実施報告書（大型 10-13）
クォーク閉じ込めに支配的な役割を果たす位相配位の数値的研究

柴田章博
高エネルギー加速器研究機構計算科学センター

1 研究組織

- 柴田章博（しばたあきひろ）[研究代表]
  高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・研究機関講師
- 近藤慶一（こんどうけいいち）
  千葉大学・理学部物理学科・教授
- 加藤清考（かとうせいこう）
  福井工業高等専門学校・一般教育科・准教授
- 伊藤祥一（いとうしょういち）
  長野工業高等専門学校・電子情報工学科・准教授

2 研究の概要

双対超伝導描像は，クォーク閉じ込めを理解する最も魅力的かつ有力なシナリオである．随伴 Higgs 場を含まない Yang-Mills 理論や QCD において，双対マイスナー効果を引き起こすためには、磁気的モノポールが重要な役割を果たしていることを示さなければならない。これまでにも、多くの研究がなされ，双対超電導描像を示唆することが格子ゲージ理論に基ずくシミュレーションによって示されている。しかしながら、これまでの方法ではMAゲージやラプラシアンゲージなどの特定なゲージ固定を必要としており、特別な仮定を設けずに Yang-Mills 理論からゲージ不変な双対超伝導描像が得られること、すなわちゲージ不変な磁気モノポール配位が閉じ込めに支配的な寄与をもたらすことを立証することが求められる。

本研究では、これらの困難を解決し双対超伝導描像を確立するため、クォーク閉じ込めに主要な役割を果たす位相的配位を特別なゲージ固定に依らずに抽出できるような新しい定式化を提唱し、その枠組みで，いかなる位相的配位がクォーク閉じ込めに支配的に効くのかを精査する。 $SU(2)$ Yang-Mills 場においては、Cho-Faddeev-Niemi-Chabanov (CFNS) 分解の格子ゲージ理論版の定式化を行い、その拡張として $SU(N)$ Yang-Mills 場における定式化を行った [1][2]。論文 [3] では、

$SU(N)$ Yang-Mills 場のリンク変数による厳密な分解方程式の解を与え、閉じ込めに寄与する位相的配位をゲージに依存することなく抽出することが可能となった。また、ノンアーベリアン・ストークスの定理との関係を議論することで [6][7]、 分解で得られた変数を用いてゲージ不変な磁気的モノポールを抽出でき、閉じ込めに果たす役割を調べることができる。本研究では、$SU(3)$ minimal option における解析を行い、双対超電導描像による閉じ込め機構について調べる。

3 計算の概略

$SU(3)$ pure Yang-Mills の Wilson 作用に対する配位を、標準的なアルゴリズムを用いて生成し、格子上の非線形変数はリンク変数の分解 $U_{x,\mu} = X_{x,\mu}V_{x,\mu}$ を行うことで、クォーク閉じ込めに効くゲージ不変な位相的配位を抽出する。変数分解は、導入した随伴変換するカラー場 $\mathbf{h}_x = \Theta_x\left(\lambda_8/2\right)\Theta_x^\dagger$, $(\in G/H)$ を用いて次の式で与えられる [3].

$$
\begin{aligned}
L_{x,\mu} &= \frac{N^2-2N+2}{N}\mathbf{1} \\
&+ (N-2)\sqrt{\frac{2(N-1)}{N}}\left(\mathbf{h}_x + U_{x,\mu}\mathbf{h}_{x+\mu}U_{x,\mu}^{-1}\right) + 4\,(N-1)\,\mathbf{h}_x U_{x,\mu}\mathbf{h}_{x+\mu}U_{x,\mu}^{-1}\,, \qquad (1a)
\end{aligned}
$$

$$
L_{x,\mu} = \sqrt{L_{x,\mu}L_{x,\mu}^\dagger}\hat{L}_{x,\mu} \qquad (1b)
$$

$$
V_{x,\mu} = \hat{L}_{x,\mu}U_{x,\mu}\left(\det(\hat{L}_{x,\mu})\right)^{-1/N}, \quad X_{x,\mu} = \hat{L}_{x,\mu}^\dagger(\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{1/N}, \qquad (1c)
$$

カラー場は、拡大したゲージ対称性をもともとの YM のゲージ対称性に一致させる reduction 条件を課す。与えられたゲージ場 $U_{x,\mu}$ に対する次の汎関数を最小にするようにカラー場を $\mathbf{h}_x$ を定める。

$$
F_{\mathrm{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}] = \sum_{x,\mu,k}\mathrm{Tr}\left(\left(D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}]\mathbf{h}_x\right)^\dagger D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}]\mathbf{h}_x\right). \qquad (2)
$$

ノンアーベリアンストークスの定理を用いると、ウイルソンループを境界とする面 Σ :$C = \partial\Sigma$ を用いて、ウイルソンループは対のように書きなおせる。[6][7]

$$
\begin{aligned}
W_C[\mathcal{A}] &= \int d\mu_\Sigma(\xi)\exp\left(\int_{S:\ C=\partial\Sigma} dS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}[\mathcal{V}]\right) \\
&= \int d\mu_\Sigma(\xi)\exp\left[ig\sqrt{\frac{N-1}{2N}}(k,\Xi_\Sigma) + ig\sqrt{\frac{N-1}{2N}}(j,N_\Sigma)\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{V}$ 変数分解であられるの連続極限と一致する。ここで、j,k はそれぞれ $F_{\mu\nu}[\mathcal{V}]$ を Hodge 分解して得られる電磁的カレントと磁気的カレントで次式で与えられる:

$$
k := \delta^*F = {}^*dF, \qquad \Xi_\Sigma := \delta^*\Theta_\Sigma\Delta^{-1}, \qquad (3)
$$

$$
j := \delta F, \qquad N_\Sigma := \delta\Theta_\Sigma\Delta^{-1}, \qquad (4)
$$

ここで、$\Delta := d\delta + \delta d$ はラプラス演算子、$\Theta_\Sigma^{\mu\nu} := \int_\Sigma d^2S^{\mu\nu}(x(\sigma))\delta^D(x - x(\sigma))$ は面要素である。し

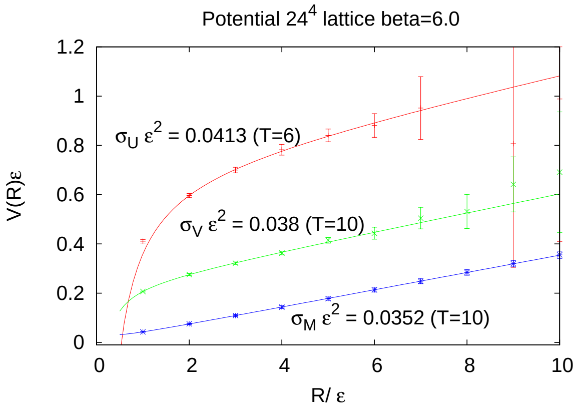

図 1: The conbinational plot of the quark–anti-quark inter potential. (from above to below) $V(R,T)$ and $V(R)$ of the Wilson loop for $SU(3)$-YM field $\left\langle W_{(R,T)}[U_{x,\mu}]\right\rangle$, and ones for $U(2)$-part $\left\langle W_{(R,T)}[V_{x,\mu}]\right\rangle$, and $V(R)$ for the magnetic monople part $\left\langle W_{(R,T)}[k_{x,\mu}]\right\rangle$, respectively. The static potenyial $V(R)$ is represented by the bold lines.

たがって、格子上の磁気的モノポールは新しい変数を用いて次で与えられる。

$$V_{x,\mu}V_{x+\mu,\nu}V^{\dagger}_{x+\nu,\mu}V^{\dagger}_{x,\nu} = \exp(-ig\mathcal{F}[\mathbf{V}_{\mu}(x)]_{\mu\nu}) = \exp(-ig\Theta^{8}_{\mu\nu}\mathbf{h}_{x'}), \tag{5}$$

$$\Theta^{8}_{\mu\nu} = -\arg\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{3}\mathbf{1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{h}_{x}\right)V_{x,\mu}V_{x+\mu,\nu}V^{\dagger}_{x+\nu,\mu}V^{\dagger}_{x,\nu}\right], \tag{6}$$

$$k_{x,\mu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\nu}\Theta^{8}_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

、格子上のアーベリアンドミナンス、磁気的モノポールドミナンスは次で与えられる。

$$\langle W_C[U]\rangle \cong \langle W_C[V]\rangle \cong \langle W_M[k]\rangle := \left\langle \exp\left(-ig\epsilon\sum\nolimits_{x,\mu}k_{x,\mu}\Xi_{x,\mu}\right)\right\rangle, \tag{8}$$

図**??**は、ウイルソンループの期待値 $\langle W_C[U]\rangle$、$\langle W_C[V]\rangle$、$\langle W_M[k]\rangle$ それぞれから計算されるクォーク・クォーク間ポテンシャルを示している。(R,T) の長方形のウイルソンループから得られる期待値を次の関数形で 2 次元フィットして string tension を求めた。

$$\left\langle W_{(R,T)}[V]\right\rangle = \exp(-V(R,T)), \tag{9}$$

$$V(R,T) := T\times V(R) + (a_1R+b_1+c_1/R) + (a_2R+b_2+c_2/R)/T, \tag{10}$$

$$V(R) = \sigma R + b + c/R. \tag{11}$$

$\langle W_C[V]\rangle$ から 85-90% の V ドミナンス、$\langle W_M[k]\rangle$ から 75% のノンアーベリアン磁気的モノポールドミナンスを示している。[9][10][4][5]

4 成果

格子上の $SU(N)$ YM 理論の新しい定式化によって、ゲージに依存することなく閉じ込め機構に中心的な役割を果たす配位を抽出し、その配位を用いて様々な量を計算することを可能とした。実際

$SU(3)$ のシミュレーションを実行し、minimal option での解析を行った。ノンアーベリアンストークスの定理との関連付けて、基本表現におけるクォーク・反クォーク間ポテンシャルは、minimal option の V 場が支配的な役割をは果たすことを示した。実際数値シミュレーションを行うことで、すなわち V ドミナンス (78–82%), モノポールドミナンス (72—76%) の結果を得た。これは、従来の研究にない新しい成果である。

参考文献

[1] Reformulating SU(N) Yang-Mills theory based on change of variables, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami . Prog.Theor.Phys.120:1-50,2008. CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th]

[2] New descriptions of lattice SU(N) Yang-Mills theory towards quark confinement. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata , Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, Phys.Lett.B669:107-118,2008, CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat]

[3] The Exact decomposition of gauge variables in lattice Yang-Mills theory. Akihiro Shibata, (KEK, Tsukuba & Tsukuba, Graduate U. Adv. Studies) , Kei-Ichi Kondo, (Tokyo U. & Chiba U.) , Toru Shinohara, (Chiba U.) . KEK-PREPRINT-2009-32, CHIBA-EP-181, Nov 2009. 16pp. Published in Phys.Lett.B691:91-98,2010.

[4] Gauge-independent “Abelian” dominance and magnetic monopole dominance in SU(3) Yang-Mills theory. Akihiro Shibata, Presented at 28th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2010), Villasimius, Sardinia, Italy, 14-19 Jun 2010.

[5] Non-Abelian Dual Superconductor Picture for Quark Confinement”, Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Seikou Kato, CHIBA-EP-185, KEK-PREPRINT-2010-22, arXiv:1007.2696 [hep-th]

[6] Wilson loop and magnetic monopole through a non-Abelian Stokes theorem, K.-I. Kondo, Phys.Rev.D77 085029 (2008)

[7] Proving Abelian dominance in the Wilson loop operator. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]

[8] Non-Abelian magnetic monopoles responsible for quark confinement.Kei-Ichi Kondo, (Chiba U.) , Akihiro Shibata, (KEK, Tsukuba) , Toru Shinohara, (Chiba U.) , Seikou Kato, (Fukui Natl. Coll. Tech.) . CHIBA-EP-187, Feb 2011. 10pp.To appear in the proceedings of The many faces of QCD, Ghent, Belgium, 1-5 Nov 2010.e-Print: arXiv:1102.4150 [hep-th]

[9] Non-Abelian magnetic monopole dominance for SU(3) Wilson loop average. Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Seikou Kato, . CHIBA-EP-186, Dec 2010. 3pp. Temporary entry e-Print: arXiv:1012.0648 [hep-th]

[10] Non-Abelian Dual Superconductor Picture for Quark Confinement. Kei-Ichi Kondo, (Chiba U.) , Akihiro Shibata, (KEK, Tsukuba) , Toru Shinohara, (Chiba U.) , Seikou Kato, (Fukui Natl. Coll. Tech.) . CHIBA-EP-185, KEK-PREPRINT-2010-22, Jul 2010. 4pp.e-Print: arXiv:1007.2696 [hep-th]