

# 実施報告書

- 格子シミュレーションを用いた共形場の理論の研究 -

## 研究組織

### 研究責任者

伊藤 悦子 (いとう えつこ) 大阪大学大学院 理学研究科 助教

### 共同研究者

青山 龍美 (あおやま たつみ) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任准教授

池田 裕章 (いけだ ひろあき) 総合研究大学院大学 大学院生

倉知 昌史 (くらち まさふみ) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任助教

松古 栄夫 (まつふる ひでお) 高エネルギー加速器研究機構 計算科学センター 助教

小川 兼司 (おがわ けんじ) 台湾交通大学 PD 研究員

大木 洋 (おおき ひろし) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任助教

大野木 哲也 (おおのぎ てつや) 大阪大学大学院 理学研究科 教授

新谷 栄悟 (しんたに えいご) RIKEN-BNL Research Center PD 研究員

山崎 剛 (やまざき たけし) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任助教

### 研究の分担

主に、青山・池田・松古・小川・山崎の5名でプログラムのコーディングやクロスチェックを行った。。  
Jobの実行や解析部分は、倉知、伊藤、大木、大野木、新谷で分担した。

## 該当期間の実施報告の詳細

### 研究の背景

本研究の目的は、4次元 large flavor 非可換ゲージ理論 ( $SU(N_c)$ ) の強結合領域の理論のふるまいを調べることである。このような理論は、摂動論的解析を行うと、赤外領域に非自明な相互作用を持つ固定点が存在する (Caswell, 1974)。しかし、この固定点での結合定数の値はフレーバー数によっては強結合領域にあり、固定点の存在と固定点近傍での場の理論の摂動論的解析は信頼できないため、非摂動論的な解析が非常に重要である。

そこで、私たちは非摂動論的手法の一つである格子ゲージ理論のシミュレーションを用いて、running coupling constant を直接測定し、そのような固定点が存在するかどうか調べている。

これに関連する分野の国内外の他の研究グループの現状としては、 $SU(3)$  ゲージ理論に関しては、Appelquist et al. [1] によって、格子上のくりこみスキームの一つである「Schrödinger functional (SF) スキーム」を用いた running coupling constant が測定された。この結果、 $N_f = 8$  の時は結合定数の running にフラットな領域は見られなかったが、 $N_f = 12$  の時は低エネルギー領域で coupling が run しなくなるフラットな領域が存在することが示された。しかし一方で、Kuti et al. は、Wilson loop スキームを用いて renormalized coupling を調べたところ、固定点の存在を示す証拠は見つからなかったと報告している (Lattice2009,2010 に於いて [2])。他にもいくつかのグループが、running coupling constant や理論の相構造を調べる事で、この固定点の存在について研究しているが、特にまだ固定点での結合定数が大きくなる  $N_f = 12$  については、一致した結論がでていない。本来、理論の固定点の存在は、くりこみスキームに依存しないものなので、このようなスキームによって異なる結果がでている現状は大きな問題となっている。違いが現われている最大の原因は、特に連続極限をとるときの系統誤差の評価が異なっている事にあると考えられる。

## 研究内容と独創的な点

私たちは格子上のくりこみスキームとして、他のグループとは全く独立な「Twisted Polyakov Loop (TPL) スキーム」を用いている。このスキームのくりこんだ結合定数は、格子の境界条件で2つの方向に関しリンク変数の twist を行い、twist した方向の Polyakov loop の相関関数と twist していない方向の Polyakov loop の相関関数の比を取る事で定義される。このため、 $O(a/L)$  の格子化誤差が相殺し、比較的小さい系統誤差を与えると予測されるのが利点である。

また、同じく  $O(a/L)$  の格子化誤差のないスキームとして、私たちは論文 [3] で新しい繰り込みスキーム (Wilson loop スキーム) を提案した。このスキームでは、Wilson loop の相関関数の比から繰り込んだ結合定数を定義する。この Wilson loop スキームに、さらに、小さい格子サイズでも有用な結果が得られるように改良した Improved Wilson loop スキームも使い、理論の結合定数の低エネルギー領域での振る舞いに結論を下すのが本研究課題の内容と独創点である。

## 計算方法の概略

固定点の存在を調べるため、ステップスケリングの手法を用いている。その手法は、まず、ある一定の renormalized coupling ( $u = g^2(\mu)$ ) を与える格子パラメータ ( $L/a, \beta$ ) の組を求める。そして、それぞれ  $\beta$  を固定し、格子サイズを  $s$  倍した時の step scaling function  $\Sigma(u, s, a/sL) = g^2(\beta, sL/a)|_{g^2(\beta, a/L)=u}$  を測定する。そして、最後に得られた step scaling function の連続極限を取る。

$$\sigma(s, u) = \lim_{a \rightarrow 0} \Sigma(u, s, a/sL)|_{g^2(L)=u}. \quad (1)$$

これによって、エネルギースケールを  $1/s$  倍にしたときの coupling constant ( $\sigma(u) = g^2(\mu/s)$ ) を測る事ができる。現在までの研究で、この coupling constant を小さい誤差で求めるためには、それぞれのデータが統計誤差 2% 以下になるまでシミュレーションを行う必要がある事がわかった。このためには、高い  $\beta$  の領域で 5 万モンテカルロ・トラジェクトリー以上、低い  $\beta$  の領域で 10 万トラジェクトリー以上の統計が必要であることも分かっている。

## シミュレーションの現状と結果

### SU(3) $N_f = 12$ fundamental fermion の場合

TPL スキームでの running coupling の測定に関して、2009 度の研究課題であった  $L/a = 16$  のゲージ配位生成を KEK のスーパーコンピュータ (SR1100, Blue Gene) を用いて、各  $\beta$  に対して約 10 万 Trj. シミュレーションを行った。さらに、これまでに  $L/a = 4, 6, 8, 10, 12$  について、基礎物理学研究所、大阪大学核物理研究センターのスーパーコンピュータを用いて、各パラメータに対して約 2% の統計精度で  $4.0 \leq \beta \leq 30$  の領域のゲージ配位をほぼ生成し終わった。そのデータを図 1 に示す。

このデータを用い、ステップスケリングの方法で解析を行った。具体的にはステップスケリングパラメータ ( $s = 2$ ) とし、小さい格子サイズの組として  $L/a = 4, 5, 6, 8$ 、大きい格子サイズの組として  $L/a = 8, 10, 12, 16$  を用いた。ただし、 $L/a = 5$  については、内挿を使ってデータを得た。

これらのデータを用いてステップスケリングを従い、様々な  $u$  の値にして  $\sigma(u)$  を測定し、renormalized coupling の成長率 ( $\sigma(u)/u$ ) を調べた。その過程で、連続極限を取るときに、 $L/a = 8, 10, 12, 16$  の 4 点に対して  $(a/L)^2$  の線形関数で取る方法と、 $L/a = 10, 12, 16$  の 3 点に対して定数フィットを取る方法を用い、その 2 つの比較を行った (図 2)。この 2 つの方法で得られた連続極限での renormalized coupling の差が、系統誤差となる。これをみると、特に低エネルギーで系統誤差は非常に大きく、固定点の存在に関し今の段階で結論を得ることはできない事が分かった。しかしながら、このように SU(3)  $N_f = 12$  の理論で連続極限の取り方の差による系統誤差を明確に示した研究は本研究が初めて

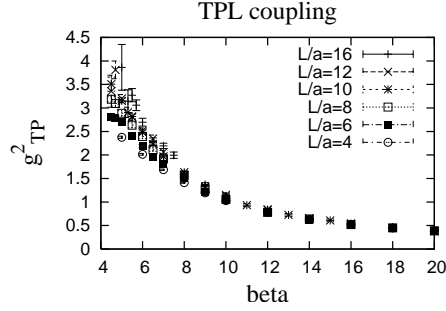


図 1: 各  $\beta, L/a$  における、TPL renormalized coupling の振る舞い (SU(3)  $N_f = 12$ )

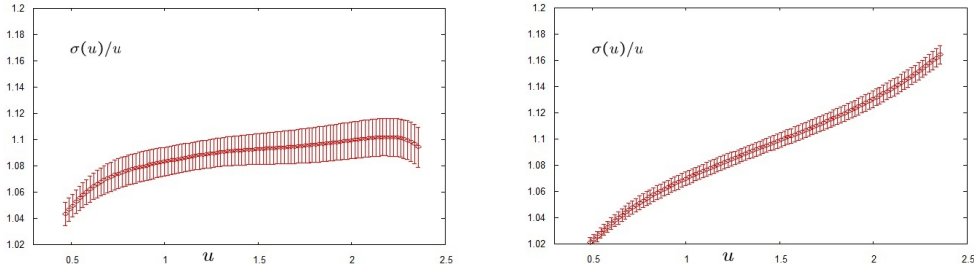


図 2: 結合定数の成長率。左図は線形関数、右図は定数フィットによる連続極限を取った場合の結果。

であり、図 2 は Lattice 国際会議の Plenary talk で引用されるなど、強い印象を与えた [4]。

今後の課題は、この系統誤差を小さくし、固定点の存在に関して結論を下すことにある。この大きな系統誤差の原因の一つは、低エネルギー領域で  $L/a = 4$  に含まれる離散化誤差が大きい事である。今後は、この離散化誤差の大きな  $L/a = 4$  のデータを用いず、 $(a/L)^2$  の効果も考慮した連続極限を取るために、 $L/a = 18$  のシミュレーションが不可欠であることがわかった (下の SU(2) の場合を参照)。

### SU(2) $N_f = 8$ fundamental fermion の場合

SU(2) ゲージ理論の場合は、TPL スキームと Improved Wilson loop スキームの両方のスキームについて同時にシミュレーションを行っている。現在までに  $L/a = 4, 6, 8, 10, 12, 14$  については、基礎物理学研究所と核物理研究センターのスーパーコンピュータを用いてのシミュレーションをほぼ終えた。 $L/a = 16, 18$  に関しては KEK のスーパーコンピュータ (SR) を用いたシミュレーションを行っている段階であり、目標としている統計精度は 1% である。

図 3 の左図は Improved Wilson loop スキーム、右図は TPL スキームでの各  $\beta, L/a$  における renormalized coupling の値である。このシミュレーション結果は同じ統計での比較である。この図から Improved wilson loop スキームの方が、TPL スキームより統計揺らぎの小さな観測量である事がわかった。

SU(3) の場合と比較し、SU(2) では  $L/a = 18$  のシミュレーションも行っているため、ステップスケールリングで連続極限を取る際  $L/a = 4$  を使わず  $(a/L)^2$  の評価をすることができる。そこで、ステップスケールリングパラメータ  $s = 1.5$  とし、小さい格子サイズとして  $L/a = 6, 8, 10, 12$ 、大きい格子サイズとして  $sL/a = 9, 12, 15, 18$  としステップスケールリングを行った。また、統計精度も 1% と小さく

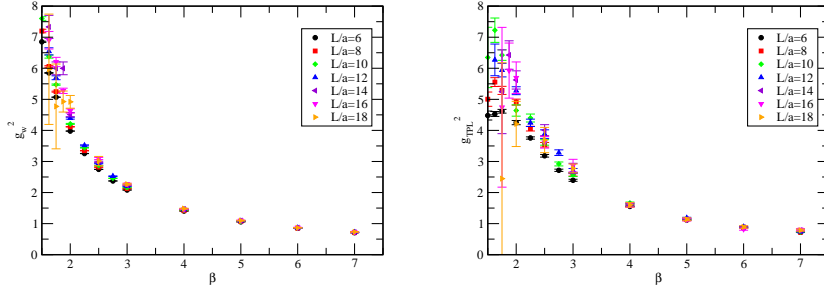


図 3: 各  $\beta, L/a$  における Improved Wilson loop スキーム (左) と TPL スキーム (右) の renormalized coupling の振る舞い ( $SU(2) N_f = 8$ )

しているため、 $(a/L)^2$  のスケーリングを良く見る事ができる。この様子を図 4 に示した。ここで、青い線は  $L/a = 9, 12, 15, 18$  の 4 点を  $(a/L)^2$  の 2 次関数で外挿した場合、赤い線は  $L/a = 12, 15, 18$  の 3 点を 1 次関数で外挿した場合であり、この 2 つの連続極限での差 (系統誤差) が非常に小さくなっていることがわかる。

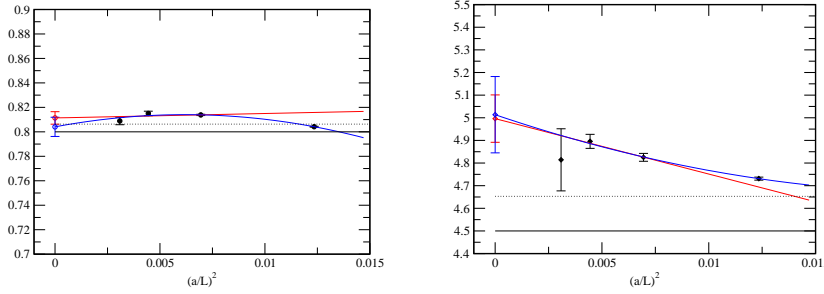


図 4: ステップスケーリング関数の連続極限の様子。実線は input となる renormalized coupling の値 ( $u$ )。点線は摂動論 2-loop の結果。青線は 4 点を 2 次関数、赤線は連続極限に近い 3 点を 1 次関数で外挿した結果。

現在までの所、低エネルギー領域ではまだ統計精度が足りず、この 2 次関数による外挿と 1 次関数による外挿が比較できないため、固定点の存在については結論が得られていない。しかし、図 5 で示したように、高エネルギー領域ではこの系統誤差が非常に小さく、今後、 $L/a = 16, 18$  についてさらにシミュレーションを行えば、 $O((a/L)^2)$  の系統誤差まで評価した running coupling constant の振る舞いを見ることができると期待される [5]。

## 参考文献

- [1] T. Appelquist, G. T. Fleming and E. T. Neil, Phys. Rev. D **79** (2009) 076010 [arXiv:0901.3766 [hep-ph]].
- [2] Z. Fodor, K. Holland, J. Kuti, D. Nogradi and C. Schroeder, arXiv:0911.2934 [hep-lat].

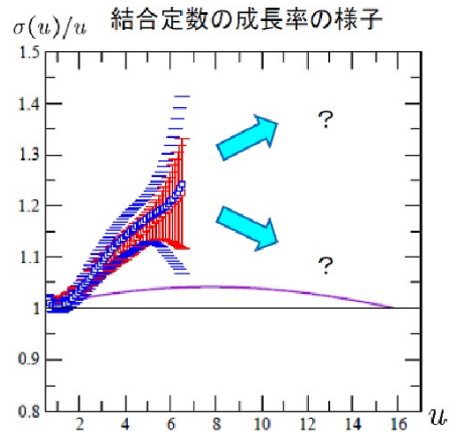


図 5: 結合定数の成長率の様子。青線は 2 次関数、赤線は 1 次関数で外挿した場合の結果。

- [3] E. Bilgici *et al.*, Phys. Rev. D **80** (2009) 034507 [arXiv:0902.3768 [hep-lat]].
- [4] E. Itou *et al.*, arXiv:1011.0516 [hep-lat].
- [5] H. Ohki *et al.*, arXiv:1011.0373 [hep-lat].