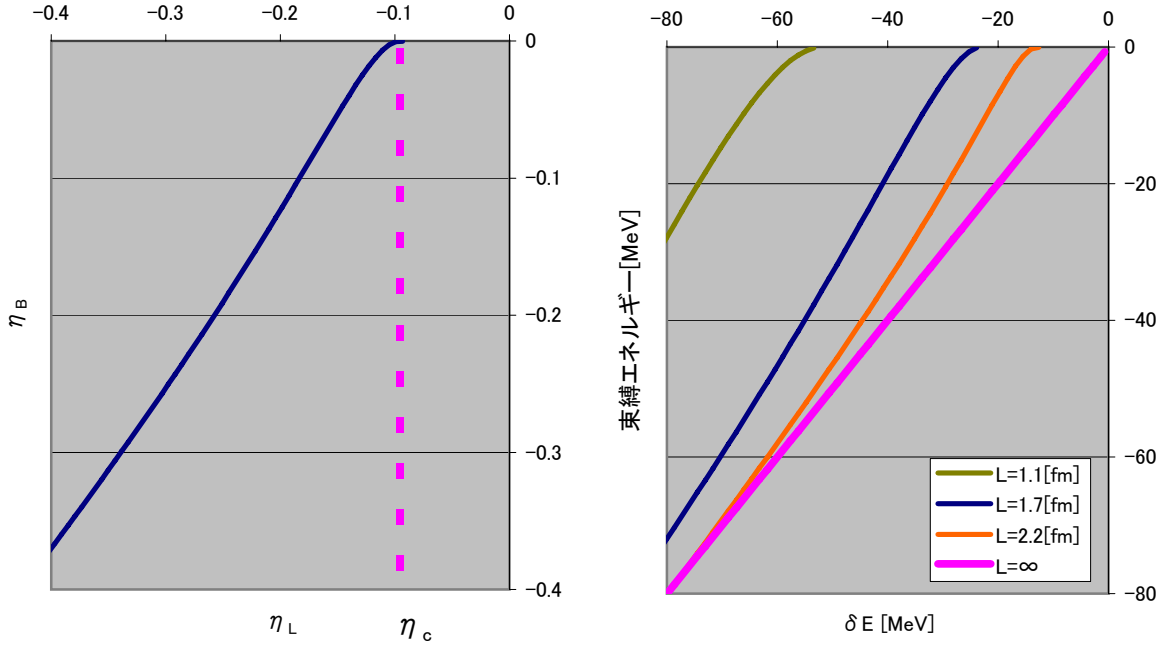


図 10: 束縛エネルギー E_b と格子上で測定される δE の比較

やパイ中間子質量に対してどのように振舞うかは全く未知のものである。そこで D 中間子系については以下で与えられる一次関数での外挿を行った。

$$E_b = c_0 + c_1 m_\pi^2 \quad (c_0, c_1 \text{ は定数}) \quad (37)$$

外挿の結果を与えるグラフを図 (12) に示す。最終的にカイラル外挿によって最終的に以下の束縛エネルギーを得た。

$$E_{b D_1 D^*} = -55 \pm 12 \text{ [MeV]} \quad (38)$$

$$E_{b D D_0^*} = -81 \pm 11 \text{ [MeV]} \quad (39)$$

おおよそ 2[GeV] の質量を持った 2 つの D 中間子に対して、これらの束縛エネルギーはその 3-4% の値に過ぎないのであるから、束縛エネルギーとしてはこれらの値はかなり小さいと言える。

ところが、初めに述べたように $Z(4430)$ を $D_1 D^*$ の分子状態として考えたならばその束縛エネルギーはせいぜい数 MeV であるため、ここで得られた値はそれよりも非常に大きく、不整合であるかのように一見すると考えられる。

しかしながら、先に述べたようにそもそもこの計算は有効距離等の高次の散乱パラメータを完全に無視した議論である。仮にそれらの寄与が有意にあるのならば、束縛状態を作る閾値の η_c にはずれが生じるため、束縛エネルギーもその分だけずれるか、もしくは束縛状態では無い引力的な散乱状態に分類される可能性も十分に存在する。また、この計算はクエンチ近似の下で行われているのでバーチャルなクォークのループの効果は完全に削除されているため、現実世界での相互作用とは食い違いが存在する。従って得られた束縛エネルギーを分子状態としての $Z(4430)$ の束縛エネルギーと定量的に比較することはそこまで意味のある行為ではない。

重要なことは、 $Z(4430)$ と結合する量子数を持った 2 つの D 中間子の間には、そこに与える過程しだいで束

表 5: 解析により得られた物理量

Channel	κ	m_π^2	$p \cot \delta(p)$	a_0	E_{bound}
$D_1 D^*$	0.1520	0.07850(25)	-0.0589(99)	-	-0.0042(14)
	0.1525	0.05997(23)	-0.073(11)	-	-0.0065(19)
	0.1528	0.04815(23)	-0.089(11)	-	-0.0098(24)
	0.1531	0.03555(32)	-0.108(12)	-	-0.0146(33)
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	-	-0.0196(42)
$\chi_{c1}(1P)\rho$	0.1520	0.07850(25)	0.0548(20)	18.3(6.6)	-
	0.1525	0.05997(23)	0.0516(22)	19.4(8.3)	-
	0.1528	0.04815(23)	0.0572(27)	17.5(8.3)	-
	0.1531	0.03555(32)	0.093(47)	10.7(5.4)	-
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	15.3(3.4)	-
$J/\psi a_1$	0.1520	0.07850(25)	0.0558(21)	17.9(6.7)	-
	0.1525	0.05997(23)	0.0572(26)	17.5(7.9)	-
	0.1528	0.04815(23)	0.0604(32)	16.6(8.7)	-
	0.1531	0.03555(32)	0.20(16)	5.1(4.2)	-
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	10.9(3.0)	-
$D D_0^*$	0.1520	0.07850(25)	-0.0642(84)	-	-0.0052(14)
	0.1525	0.05997(23)	-0.0828(85)	-	-0.0087(18)
	0.1528	0.04815(23)	-0.1007(84)	-	-0.0129(21)
	0.1531	0.03555(32)	-0.1292(85)	-	-0.0214(28)
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	-	-0.0287(38)

縛状態を作り得るほどの引力が働くということが本計算によって判ったことである。

チャーモニウム-中間子散乱

チャーモニウム-中間子の系についても、得られた散乱長に対してカイラル外挿を施す。 $k \cot(k) = \frac{1}{\pi L} S(\eta)$ の概形から、 δE の誤差に対して引力の散乱状態は大きな誤差を持つことがわかる。加えて、本計算の精度ではクォーク質量に対する散乱長の依存性はほとんど見られない。従って以下で与えられる定数での外挿を行う。

$$a_0 = c_0 \quad (c_0 \text{は定数}) \quad (40)$$

外挿の結果を与えるグラフを図(11)に示す。最終的にカイラル外挿によって以下の散乱長を得た。

$$a_{0 \chi_{c1}(1P)\rho} = 1.07 \pm 0.24 \text{ [fm]} \quad (41)$$

$$a_{0 J/\psi a_1} = 0.77 \pm 0.21 \text{ [fm]} \quad (42)$$

$$(43)$$

これら、 $\chi_{c1}(1P)\rho$ と $J/\psi a_1$ のチャンネルについても束縛状態を作り得るほどは強くないが、有意な引力が見えたとと言える。

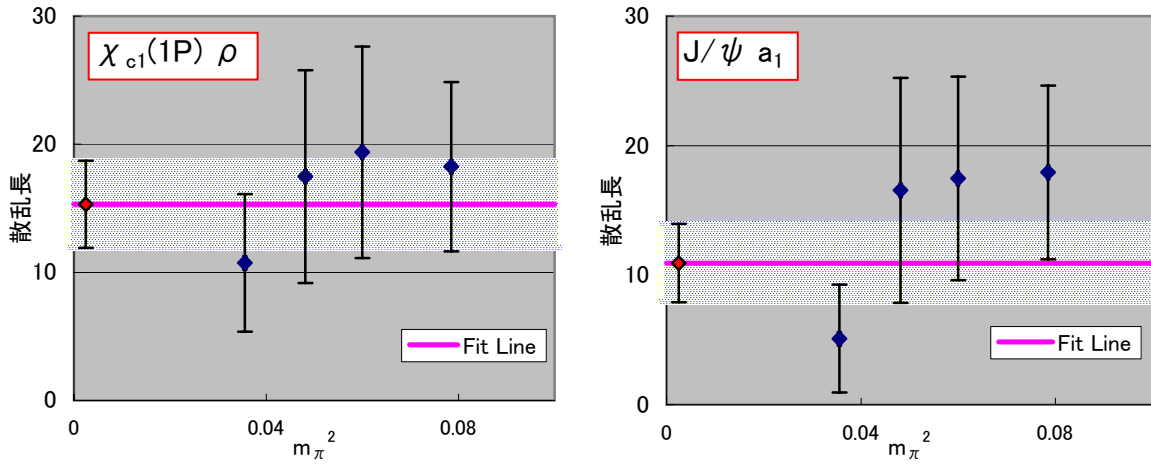


図 11: 散乱長 a_0 のカイラル外挿 横軸がパイ中間子質量 m_π^2 で縦軸が散乱長 a_b である直線が fit line でその周辺の色の付いた部分は 1σ の誤差を示す

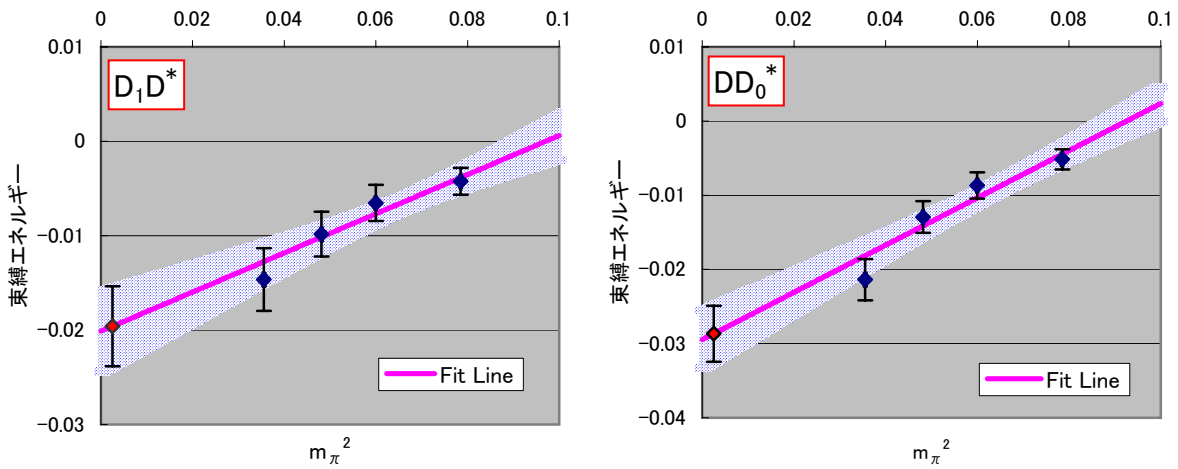


図 12: 束縛エネルギー E_b のカイラル外挿 横軸がパイ中間子質量 m_π^2 で縦軸が束縛エネルギー E_b である直線が fit line でその周辺の色の付いた部分は 1σ の誤差を示す

まとめ

我々はクエンチ近似の元で生成したゲージ配位とウィルソンフェルミオンを用いて、 $I^G(J^{PC}) = 1^+(0^+)$ となる S 波の D 中間子の組み合わせ $D_1 D^*$ の散乱長の計算を行った。このメソンの組み合わせは Belle 実験で見つかったエキゾチックハドロン $Z(4430)$ と期待される弱い束縛状態を作ることが予想されている。また比較のためこれと結合する D 中間子散乱、そしてチャーモニウム-中間子散乱の散乱長の計算も行った。引力側では所謂ルシャアの散乱長 a_0 についての展開公式は破綻しているため、位相差 $\delta(k)$ を計算し $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a_0}$ の関係より散乱長を計算した。

計算の結果、各チャンネルにおいて引力が働いており、特に D 中間子間に働く相互作用はチャーモニウム-中間子散乱に働く引力よりも強く、クォーク質量依存性を持っていることがわかった。そして上記した、位相差から散乱長を求める枠組みにおいては D 中間子散乱のチャンネルに働く相互作用は束縛条件を作る閾値を超えていることが判った。これは D 中間子散乱のチャンネルが、それぞれ束縛状態として存在していることを示唆する。

D 中間子散乱のチャンネルを束縛状態とみなして有限体積中で測定された D 中間子間の相互作用の大きさを無限体積での束縛エネルギーへと変換し、カイラル外挿を行った結果

$$E_{b D_1 D^*} = -55 \pm 12 \text{ [MeV]} \quad (44)$$

$$E_{b D D_0^*} = -81 \pm 11 \text{ [MeV]} \quad (45)$$

という結果を得た。特に $E_{b D_1 D^*}$ に関しては、数 MeV の束縛エネルギーで束縛しているという $Z(4430)$ の $D_1 D^*$ の分子描像を考えるとやや大きい値である。しかしそもそもこの計算クエンチ近似であるため、現実の束縛エネルギーと多少の差があったとしても致命的な問題には成り得ない。

チャーモニウム-中間子散乱のチャンネルについては、各クォーク質量で散乱長を計算しカイラル外挿を施すことによって

$$a_{0 \chi_{c1}(1P)\rho} = 1.07 \pm 0.24 \text{ [fm]} \quad (46)$$

$$a_{0 J/\psi a_1} = 0.77 \pm 0.21 \text{ [fm]} \quad (47)$$

という結果を得た。これらのチャンネルについてはクォーク質量依存性は現在の計算精度ではほとんど見られなかった。

一方で、これらの議論は高次の散乱パラメータ（有効距離など）を完全に無視した議論でありという問題がある。一般に有効距離の寄与を無視できないような場合では、位相差が符号を変える点と散乱長が発散する点は有意にずれてしまう。この問題はノンゼロの運動量を与えて中間子間の相互作用を計算し、より精密に散乱長や高次の散乱パラメータを計算することで解決が可能である。また仮に二つの粒子が束縛状態を作っていてかつその相互作用が十分に小さければ、その束縛エネルギーには本文で与えたような体積依存性が見られるはずであるが、それを確認することは出来なかった。またダイナミカルなゲージ配位を用いることでより現実的な相互作用の元で計算・議論を行うことも必要とされる。これらは我々に課せられたこれからの課題である。

参考文献

- [1] S. K. Choi *et al.* [BELLE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **100**, 142001 (2008) [arXiv:0708.1790 [hep-ex]].
- [2] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **79**, 112001 (2009) [arXiv:0811.0564 [hep-ex]].
- [3] S. Uehara [Belle Collaboration], arXiv:0905.4313 [hep-ex].
- [4] R. Mizuk *et al.* [BELLE Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 031104 (2009) [arXiv:0905.2869 [hep-ex]].
- [5] S. H. Lee, A. Mihara, F. S. Navarra and M. Nielsen, Phys. Lett. B **661**, 28 (2008) [arXiv:0710.1029 [hep-ph]].
- [6] M. E. Bracco, S. H. Lee, M. Nielsen and R. Rodrigues da Silva, Phys. Lett. B **671**, 240 (2009) [arXiv:0807.3275 [hep-ph]].
- [7] S. H. Lee, K. Morita and M. Nielsen, Phys. Rev. D **78**, 076001 (2008) [arXiv:0808.3168 [hep-ph]].
- [8] T. W. Chiu and T. H. Hsieh [TWQCD Collaboration], Phys. Lett. B **646**, 95 (2007) [arXiv:hep-ph/0603207].
- [9] T. W. Chiu and T. H. Hsieh [TWQCD Collaboration], Phys. Rev. D **73**, 094510 (2006) [arXiv:hep-lat/0512029].
- [10] G. Z. Meng *et al.* [CLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 034503 (2009) [arXiv:0905.0752 [hep-lat]].
- [11] S. Prelovsek and D. Mohler, Phys. Rev. D **79** (2009) 014503 [arXiv:0810.1759 [hep-lat]].
- [12] S. Prelovsek, T. Draper, C. B. Lang, M. Limmer, K. F. Liu, N. Mathur and D. Mohler, arXiv:1005.0948 [hep-lat].
- [13] C. W. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], Phys. Rev. D **56**, 7039 (1997) [arXiv:hep-lat/9707008].