

実施報告書

- 格子シミュレーションを用いた共形場の理論の研究 -

研究組織

研究責任者

伊藤 悦子 (いとう えつこ) 大阪大学大学院 理学研究科 助教

共同研究者

青山 龍美 (あおやま たつみ) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任准教授

池田 裕章 (いけだ ひろあき) 総合研究大学院大学 大学院生

倉知 昌史 (くらち まさふみ) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任助教

松古 栄夫 (まつふる ひでお) 高エネルギー加速器研究機構 計算科学センター 助教

小川 兼司 (おがわ けんじ) 台湾交通大学 PD 研究員

大木 洋 (おおき ひろし) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任助教

大野木 哲也 (おおのぎ てつや) 大阪大学大学院 理学研究科 教授

新谷 栄悟 (しんたに えいご) RIKEN-BNL Research Center PD 研究員

山崎 剛 (やまざき たけし) 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 特任助教

研究の分担

主に、青山・池田・松古・小川・山崎の5名でプログラムのコーディングやクロスチェックを行った。Jobの実行や解析部分は、倉知、伊藤、大木、大野木、新谷で分担した。特にSU(3)のrunning couplingの解析は伊藤が、SU(2)の解析は大木が、異常次元の測定コード開発は松古・池田・小川が中心となって行った。

実施報告の概要

今年度(平成22年10月から23年1月)では、昨年度に引き続き、SU(2)、SU(3)非可換ゲージ理論の繰り込んだ結合定数の測定を行った。SU(3)ゲージ理論の結合定数の測定に関しては、大きな格子サイズ($L/a = 16$)における強結合領域での統計誤差が、著しい所で4.3%から2.2%となった。現在もいくつかの統計誤差が大きなパラメータについて、シミュレーションの続きを行っているが、まもなくすべてのパラメータで当初からの目標であった2%の統計誤差に達すると考えられ、論文としてまとめる準備を行っている。

また、そのゲージ場と結合するフェルミオンの作る擬スカラー状態の異常次元の新しい定義を与え、測定コードの開発を行った。

該当期間の実施報告の詳細

研究の背景

本研究の目的は、4次元 large flavor 非可換ゲージ理論(SU(N_c))の強結合領域の理論のふるまいを調べることである。このような理論は、摂動論的解析を行うと、赤外領域に非自明な相互作用を持つ固定点が存在する(Caswell, 1974)。しかし、この固定点での結合定数の値はフレーバー数によっては強結合領域にあり、固定点の存在と固定点近傍での場の理論の摂動論的解析は信頼できないため、非摂動論的な解析が非常に重要である。

そこで、私たちは非摂動論的手法の一つである格子ゲージ理論のシミュレーションを用いて、running coupling constant を直接測定し、そのような固定点が存在するかどうか調べている。

これに関連する分野の国内外の他の研究グループの現状としては、SU(3)ゲージ理論に関しては、

Appelquist et al. [1] によって、格子上のくりこみスキームの一つである「Schrödinger functional (SF) スキーム」を用いた running coupling constant が測定された。この結果、 $N_f = 8$ の時は結合定数の running にフラットな領域は見られなかったが、 $N_f = 12$ の時は低エネルギー領域で coupling が run しなくなるフラットな領域が存在することが示された。しかし一方で、Kuti et al. は、Wilson loop スキームを用いて renormalized coupling を調べたところ、固定点の存在を示す証拠は見つからなかったと報告している (Lattice2009,2010 に於いて [2])。他にもいくつかのグループが、running coupling constant や理論の相構造を調べる事で、この固定点の存在について研究しているが、特にまだ固定点での結合定数が大きくなる $N_f = 12$ については、一致した結論がでていない。本来、理論の固定点の存在は、くりこみスキームに依存しないものなので、このようなスキームによって異なる結果がでている現状は大きな問題となっている。違いが現われている最大の原因は、特に連続極限をとるときの系統誤差の評価が異なっている事にあると考えられる。

研究内容と独創的な点

私たちは格子上のくりこみスキームとして、他のグループとは全く独立な「Twisted Polyakov Loop (TPL) スキーム」を用いている。このスキームのくりこんだ結合定数は、格子の境界条件で2つの方向に関しリンク変数の twist を行い、twist した方向の Polyakov loop の相関関数と twist していない方向の Polyakov loop の相関関数の比を取る事で定義される。このため、 $O(a/L)$ の格子化誤差が相殺し、比較的小さい系統誤差を与えると予測されるのが利点である。

さらに、私たちは、同じく $O(a/L)$ の格子化誤差のないスキームとして、論文 [3] で新しい繰り込みスキーム (Wilson loop スキーム) を提案した。このスキームでは、Creutz ratio の相関関数の比から繰り込んだ結合定数を定義する。この Wilson loop スキームに、さらに、小さい格子サイズでも有用な結果が得られるように改良した Improved Wilson loop スキームも使い、理論の結合定数の低エネルギー領域での振る舞いに結論を下すのが本研究課題の内容と独創点である。

また、今年度は新たに、擬スカラー粒子の2点相関関数から擬スカラー粒子の異常次元を計算するくりこみスキームを提案し、その定義による測定のコード作成とテストランによる有用性も調べた。その結果、わずか100個のゲージ配位で1%から6%の統計誤差という非常に統計精度の良いスキームである事がわかり、これを用いて固定点上の擬スカラー粒子の異常次元を測定する所が独創的な点である。

計算方法の概略

running coupling constant の測定

固定点の存在を調べるため、ステップスケリングの手法を用いている。その手法は、まず、ある一定の renormalized coupling ($u = g^2(\mu)$) を与える格子パラメータ ($L/a, \beta$) の組を求める。そして、それぞれ β を固定し、格子サイズを s 倍した時の step scaling function $\Sigma(u, s, a/sL) = g^2(\beta, sL/a)|_{g^2(\beta, a/L)=u}$ を測定する。そして、最後に得られた step scaling function の連続極限を取る。

$$\sigma(s, u) = \lim_{a \rightarrow 0} \Sigma(u, s, a/sL)|_{g^2(L)=u}. \quad (1)$$

これによって、エネルギースケールを $1/s$ 倍にしたときの coupling constant ($\sigma(u) = g^2(\mu/s)$) を測る事ができる。現在までの研究で、この coupling constant を小さい誤差で求めるためには、それぞれのデータが統計誤差2%以下になるまでシミュレーションを行う必要がある事がわかった。このためには、高い β の領域で5万モンテカルロ・トラジェクトリー以上、低い β の領域で10万トラジェクトリー以上の統計が必要であることも分かっている。

異常次元の測定

擬スカラー粒子の時間方向に t だけ離れた 2 点相関関数から、擬スカラー粒子の Z 因子を定義し、running coupling constant の時と同様に、step scaling の手法を用いて異常次元のエネルギースケール依存性を調べる。そのために、まず、ある一定の renormalized coupling (u) を与える格子パラメータの組 ($L/a, \beta$) で Z 因子を測定し、次に β を固定したまま格子サイズを s 倍した時に測定した Z 因子との比を取る事で、step scaling function を計算する。この際、時間方向の距離 (t) は各格子サイズの r 倍と固定する。これは異常次元の繰り込みスキームを固定している事に対応する。すると、 r の取り方と格子サイズによっては、 t が非整数の場合もあり、実際の測定の生データを得る事ができない場合もあるために t に関して内挿の必要性が生じる。われわれは論文 [4] にあるテクニックを用い、2 点関数が単調減少で内挿しやすい関数になるように工夫し測定する。今年度はそのコード開発とテストランを行った。

シミュレーションの現状と結果

SU(3) $N_f = 12$ fundamental fermion の場合

TPL スキームでの running coupling の測定に関して、これまでに $L/a = 4, 6, 8, 10, 12$ について、基礎物理学研究所、大阪大学核物理研究センターのスーパーコンピュータを用いて、各パラメータに対して約 2% の統計精度で $4.0 \leq \beta \leq 30$ の領域のゲージ配位をほぼ生成し終わった。

さらに昨年度、KEK のスーパーコンピュータ (SR1100, Blue Gene) を用いて、 $L/a = 16$ の各 β に対して約 10 万 Trj. のゲージ配位生成のシミュレーションを行った。これらのデータを用いてステップスケールリングを従い、様々な u の値にして $\sigma(u)$ を測定し、renormalized coupling の成長率 ($\sigma(u)/u$) を調べた。具体的には、ステップスケールリングパラメータ ($s = 2$) とし、小さい格子サイズの組として $L/a = 4, 5, 6, 8$ 、大きい格子サイズの組として $L/a = 8, 10, 12, 16$ を用いた。ただし、 $L/a = 5$ については、内挿を使ってデータを得た。

その過程で、連続極限を取るときに、 $L/a = 8, 10, 12, 16$ の 4 点に対して $(a/L)^2$ の線形関数で取る方法と、 $L/a = 10, 12, 16$ の 3 点に対して定数フィットを取る方法を用い、その 2 つの比較を行った (図 1) (参考文献 [5])。この結果から、特に低エネルギーで系統誤差は非常に大きく、固定点の存在に関し今の段階で結論を得ることはできない事が分かった。そこで、今年度は、この離散化誤差の大

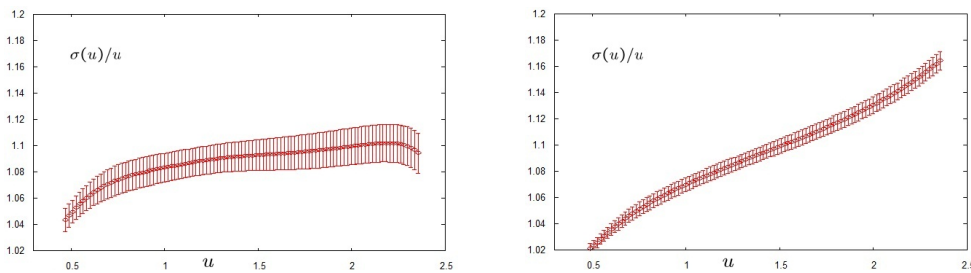


図 1: 結合定数の成長率。左図は線形関数、右図は定数フィットによる連続極限を取った場合の結果。

きな $L/a = 4$ のデータを用いず、 $(a/L)^2$ の効果も考慮した連続極限を取るために、 $L/a = 16$ の統計誤差を少なくとも 2% 以下にし、データの揺らぎを抑えつつ、さらに格子化誤差の小さい $L/a = 18$ のシミュレーションを行う事が目標であった。しかしながら、4 か月という限られた時間と、計算機予算のために、実際には $L/a = 16$ のシミュレーションしか行えなかった。

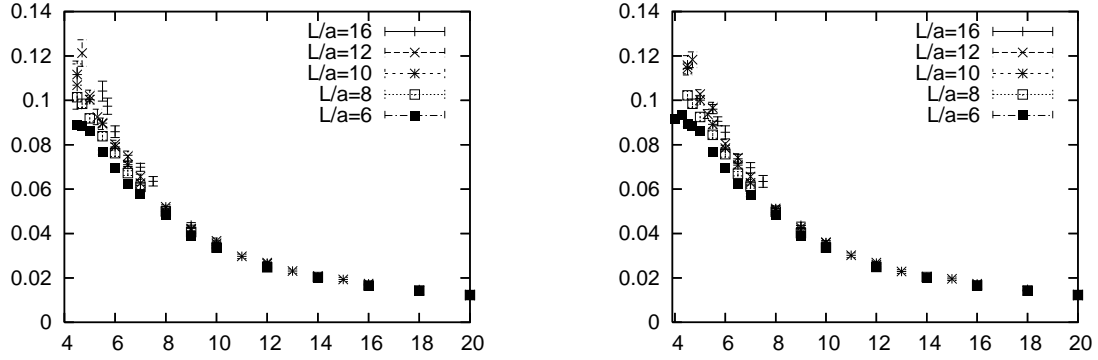


図 2: 各 $\beta, L/a$ における、TPL renormalized coupling の振る舞い ($SU(3) N_f = 12$) 縦軸は twist した方向の Polyakov loop 2 点関数と twist していない方向の 2 点関数の比、横軸は β 。左は 22 年度開始前、右は 22 年度終了後のデータ。

$L/a = 16$ のシミュレーションに関しては、最も低エネルギー領域 $\beta = 5.5$ で統計誤差が 4.3% から 2.2% となりほぼ目標は達成した。昨年度終了時と今年度終了時のデータを図 2 に示す。現在も基礎物理学研究所の計算機を用いて後残りわずかに統計誤差の大きなパラメータについてシミュレーションの続きを行っており、近いうちに論文としてまとめる予定である。

擬スカラー粒子の異常次元の測定

現在までに生成したゲージ配位を用いて、擬スカラー粒子の 2 点関数を格子サイズ $L/a = 6, 8, 10$ について測定した。その際のコード開発に KEK の BG を用いた。

擬スカラー粒子の 2 点関数から計算した各パラメータでの Z 因子の様子を図 3 に示す。横軸の t は Z 因子から計算される異常次元の繰り込みスキームの違いを与える。この図から、まず、論文 [4] のテクニックがうまく働き、 Z 因子も内挿しやすい単調減少関数になっている事がわかる。また、用いたゲージ配位の高々 200 個だが、低エネルギー領域でも統計誤差が 5% 以下という非常により結果が得られる事がわかった。現在、大阪大学 核物理研究センターの SX8 を用いてすべてのパラメータの配位について測定を行っており、こちらも近々論文としてまとめる予定である。

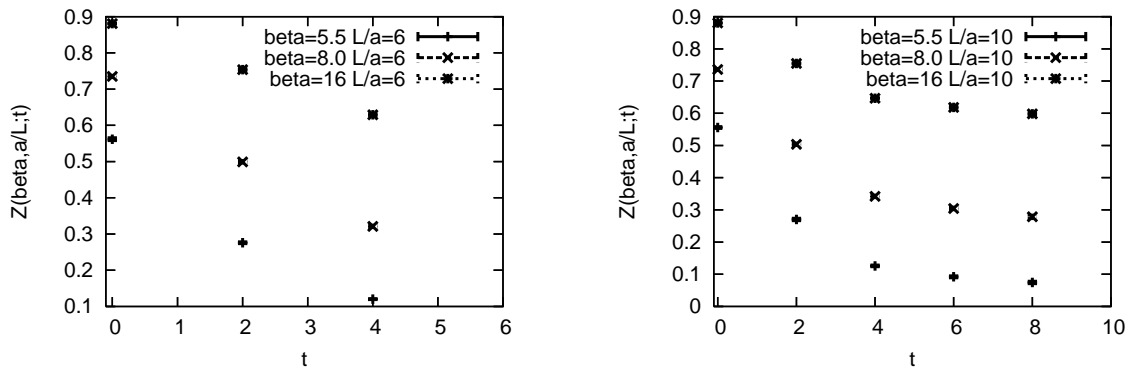


図 3: 擬スカラー粒子の Z 因子の振る舞いの様子。左は $L/a = 6$ 、右は $L/a = 10$ 。エラーはシンボルのサイズをほぼ同じ。

SU(2) $N_f = 8$ fundamental fermion の場合

SU(2) ゲージ理論の場合は、TPL スキームと Improved Wilson loop スキームの両方のスキームについて同時にシミュレーションを行っている。現在までに $L/a = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ については、基礎物理学研究所と核物理研究センターのスーパーコンピュータを用いたシミュレーションをほぼ終えた。 $L/a = 16, 18$ に関しては KEK のスーパーコンピュータ (SR) を用いたシミュレーションを行っている段階であり、目標としている統計精度は 1% である。

図 5 の左図は 2010 年 10 月の時点での、Improved Wilson loop スキーム、右図は TPL スキームでの各 $\beta, L/a$ における renormalized coupling の値である。このシミュレーション結果は同じ統計での比較である。この図から Improved wilson loop スキームの方が、TPL スキームより統計揺らぎの小さな観測量である事がわかった。

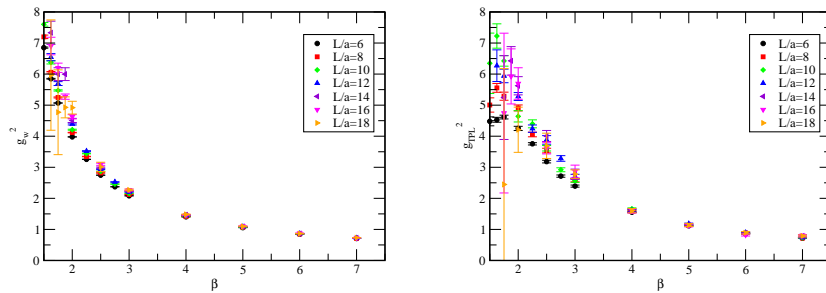


図 4: 各 $\beta, L/a$ における Improved Wilson loop スキーム (左) と TPL スキーム (右) の renormalized coupling の振る舞い (SU(2) $N_f = 8$ 昨年度終了時)

今年度は、シミュレーションを進め、図 5 にあるように、低エネルギーでの統計誤差がかなり小さくなった。

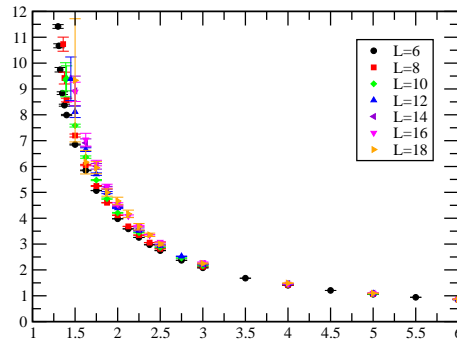


図 5: Improved Wilson loop スキームの renormalized coupling の振る舞い。縦軸 g_w^2 、横軸 β

SU(3) の場合と比較し、SU(2) では $L/a = 18$ のシミュレーションも行っているため、ステップスケールで連続極限を取る際 $L/a = 4$ を使わず $(a/L)^2$ の評価をすることができる。そこで、ステップスケールパラメータ $s = 1.5$ とし、小さい格子サイズとして $L/a = 6, 8, 10, 12$ 、大きい格子サイズとして $sL/a = 9, 12, 15, 18$ としステップスケールを行った。また、統計精度も 1% と小さくしているため、 $(a/L)^2$ のスケールを良く見ることが出来る。この様子を図 6 に示した。ここで、

青い線は $L/a = 9, 12, 15, 18$ の 4 点を $(a/L)^2$ の 2 次関数で外挿した場合、赤い線は $L/a = 12, 15, 18$ の 3 点を 1 次関数で外挿した場合であり、この 2 つの連続極限での差（系統誤差）が非常に小さくなっていることがわかる。

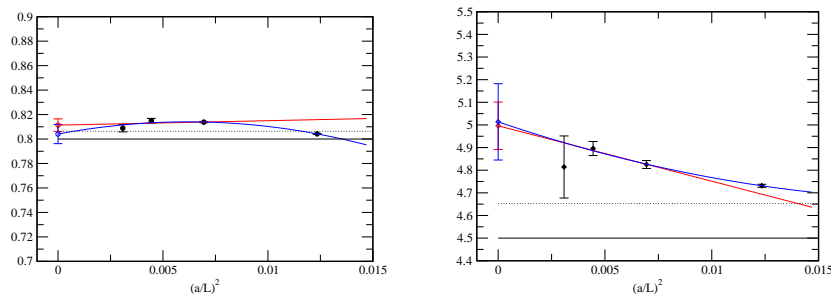


図 6: ステップスケリング関数の連続極限の様子。実線は input となる renormalized coupling の値 (u)。点線は摂動論 2-loop の結果。青線は 4 点を 2 次関数、赤線は連続極限に近い 3 点を 1 次関数で外挿した結果。

昨年度の段階において、低エネルギー領域ではまだ統計精度が足りず、この 2 次関数による外挿と 1 次関数による外挿が出来なかったため、共形理論の探索における重要な結果を得る事が出来なかった。そのため本年度では、強結合領域に対する非摂動計算を行うため、 $L/a=16, 18$ という大きな体積による小さな β の領域におけるゲージ配位の生成が目標であった。現在までの所、それらゲージ配位の生成から得られるゲージ結合定数の測定を行い、最も重要な低エネルギー領域における結合定数の連続極限の計算を行っている段階である。前年度終了時から本年度の計算時間の終了までに、 $L/a = 16$ の体積と $L/a = 18$ の体積における $\beta > 2$ のパラメータ領域におけるゲージ配位生成がほぼ完了し、低エネルギー領域における理論の性質を調べる事が可能となった。

図 7 は、8 フレーバーを持つ $SU(2)$ ゲージ理論の非摂動計算によるゲージ結合定数の成長率の様子を摂動的計算 (2-loop) と比較した図である。弱結合領域では摂動論との一致を示し、低エネルギーにおける強結合領域に向かって、非摂動計算の結果の方がゲージ結合定数の成長が早くなる様子が分かる。またこの解析では、ゲージ結合定数の連続極限での値を格子間隔の二次と四次の両方の外挿の様子を比較し、広範なエネルギー領域に渡って両者が一致する事を確かめた。これは、本研究で用いた繰り込みの処方が格子化による系統誤差を小さく抑える事を示しており、より信頼に足る結果を与えるものである。これらの成果は、本課題申請のプロジェクト B における主要な目的のひとつであった。さらに、この解析からこの理論が摂動的振る舞いと大きく異なる性質を見出した事は大きな収穫であり、その詳細な結果は参考文献 [6] で発表した。

しかしながら本研究課題における 4 ヶ月という限られた計算時間では、非摂動領域での物理量の振る舞いの解析が十分とは言えず、これを含めたゲージ配位の生成が今後の課題である。また現在、固定点近傍でのゲージ結合定数等の物理量の振る舞いやその理論の普遍類を調べる研究も行っており、それらも含めた結果は近く国際学会及び学術論文で発表する予定である。

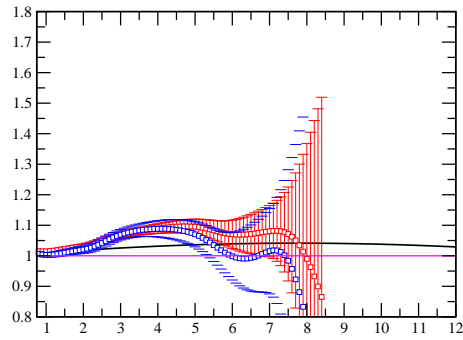


図 7: 結合定数の成長率の様子。青線は 2 次関数、赤線は 1 次関数で外挿した場合の結果。また黒線は摂動計算を用いた結果である。

参考文献

- [1] T. Appelquist, G. T. Fleming and E. T. Neil, Phys. Rev. D **79** (2009) 076010 [arXiv:0901.3766 [hep-ph]].
- [2] Z. Fodor, K. Holland, J. Kuti, D. Nogradi and C. Schroeder, arXiv:0911.2934 [hep-lat].
- [3] E. Bilgici *et al.*, Phys. Rev. D **80** (2009) 034507 [arXiv:0902.3768 [hep-lat]].
- [4] P. H. Damgaard, U. M. Heller, A. Krasnitz and P. Olesen, Phys. Lett. B **400** (1997) 169
- [5] E. Itou *et al.*, arXiv:1011.0516 [hep-lat].
- [6] H. Ohki *et al.*, arXiv:1011.0373 [hep-lat].