

実施報告書 (大型 09-15)

クォーク閉じ込め機構の格子上の新しい定式化による研究

1 研究組織

- 柴田章博 (しばたあきひろ) [研究代表]
高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・研究機関講師
- 近藤慶一 (こんどうけいいち)
千葉大学大学院・理学研究科・教授
- 加藤清考 (かとうせいこう)
高松工業高等専門学校・一般教育科・準教授
- 伊藤祥一 (いとうしょういち)
長野工業高等専門学校・電子情報工学科・準教授
- 福井伸行 (ふくいしのぶゆき)
千葉大学大学院・理学研究科・物理コース D1

2 はじめに

われわれは、非線形変数変換に基づく格子上の Yang-Mills (YM) 理論の新しい定式化を提唱した。SU(2)YM 理論では、連続極限で Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov (CFNS) 分解を与える格子ゲージ理論として構成することができる [1][2]。格子上では YM 場 $U_{x,\mu}$ のゲージに依存することなく分解 $U_{x,\mu} = X_{x,\mu} V_{x,\mu}$ を与える。この分解はノンアーベリアン・ストークスの定理を加味すると、Wilson ループ期待値に直接効く自由度 $V_{x,\mu}$ と残りの自由度 $X_{x,\mu}$ に分離することに対応する。 $V_{x,\mu}$ で構成される Wilson ループから計算されるポテンシャルで、 $U_{x,\mu}$ のポテンシャルが尽くされる V-ドミナンス (“アーベリアン”ドミナンス) をゲージに依存することなく示すことができる [10]。また、 $V_{x,\mu}$ のホッジ分解から構成されるゲージ不変なモノポールを定義することができ、クォーク・反クォーク間の弦張力 (string tension) を再現する、磁氣的モノポール・ドミナンスが示される。SU(N) ($N \geq 3$) の定式化は SU(2) の拡張として与えられる [4]。特筆すべきは、SU(3) においては、2種類の分解が可能であり、従来の最大可換 (MA) ゲージにおけるアーベリアン射影に対応する最大トラス群 $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal case と呼ぶ) の場合 [5]、 $\tilde{H} = U(2)$ (minimal case と呼ぶ) の場合 [6] について格子上の実装を行い、シミュレーションによって “アーベリアン”・ドミナンス及びモノポールドミナンスを示した。

3 変数分解と磁氣的モノポール

$SU(2)$ YM 理論の場合, 連続理論の Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov (CFNS) 分解 $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$ をリンク変数の積 $U_{x,\mu} = X_{x,\mu}V_{x,\mu}$ に分解する [1][2].

$$U_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu A_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon\mathbb{A}_{x',\mu}), \quad (1)$$

$$V_{x,\mu} = \exp(-ig \int dx^\mu V_\mu(x)) = \exp(-ig\epsilon\mathbb{V}_{x',\mu}), \quad (2)$$

$$X_{x,\mu} = V_{x,\mu}^\dagger U_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon\mathbb{X}_{x,\mu}) \quad (3)$$

ここで, フルのゲージ変換性をもたせるために $V_{x,\mu}$ は $U_{x,\mu}$ と同じリンク $\langle x, x + \hat{\mu}\epsilon \rangle$ 上の変数として, $X_{x,\mu}$ は格子点上の変数として定義され, 随伴ゲージ変換する. 連続理論の変数との対応は, $\mathbb{A}_{x',\mu}, \mathbb{V}_{x',\mu}$ をリンクの midpoint $x' = x + \epsilon/2\hat{\mu}$ の変数として, $\mathbb{X}_{x,\mu}$ は格子点での変数として与える.

YM 場の変数の CFNS 分解は, カラー場 $\mathbf{n}_x = n_k \sigma^k / 2$ (σ^k はパウリ行列, n_k は単位ベクトル) を導入して, 連続理論と対応する次の定義方程式によって与えられる.

$$D_\mu^\epsilon[V_{x,\mu}] \mathbf{n}_x := \frac{1}{\epsilon} (V_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu} - \mathbf{n}_x V_{x,\mu}) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Tr}(X_{x,\mu} \mathbf{n}_x) = 0. \quad (5)$$

ここで, $D_\mu^\epsilon[V_{x,\mu}] \mathbf{n}_x^{(k)}$ は, $V_{x,\mu}$ を背景場に持つ格子上の共変微分である. 定義方程式の解は $(U_{x,\mu}, \mathbf{n}_x)$ の組を用いて与えられる.

$$\tilde{V}_{x,\mu} = U_{x,\mu} + 4\mathbf{n}_x U_{x,\mu} \mathbf{n}_{x+\mu}, \quad (6)$$

$$V = \tilde{V}_{x,\mu} / \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{V}_{x,\mu} \tilde{V}_{x,\mu}^\dagger)}, \quad (7)$$

$$X_{x,\mu} = U_{x,\mu} V_{x,\mu}^\dagger. \quad (8)$$

新しい変数で書かれた理論が元々の YM 理論と等価な理論となるために, カラー場の導入によって拡大されたゲージ対称性を YM 理論の対称性と一致させるための reduction 条件を導入する. reduction 条件は, 与えられた YM 場に対して汎関数

$$F_{\text{Red.}}[\mathbf{n}_x; U_{x,\mu}] = \sum_{x,\mu} \text{tr} \left((D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{n}_x)^\dagger (D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{n}_x) \right) / \text{tr}(\mathbf{1}). \quad (9)$$

を最小にするようなカラー場を与える:

$$F_{\text{Red.}}[\mathbf{n}_x^{(sol)}; U_{x,\mu}] = \min_{\mathbf{n}} F_{\text{Red.}}[\mathbf{n}_x; U_{x,\mu}]. \quad (10)$$

ノンアベリン・ストークスの定理との対応によってゲージ不変な磁氣的モノポールが導出される. 基本表現のクォークに対する Wilson ループオペレータは次で与えられる [7] (格子上の CFNS

分解との対応は [8] を参照) .

$$\begin{aligned}
W_C[\mathbf{A}] &= \text{tr} \left[P \exp \left(ig \oint_C dx^\mu \mathbf{A}_\mu(x) \right) \right] / \text{tr}(\mathbf{1}) \\
&= \int d\mu[\xi]_\Sigma \exp \left\{ ig \int_{\Sigma: \partial\Sigma=C} dS^{\mu\nu} F_{\mu\nu}[\mathbf{V}] \right\} \\
&= \int d\mu[\xi]_\Sigma \exp \{ ig(k, \Xi_\Sigma) + ig(j, N_\Sigma) \}, \tag{11}
\end{aligned}$$

またそれぞれの記号は, F は 2-form の field strength, $k := \delta^* F$, $j := \delta F$, $\Xi_\Sigma := \delta^* \Theta_\Sigma \Delta^{-1}$, $N_\Sigma := \delta \Theta_\Sigma \Delta^{-1}$ であり, $\Delta = d\delta + \delta d$ は 4 次元ラプラシアンである. また Θ_Σ は, Wilson ループ C を境界に持つような面 $\Sigma : \partial\Sigma = C$ で定義される vorticity tensor $\Theta_\Sigma^{\mu\nu} = \int_\Sigma dS^{\mu\nu} (X(\sigma)) \delta(x - X(\sigma))$ である. ここに現れる変数 $\mathbf{V}_\mu(x)$ は CFNS 分解で与えられる $\mathbb{V}_{x,\mu}$ と等価で, 連続極限で次のように与えられる.

$$\mathbb{V}_{x',\mu}(x) = \text{tr}(\mathbb{A}_{x',\mu} \mathbf{n}_{x'}) \mathbf{n}_{x'} + \frac{1}{ig} [\partial_\mu \mathbf{n}_{x'}, \mathbf{n}_{x'}] + O(\epsilon^2). \tag{12}$$

格子上では, field strength $F_{\mu\nu}[\mathbf{V}]$ はリンク変数 $V_{x,\mu}$ によるブラケットで与えられる. 磁気的カレント $k_{x,\mu}$ は, $F_{\mu\nu}[\mathbf{V}]$ のホッジ分解として与えられる. Wilson loop の磁気的モノポールパート $W_C[k]$ は, リンク変数 $V_{x,\mu}$ を用いて次のように与えられる.

$$\Theta_{\alpha\beta}[V] = - \arg \text{tr} \left((\mathbf{1} + \mathbf{n}_x) V_{x,\alpha} V_{x+\alpha,\beta} V_{x+\beta,\alpha}^\dagger V_{x,\beta}^\dagger \right) \tag{13}$$

$$k_{x,\mu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} \partial_\lambda \Theta_{\alpha\beta}[V], \tag{14}$$

$$W_C[k] = \exp \left(i \sum_{x,\mu} k_{x,\mu} \Xi_{x,\mu} \right). \tag{15}$$

ここで定義により $\Theta_{\alpha\beta}$ はゲージ不変であり, ゲージ不変な磁気的なモノポールカレント $k_{x,\mu}$ が導出された.

図 1 は, YM 場 ($U_{x,\mu}$), CFNS 分解した場 ($V_{x,\mu}$), 磁気的モノポール ($k_{x,\mu}$) それぞれで測ったクォーク・反クォーク間の静的ポテンシャルである. string tension の“アーベリアン”ドミナンス $\sigma(V)/\sigma(\text{full}) \approx 94\%$, モノポールドミナンス $\sigma(\text{mono})/\sigma(V) \approx 93\%$ を示している. このことは, クォークと閉じ込めに磁気的モノポールが支配的な役割を果たしていることを示唆する [1][10].

4 モノポールの解析

YM 理論の新しい定式化によって, YM 場から, 閉じ込めに支配的な役割を果たす場の自由度の抽出及び, 磁気的モノポールをゲージに依存することなく抽出することができる. 格子上の磁気的モノポールカレントは, 量子化された値 $k_{x,\mu} = 2\pi n_{x,\mu}$, $n_{x,\mu} = 0, \pm 1, \pm 2$ をとる. 非ゼロのカレント片 $n_{x,\mu}$ は, 双対格子 ($\hat{\mu}\epsilon/2$ だけ格子点をずらした, 4 次元正方体の中心を格子点とする格子) の格子点を頂点とし, 格子点を結ぶリンクを辺とする向付グラフと対応づけることができる. また, 定義式 (14) からカレントの保存則が成立する.

$$\epsilon \partial_\mu k_{x,\mu} = 2\pi \sum_{\mu=1}^d (n_{x,\mu} - n_{x-\mu,\mu}) = 0. \tag{16}$$

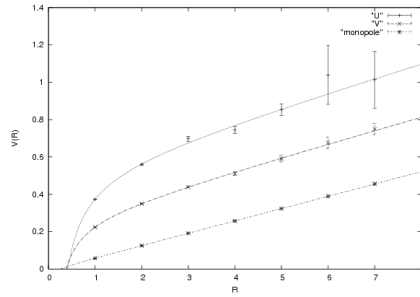


図 1: クォーク・反クォーク間の静的ポテンシャル。それぞれは、YM 場 (上)、V 場 (中)、モノポール (下) のウィルソンループを用いて計算された。

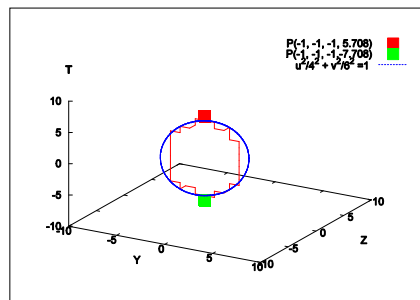


図 2: YM 場の two meron 解からのモノポールの抽出。4 次元空間を 3 次元空間に射影して描画している。 $(x, y, z, t) \rightarrow (y, z, t)$ 。図中の四角は、キャップをつけて修正した meron (topological charge $1/2$) の配置を示す。トポロジカルチャージ密度は、四角に示したところに鋭いピークを持つように局在している。磁気モノポールは、meron を貫くような円として検出される。(モノポール・ループは、ガイドの円と伴に可視化した。)

これは双対格子の格子点に、流入する辺と流出する辺の数が等しく、湧き出し点及び吸収点がないことを示す。即ち、モノポールカレントは双対格子点で衝突点をもつループなす。($n_{x,\mu} = \pm 2$ のカレント片は、2 つのモノポールカレント衝突グラフであると解釈できる。) Wilson loop のモノポールパート (式 13) は、ウィルソンループ C を淵とする面 $\Sigma: \partial\Sigma = C$ とモノポールループの作る絡み数 (ガウスの絡み数公式の 4 次元版) で表される [7]。したがって、YM 場の配位から直接モノポール・ループを抽出し、幾何学的観点から解析できる。シミュレーションのデータの解析では、35000 リンク ($\beta = 2.4, 24^4$ の格子の場合) で磁気的モノポールの配位が構成されるため、計算ホモロジーのソフトウェアを導入し、代数的な処理によって解析を進めている [11]。

図 2 は、two-meron 解に対しての磁気的モノポールの抽出例を示す。two-meron に対しては、解析的に解が得られており [9]、有限体積を持つ格子上の解析によっても同様のモノポール・ループが検出されることが確かめられた。また、図 3 はシミュレーションデータからのモノポールの抽出の例を示す。

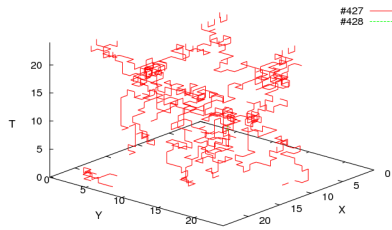


図 3: lattice データからの抽出された巨大モノポールループの例。 24^4 の周期的境界条件を持つ箱を可視化しており、壁を突き抜けたグラフは、反対側の壁のグラフとつながるループをなしている。

5 まとめ

YM理論の格子上の新しい定式化によって、クォーク閉じ込めに寄与する自由度をゲージに依存することなく抽出し、双対超電導の描像に基づいた解析ができることを示した。string tension が磁氣的モノポールで説明され、クォーク閉じ込め機構の双対超電導の描像に基づいた理解のために、磁氣的モノポールのはたす役割の解析が重要である。新しい定式化によって、任意のYM場の配位から磁氣的モノポールをゲージに依存するとなく抽出し、幾何学的な観点から解析できることを示した。

参考文献

- [1] S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, Phys.Lett. B645 67-74 (2007)
- [2] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, Phys.Lett. B653 101-108 (2007)
- [3] Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Prog.Theor.Phys.120 1-50 (2008), CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th]
- [4] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat], Phys.Lett.B669:107-118,2008
- [5] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-166, KEK-PREPRINT-2007-50, POS(LATTICE-2007)331, arXiv:0710.3221 [hep-lat];
- [6] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Seikou Kato, Shoichi Ito, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, PoS(LATTICE 2008)268
- [7] K.-I. Kondo, Phys.Rev.D77 085029 (2008) (arXiv:0801.1274 [hep-th])
- [8] K.-I. Kondo and A. Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]

- [9] K.-I. Kondo, N. Fukui, T. Shinohara, A. Shibata, Phys.Rev.D78:065033,2008.
- [10] S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata and T. Shinohara, talk given at The XXVII International Symposium on Lattice Field Theory, (lattice 2009), to be published in PoS(LAT2009)228.
- [11] A. Shibata, K.-I. Kondo, S. Kato, and T. Shinohara, talk given at The XXVII International Symposium on Lattice Field Theory, (lattice 2009), to be published in PoS(LAT2009)232.