

# 大型シミュレーション研究実施報告書

研究課題 格子 QCD によるハドロンの散乱と共鳴

課題番号 大型-10-21

## 研究組織

研究責任者	森松 治	高エネルギー加速器研究機構	准教授
研究従事者	矢木 拓也	東京大学理学系研究科	博士 4 年
	大谷 宗久	杏林大学医学部	講師
	橋本 省二	高エネルギー加速器研究機構	教授

# 1 ウィルソンフェルミオンによるチャーム中間子散乱の散乱長の計算

## 1.1 $Z^+(4430)$

### 1.1.1 Belle グループによる発見と最近の実験的進展

2007年に Belle グループによって、崩壊チャンネル  $B^0 \rightarrow K^0 \pi^+ \psi'$  中の、 $\pi^+ \psi'$  の不変質量分布に非常に鋭い共鳴ピークが見つけた [1]。図 1.1 に [1] より引用した  $\pi^+ \psi'$  の質量分布に対するイベントのヒストグラムを示す。 $Z^+(4430)$  と命名されたこの新しいハドロン状態は、解析によって以下の性質を持つことがわかった。

- 崩壊チャンネル： $Z^+(4430) \rightarrow \pi^+ \psi'$
- 質量： $4433 \pm 5$  [MeV/ $c^2$ ]
- 崩壊幅： $45_{-18}^{+35}$  [MeV/ $c^2$ ]
- 量子数： $I^G(J^P) = 1^+(0^-, 1^-, 2^-)$

まず崩壊チャンネルを見ると  $\psi'$  がチャーモニウムであることと  $\pi^+$  が + 電荷を持つことから、 $Z^+(4430)$  はチャームクォーク・反チャームクォーク対 ( $c\bar{c}$ ) と電荷 (electric charge) に対応する軽いクォーク対 ( $\bar{d}u$ ) を有したハドロンということが分かる。つまり仮に  $Z^+(4430)$  と言うハドロンが本当に存在するのならば、それは ( $c\bar{c} + \bar{d}u$ ) という 4 つのクォーク状態で無ければならないのである。一方で、これまで知られてきた、 $X(3872)$  [2],  $Y(4260)$  [3] と言った  $c\bar{c}$  を含むエキゾチックハドロンは電荷を有していないため、4 つのクォーク状態であると明確に言い切るのは容易では無い。このことから、 $Z^+(4430)$  は 4 クォーク状態の非常に有力な候補として、注目を集めている。

その後、2009年に Babar グループによって  $B^{-,0} \rightarrow K^{0,+} \pi^- \psi'$  と  $B^{-,0} \rightarrow K^{0,+} \pi^- J/\psi$  の  $Z^-(4430)$  の崩壊チャンネルのデータ解析が行われた [4]。これは  $Z^+(4430)$  の  $I^z$  を反転させた  $Z^-(4430)$  の発見を期待した調査である。しかし、後者のチャンネルにおいては全くピークが発見されず、Belle グループが  $Z^+(4430)$  を発見したチャンネルに対応する前者のチャンネルについても有意な情報を得ることは叶わなかった。これに対して Belle グループは、Babar グループが解析に用いたデータは統計量が十分ではない Belle グループの主張と必ずしも矛盾するものではないという見解を出している [5, 6]。従って  $Z^+(4430)$  というハドロンの存在の確証を得るには、さらなる追実験が必要とされるのは間違いない。しかし BaBar 実験は 2008 年春に終了しており、また Belle 実験も 2010 年夏に終了しているため、当面は新しい結果は得られないであろう。

$Z^+(4430)$  に加えて、統計精度は決して良くないが、 $\bar{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+ \chi_{c1}$  における  $\pi^+ \chi_{c1}$  の不変質量分布中に  $Z^+(4430)$  と同様に ( $c\bar{c} + \bar{d}u$ ) で構成されていると期待される  $Z_1^+(4050)$ ,  $Z_2^+(4250)$  を示唆するピークが見つまっている [7]。 $Z^+(4430)$  の発見によってハドロン物理に新たな局面が開かれようとしているのである。

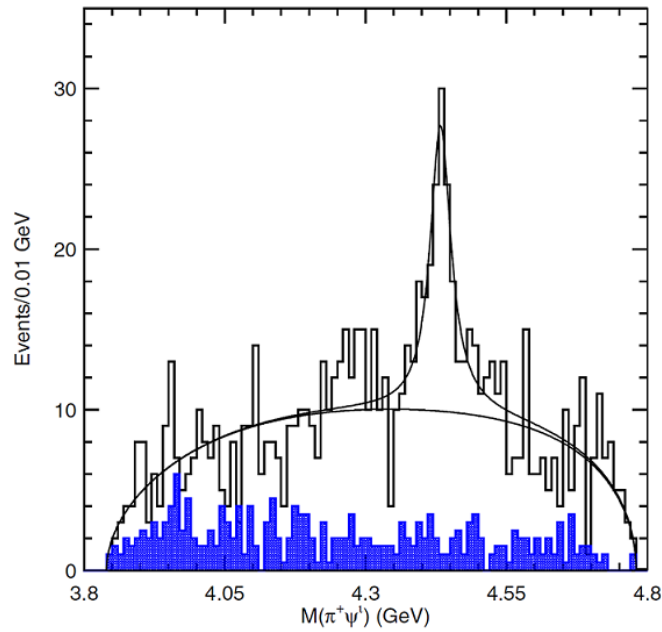


図 1.1:  $\pi^+\psi'$  の不変質量分布 [1]

実験的な発見が続く一方で、 $Z^+(4430)$  を含めたエキゾチックハドロン全般に対する理論的な理解も進んでいる。次のセクションで、それらの取り組みの紹介と  $Z^+(4430)$  の物理的描像を与える。

### 1.1.2 理論的描像

$Z^+(4430)$  を含め、4つのクォーク・反クォークからなるハドロン状態に対する物理的描像は、代表的なものとして以下の2つが考えられている。第一に2つのクォークからなるカラー $\bar{3}$ 表現と2つの反クォークからなるカラー3表現が2つ合わせてカラー1重項になるように結合した状態である。これはダイクォーク ( $cu$ )・反ダイクォーク対 ( $\bar{c}\bar{d}$ ) がスピン-スピン相互作用によって強く束縛した状態に対応し、テトラクォーク状態 (Tetraquark State) と呼ばれている。第二に考えられるのは、クォーク・反クォークからなるカラー1重項である中間子が結合する状態であり、今の場合は2つの  $D$  中間子がS波で、かつ軽い中間子の交換による比較的弱い相互作用をした結果、作られる束縛状態に対応する。こちらは分子状態 (Molecular State) と呼ばれている。それぞれの状態の概念図を (図 1.2) に与える。特に後者の分子状態に関しては、 $Z^+(4430)$  のピークの位置が  $D^*(2010)$ 、そして  $D_1(2420)$  と呼ばれる2つの  $D$  中間子の質量の和に大変近いことから、こちらの描像の側に立つならば、 $Z^+(4430)$  は  $D^*(2010)$  と  $D_1(2420)$  がS波で束縛した状態と考えることが可能となる。これらの考え方は、 $Z^+(4430)$  に限らず他のエキゾチックハドロン  $X(3872)$ ,  $Y(4260)$  等についても同様であるが、前述したように  $Z^+(4430)$  とは異なり電荷を持たないため、4つの構成子クォーク (constituent quark) から構成されることは必ずしも保証されてはいない。

$Z^+(4430)$  についての理論の側からの研究としては、有効相互作用からのアプローチ [8, 9], QCD 和則からのアプローチとしては [10, 11, 12] と、それぞれの描像について行われており、一定の成果を収めてはいる。

ここで注意しなければならないことは、実際にはテトラクォーク状態と分子状態は完全に独立な状態ではない

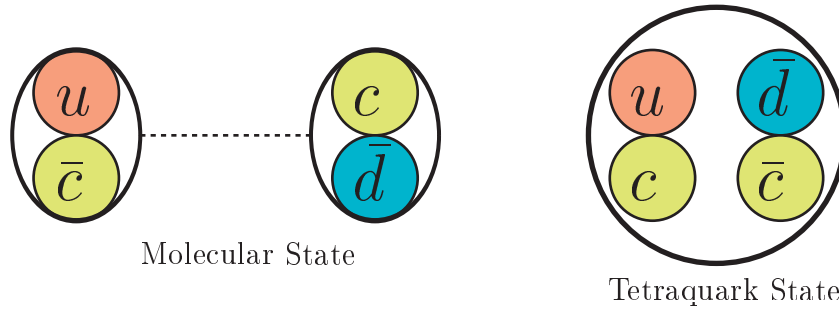


図 1.2:  $Z^+(4430)$  の物理的描像：左図が分子状態，右図がテトラクォーク状態を意味する

ため，一方の描像に基づいた模型を用いて束縛状態が見つかったとしても，それはもう一方の描像を即否定するものではないということである。つまり束縛状態は，その波動関数の空間分布を調べることによって，よりテトラクォーク的，より分子状态的といった形で，本来は記述されるべきものである。これについては後ほど説明する。

格子 QCD シミュレーションによるアプローチを行った研究は， $Z^+(4430)$  以外のエキゾチックハドロンを含めれば幾つか存在するが，それらを含めても決して多くは行われてきてはいない。 $X(3872)$  については [13]， $Y(4260)$  については [14] で，それぞれのエキゾチックハドロンと結合する  $D$  中間子の系の散乱長の計算と，その体積依存性の議論が行われている。そして  $Z^+(4430)$  については，中国の CLQCD グループによって， $D_1(2420)D^*(2010)$  間の位相差の計算がクエンチ近似の下で行われている [15]。しかしこの計算は，2 粒子状態を取り扱うには，格子空間に用いた格子点の数は少なく，モンテカルロシミュレーションの統計数もそれほど多くはないため，相関関数に対する誤差は大きくエネルギー固有値の解析には苦心の跡がうかがえる。直接的に束縛状態は観測されなかったものの， $D_1D^*$  間に有意な引力が働くことは，この研究より見出されている。格子 QCD シミュレーションによる  $X$ ， $Y$ ， $Z$  といったエキゾチックハドロンの研究は [16] にまとめられている。

チャームを含むエキゾチックハドロンではなく，ストレンジを含むテトラクォーク状態まで視野を広げれば， $\phi$  と結合する， $(\bar{s}qsq)$  の 1 状態について幾つか研究が行われている [17, 18]。

さらにエキゾチックハドロンに限らず，一般のチャームを含むハドロン間の相互作用の格子 QCD シミュレーションによる探求は，先駆的な研究としては [19] で，チャーモニウム  $J/\psi$  と，軽い中間子，重粒子間の  $(J/\psi - \pi)$ ， $(J/\psi - \rho)$ ， $(J/\psi - N)$  散乱長の計算が行われている。この計算は，クエンチ近似の下でウィルソンフェルミオンを用いて行われたもので，比較的細かい格子空間を用いた計算であり，得られた物理量の体積依存性について丁寧な議論が行われている。さらに [20, 21] において，体積依存性の議論こそ行われてはいないが [19] で行われたチャンネルに加えて， $D$  中間子や  $K$  中間子との散乱も含めた，より広域に渡るチャンネルについての散乱長の計算が価クォークにドメインウォールフェルミオンを，海クォークにスタッガードフェルミオンを用いて行われている。特に [21] においては， $D^+D^{0*}$  の散乱長において引力的でありながら散乱長の符号が逆転している，束縛状態の存在を示唆する振る舞いも見出されている。また，近年ではチャーモニウムと重粒子間に働く相互作用ポテンシャルを計算した [22] も存在する。これらの研究で行われたチャンネルは，いずれも本論文で取り扱われるチャンネルとは重複しない。

## 本研究の流れ

我々はエキゾチックハドロン  $Z^+(4430)$  の物理的性質を知るための第一歩として、 $Z^+(4430)$  と期待される束縛状態を作る可能性が非常に強い  $D_1(2420)D^*(2010)$  の S 波の相互作用を特徴付ける散乱長の計算を行った。仮に  $D_1(2420)D^*(2010)$  が束縛状態を作るならば、その散乱長は引力的な振る舞いを示すことが必要条件となる。加えて、仮に引力を示すのならば、2 粒子間の相互作用の振る舞いから、それが束縛状態を作るかどうかを議論することが可能となる。また、より系統的に調べるために  $Z^+(4430)$  と結合し得るチャンネル、すなわち  $Z^+(4430)$  と同じ量子数を持ち、かつ質量の和が 4430[MeV] 近傍に存在するような、2つの  $D$  中間子間の散乱長、チャーモニウム・中間子間の散乱長を計算した。どういったチャンネルを計算したかについては次のセクションで具体的に説明する。

散乱長の計算は、有限体積中で測定された 4 点の相関関数のエネルギー固有値をルシャールの公式を用いて変換することによって行われる。そして 2つの中間子が束縛状態を作るかどうかは、散乱長のクォーク質量や空間の大きさといった物理的なパラメータに対する依存性から議論することができる。そこで、我々は散乱長の計算を 4つのクォーク質量・2つの体積で行い、そのクォーク質量・体積依存性も調べた。

## 1.2 計算の詳細

### 1.2.1 セットアップ

本研究に於いては、我々自身が HMC 法を用いて作成したゲージ配位を用いて格子 QCD シミュレーションを行った。数値計算は KEK に設置された IBM の BlueGene/L と Hitachi の SR11000 を用いた。ゲージ配位の生成、そしてクォーク伝搬関数の計算に用いたセットアップ・数値パラメータ等を以下に与える

- ゲージ配位
  - ゲージ作用：プラケット作用 (クエンチ近似)
  - 格子空間のサイズ： $L^3 \times T = 24^3 \times 48$ , and  $16^3 \times 48$
  - 統計数： $N = 2000$  (for  $L = 24$ ), and  $3000$  (for  $L = 16$ )
  - ゲージ結合定数： $\beta = 6.15$
  - 格子定数： $a^{-1} \sim 2.81[4]$  [GeV] ( $a \simeq 0.07$  [fm])
  - ゲージ固定の有無：クーロンゲージに固定
- クォーク伝播関数
  - フェルミオン作用：ウィルソン作用
  - ホッピングパラメータ (チャームクォーク)： $\kappa = 0.136$
  - ホッピングパラメータ (アップ・ダウンクォーク)： $\kappa = 0.152, 0.1525, 0.1528, 0.1531$
  - 境界条件：時間方向に対して周期的境界条件 ( $\psi(x+T) = \psi(x)$ )

クエンチ近似の下で  $\beta = 6.15$  というパラメータは、チャーモニウム、及びチャーモニウムと関係したエキゾチックハドロンについての先駆的研究 [23] で用いられたものを使用した。そのため、格子定数の値  $a^{-1} \sim 2.81[4]$  [GeV] も [23] においてパイ中間子・ロー中間子の質量比から決定されたものをそのまま用いている。

格子定数から、それぞれのホッピングパラメータに対応するクォーク質量を見積もることができる。擬スカラー粒子の質量を測定すると  $\kappa = 0.136, 0.152, \dots, 0.1531$  が  $m_\pi \simeq 3000, 800 \dots 500$  [MeV] に対応していることがわかる。したがって  $\kappa = 0.136$  をチャームクォークのホッピングパラメータとして設定し、 $\kappa = 0.152, 0.1525, 0.1528, 0.1531$  をアップ・ダウクォークのホッピングパラメータとして設定した。

一般に、格子シミュレーションにおいてクォーク（質量  $m_i$   $i = u, d, s, c, b, t$ ）のコンプトン波長が格子定数  $a$  よりも十分長くなければならないのは直感的に考えても明らかである。

$$m_i a \ll 1 \quad (1.2.1)$$

つまり取り扱うクォークの質量が重ければ重いほど、格子定数はより小さくしなければならない。この条件は  $u, d, s$  クォークのみが関係するような物理を議論する際にはそれほど大きな問題にはならないのだが、特に  $D$  中間子のような軽い質量のクォークと重い質量のクォークが混在する系を考察する場合には、大きな困難となる。計算機資源は有限であるから、重いクォークに合わせて格子定数を非常に細かくすればするほど、格子空間はあまり大きく取れなくなる。すると今度は、有限体積効果が問題として立ちふさがるのである。また、格子 QCD シミュレーションによる散乱長の計算は、ハドロン間に働く微小な相互作用から与えられるので、一般に高い統計精度が要求される。

従って本計算ではプラケット作用・ウィルソン作用というなるべく計算機予算に見合った生成しやすいゲージ配位・フェルミオン作用を使うことで、十分細かい格子定数で、かつある程度の格子サイズを持ったゲージ配位・複数のクォーク質量での計算を実現した。

## 1.2.2 チャーム中間子の 2 粒子状態の内挿場

前述したように  $Z^+(4430)$  を、2つの  $D$  中間子  $D_1(2420)$  と  $D^*(2010)$  が  $S$  波状態で、かつ束縛エネルギーがほとんどゼロの状態で結合した、分子状態であると考え。このとき崩壊チャンネル  $Z^+(4430) \rightarrow \pi^+ \psi(2S)$  より、系全体のアイソスピン・ $G$  パリティが決定され、さらに  $D_1, D^*$  の全角運動量がそれぞれ  $J^P = 1^+, 1^-$  であることから、 $Z^+(4430)$  の  $I^G(J^P)$  は  $I^G(J^P) = 1^+(0^-, 1^-, 2^-)$  と推定できる。表 1.1 に  $Z^+(4430)$  と結合するチャンネルを、 $S$  波の状態についてまとめた。左列より、中間子の組み合わせ・2つの中間子の質量の和・量子数・ $G$  パリティについての固有状態が与えられている。 $G$  パリティについての固有状態を与える際に、 $D$  中間子にフレーバーを示す添え字を明示した。一般に  $D$  中間子に与えられるスピンパリティとフレーバーを示す添え字は、 $K$  中間子と同様のルールで与えられる。これについては表 1.2 にまとめた。

次に、各状態を記述するために必要とされる中間子の内挿場を用意する。まず  $D$  中間子については

$$\begin{cases} O_{D_1^0}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x) & (1.2.2a) \\ O_{D^{*+}}^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu c(x) & (1.2.2b) \\ O_{D^{*0}}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu u(x) & (1.2.2c) \\ O_{D_1^+}^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu\gamma^5 c(x) & (1.2.2d) \end{cases} \quad \begin{cases} O_{D^+}(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^5 c(x) & (1.2.3a) \\ O_{D_0^{*0}}(x) \equiv \bar{c}(x)u(x) & (1.2.3b) \\ O_{D_0^{*+}}(x) \equiv \bar{d}(x)c(x) & (1.2.3c) \\ O_{D^0}(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^5 u(x) & (1.2.3d) \end{cases}$$

と与えられ、アップ・ダウクォークから作られる軽い中間子やチャーモニウムについても同様に

$$\begin{cases} O_\rho^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu u(x) & (1.2.4a) \\ O_{a_1}^\mu(x) \equiv \bar{d}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x) & (1.2.4b) \end{cases} \quad \begin{cases} O_{J/\psi}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu c(x) & (1.2.5a) \\ O_{\chi_{c1}(1P)}^\mu(x) \equiv \bar{c}(x)\gamma^\mu\gamma^5 c(x) & (1.2.5b) \end{cases}$$

表 1.1:  $I^G(J^P) = 1^+(0^-)$  の  $Z^+(4430)$  に結合する中間子の組み合わせ

	combination	threshold[MeV]	quantum number	eigen state
S-wave ( $J^P = 0^-$ )	$D \otimes D_0^*$	4270	$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}(0^- \otimes 0^+)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} ( D^+ \bar{D}_0^{*0}\rangle -  D_0^{*+} \bar{D}^0\rangle)$
	$D_1 \otimes D^*$	4430	$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}(1^+ \otimes 1^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} ( \bar{D}_1^0 D^{*+}\rangle +  \bar{D}^{*0} D_1^+\rangle)$
	$\chi_{c1}(1P) \otimes \rho$	4280	$0^+ \otimes 1^+(1^{++} \otimes 1^{--})$	$ \chi_{c1}(1P) \rho\rangle$
	$J/\psi \otimes a_1$	4360	$0^- \otimes 1^-(1^{--} \otimes 1^{++})$	$ J/\psi a_1\rangle$
P-wave	...			
	$\psi' \otimes \pi$	3830	...	...
	...			
D-wave	...	...	...	...

表 1.2:  $D$  中間子のスピンパリティ・フレーバー添え字

Flavor		Spin	
$D^+$	$c\bar{d}$	$D$	$0^-$
$D^-$	$\bar{c}d$	$D^*$	$1^-$
$D^0$	$c\bar{u}$	$D_0^*$	$0^+$
$\bar{D}^0$	$\bar{c}u$	$D_1$	$1^+$

で与えられる。パイ中間子散乱の議論と同様に、これらの内挿場を用いてハドロン  $h$  の 2 点の相関関数

$$C_h(t) \equiv \sum_{\vec{x}} \langle 0 | O_h(x) O_h^\dagger(0) | 0 \rangle \quad (1.2.6)$$

$$\propto \exp(-m_h t) + \exp(-m_h(T-t)) + \dots \quad (1.2.7)$$

$$\propto \cosh(-m_h(t - T/2)) + \dots \quad (1.2.8)$$

が与えられ、その時間依存性から運動量ゼロでのエネルギー固有値、すなわちハドロン  $h$  の質量  $m_h$  を引き出すことが出来る。式 (1.2.8) の第 2 項は時間方向の周期的境界条件に由来する。実際の計算に際しては、相関関数に以下のようなスミアリング (smearing) を施した。

$$C_h^A(t) \equiv \sum_{\vec{x}} \langle 0 | O_h(x) O_h^{A\dagger}(0) | 0 \rangle \quad (1.2.9)$$

$$O_h^A(x) \equiv \sum_{\vec{x}_1} \sum_{\vec{x}_2} \bar{\psi}^f(\vec{x}_1, t) \Gamma_h \psi^g(\vec{x}_2, t) F(\vec{x} - \vec{x}_1) F(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (1.2.10)$$

$$F(\vec{x}) = A \exp(-B|\vec{x}|^2) \quad (1.2.11)$$

上式に於いて、 $\bar{\psi}^f \Gamma_h \psi^g$  はハドロン  $h$  と同じ量子数を持った内挿場である。 $F(\vec{x})$  のパラメータを適切に選ぶことによって、スミアリングを施した内挿場が基底状態とより強く結合するためである。この操作によって相関関数における基底状態の寄与を、よりはっきり観測することが可能となる。本計算に於いては  $B = 0.050$ 、そして  $A$  は

$$\sum_{\vec{n}} F(\vec{n}) = 1 \quad (1.2.12)$$

を満たすように選んだ。

一方で、2粒子状態  $D_1 \otimes D^*$ ,  $J/\psi \otimes a_1$ ,  $\chi_{c1}(1P) \otimes \rho$ , そして  $D \otimes D_0^*$  のS波を表す内挿場を  $O_i (i = 1, \dots, 4)$  とすると、上で挙げた中間子の内挿場を組み合わせることで、2粒子状態を以下のように記述できる。

$$\begin{cases} O_1(x, y) \equiv g_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ O_{D_1^0}^\mu(x) O_{D^{*+}}^\nu(y) + O_{D_0^{*0}}^\mu(x) O_{D_1^+}^\nu(y) \right] & (1.2.13a) \\ O_2(x, y) \equiv g_{\mu\nu} \left[ O_{\chi_{c1}(1P)}^\mu(x) O_\rho^\nu(y) \right] & (1.2.13b) \\ O_3(x, y) \equiv g_{\mu\nu} \left[ O_{J/\psi}^\mu(x) O_{a_1}^\nu(y) \right] & (1.2.13c) \\ O_4(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ O_{D^+}(x) O_{D_0^{*0}}(y) - O_{D_0^{*+}}(x) O_{D^0}(y) \right] & (1.2.13d) \end{cases}$$

これらを用いて、4点の相関関数は以下の行列要素で定義される。

$$C_{ij}(t) \equiv \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle 0 | O_i(x, y) O_j^\dagger(0, 0) | 0 \rangle \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2.14)$$

$$\propto \cosh(-m_{ij}(t - T/2)) + \dots \quad (1.2.15)$$

パイ中間子散乱の計算で用いた内挿場と同様で、式 (1.2.14) においてはシンク側に置かれた2つの中間子の内挿場の空間座標、 $\vec{x}$  と  $\vec{y}$  の2点についてそれぞれ和が取られている。一般に、 $\vec{x} = \vec{y}$  と1点として和を取った場合は、2つの中間子の運動量の和をゼロにすること、すなわちS波への射影を取ることに対応する。これに対して、式 (1.2.14) のように2つの空間座標について独立に和をとった場合は、S波への射影を取るだけでなく、さらに2つの中間子それぞれの運動量をゼロにするような操作に対応する。例を挙げると  $D_1 D^*$  に対応する内挿場  $O_1(x, y)$  による4点の相関関数ならば、前者が  $\vec{p}_{D_1} + \vec{p}_{D^*} = \vec{0}$  という2粒子の運動量への拘束条件に対応し、後者が  $\vec{p}_{D_1} = \vec{p}_{D^*} = \vec{0}$  という拘束条件に相当する。この操作によって、内挿場  $O_1(x, y)$  と、 $D_1 D^*$  以外の中間子の2粒子状態との結合の影響を、著しく抑制することが可能となるため、対角化の方法を使わずとも、対角成分をほぼ固有状態とみなすことが出来る。但し、この方法にはデメリットも存在する。後述するテトラクォーク状態を与える内挿場  $O_5(x)$  のような、1粒子状態の2点関数に対しては使えない。従って、内挿場  $O_5(x)$  の2点関数から、テトラクォーク状態と結合する中間子の2粒子状態 ( $D_1 D^*, \chi_{c1}(1P)\rho, J/\psi, DD_0^*$ ) との結合の効果を差し引くには対角化を行うしかない。また、もう1つのデメリットとして、一般に2粒子状態の内挿場を用いて作られる行列要素 (1.2.14) は、シンク側の空間座標を1点に取った場合は、空間方向の並進対称性より対称行列 (ミンコフスキー空間ならばエルミート行列) であることが証明できるが、(1.2.14) のようにシンク側の空間座標が2点ならば対称行列にはならない。そのため、ある中間子の2粒子状態に対応する内挿場から、その他のチャンネルとの結合の効果を差し引くためには、シンクを1点にして対角化するか、シンクを2点にして対角成分のみを議論するかのどちらか一方を選ばなければならない。

本研究においては、チャーム中間子の2粒子状態を記述する内挿場  $O_1, O_2, O_3, O_4$  によって作られる4行4列の行列に関してはシンクを1点の場合と2点の場合の両方で計算を行い、対角要素、非対角要素それぞれの変化を調べた。調査の結果については巻末の付録にまとめる。一方で  $O_5$  を含む場合に関しては先述の理由よりシンクが1点の場合で5行5列の行列要素を計算した。これについてのデータは未解析である。

また全ての四点関数に  $c\bar{c}$  の対消滅・対生成を伴うダイアグラムが存在するが、今回の計算ではその効果は無視した。実際の数値計算に於いては、このダイアグラムを計算するには全ての時間をソースとするクォーク伝播関数が必要になってしまうため、計算時間が  $T$  倍 ( $T$ :時間方向の箱の大きさ) となり、取り入れるのは現実的ではない。また、物理的にも  $J/\psi$  の崩壊幅が非常に狭いことから、このプロセスの寄与は小さいと推測される。

図 1.3 に  $D_1 D^*$  散乱においてあらわれるダイアグラムを与える。まず左の2図が  $c\bar{c}$  の対消滅・対生成を伴わないプロセスに相当し、右の2図が対消滅・対生成を伴うプロセスに相当する。前述のように、本計算では後者



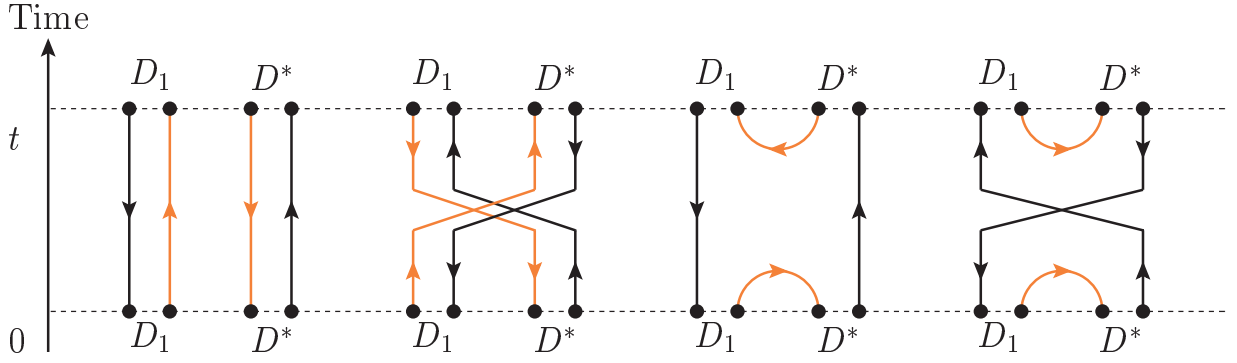


図 1.3:  $D_1 D^*$  散乱において現れるダイアグラム

のプロセスの寄与は全て無視した。

さらに左の2図に着目すると、左端のダイアグラムがグルーオンの交換が  $D$  中間子間の相互作用に寄与するプロセスを表す。このプロセスは  $D$  中間子散乱、チャーモニウム・中間子散乱のチャンネル全てに、共通に現れる。そして、左から2番目のダイアグラムは、

$$\bar{D}_1^0 D^{*+} \rightarrow \bar{D}^{*0} D_1^+ \quad (1.2.16)$$

$$\bar{D}^{*0} D_1^+ \rightarrow \bar{D}_1^0 D^{*+} \quad (1.2.17)$$

といった、中間子の入れ替えを通して相互作用するプロセスに対応し、 $D$  中間子散乱のチャンネルにのみ現れる。これは、 $D$  中間子散乱の2粒子状態を記述する際には、 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|D^+ \bar{D}_0^{*0}\rangle - |D_0^{*+} \bar{D}^0\rangle)$  といったように、2つの項の線形結合を取ることによって  $G$  パリティの固有状態となることに由来する。

従って、この項が  $D$  中間子散乱とチャーモニウム・中間子散乱のチャンネル ( $\bar{c}c - \bar{d}u$ ) の相互作用の振る舞いの違いを特徴付けることになる。

### $D$ 中間子散乱とテトラクォーク状態の関係

$\bar{c}c$  を含む2中間子状態と結合する内挿場  $O_1, O_2, O_3, O_4$  と、ダイクォーク・反ダイクォークペアの束縛状態 (テトラクォーク状態) と結合する内挿場  $O_5$  の関係を与える。  $Z^+(4430)$  と結合するテトラクォーク状態の内挿場は、荷電共役行列  $C = i\gamma^2\gamma^0$  を用いて以下のように記述できる。

$$O_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \epsilon_{dec} [(u_a^T C \gamma^5 c_b)(\bar{d}_d C \bar{c}_e^T) - (u_a^T C c_b)(\bar{d}_d \gamma^5 C \bar{c}_e^T)] \quad (1.2.18)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [(u_a^T C \gamma^5 c_b)(\bar{d}_a C \bar{c}_b^T) - (u_a^T C c_b)(\bar{d}_a \gamma^5 C \bar{c}_b^T)] - [(u_a^T C \gamma^5 c_b)(\bar{d}_b C \bar{c}_a^T) - (u_a^T C c_b)(\bar{d}_b \gamma^5 C \bar{c}_a^T)] \} \quad (1.2.19)$$

上式で、添え字  $a, b, c$  はスピノルのカラー量子数を意味する。局所的にゲージ不変となるためには、上式の各クォーク場の座標は全て同一に取られなければならない。フィエルツ変換 (Fiertz transformatoin) を用いてガ

ンマ行列の積の部分を書き換えると

$$(C\gamma^5)_{\alpha\beta}(C)_{\gamma\delta} - (C)_{\alpha\beta}(\gamma^5 C)_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu)_{\gamma\alpha}(\gamma^5\gamma_\mu)_{\delta\beta} + \frac{1}{2}(\gamma^5\gamma^\rho)_{\gamma\alpha}(\gamma_\rho)_{\delta\beta} \quad (1.2.20)$$

$$(C\gamma^5)_{\alpha\beta}(C)_{\gamma\delta} - (C)_{\alpha\beta}(\gamma^5 C)_{\gamma\delta} = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu)_{\delta\alpha}(\gamma^5\gamma_\mu)_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}(\gamma^5\gamma^\rho)_{\delta\alpha}(\gamma_\rho)_{\gamma\beta} \quad (1.2.21)$$

が成立する。これらを (1.2.19) に代入すると

$$O_t = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \{(\bar{d}_a\gamma^\mu u_a)(\bar{c}_b\gamma^5\gamma_\mu c_b) + (\bar{d}_a\gamma^5\gamma^\mu u_a)(\bar{c}_b\gamma_\mu c_b) + (\bar{c}_a\gamma^\mu u_a)(\bar{d}_b\gamma^5\gamma_\mu c_b) + (\bar{c}_a\gamma^5\gamma^\mu u_a)(\bar{d}_b\gamma_\mu c_b)\} \quad (1.2.22)$$

$$= -\frac{1}{2}O_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}(O_2 + O_3) \quad (1.2.23)$$

が得られる。 $O_1, O_2, O_3$  とは先ほど定義した  $D_1 \otimes D^*, \chi_{c1}(1P) \otimes \rho, J/\psi \otimes a_1$  に対応する内挿場に他ならない。すなわち、テトラクォーク状態の内挿場と中間子の2粒子状態の内挿場は独立関係には無いため、仮にテトラクォーク状態の内挿場から束縛状態が見つかったとしても、それはテトラクォーク型の描像が唯一無二のものであることを必ずしも意味せず、そして逆も然りである。本章の初めで述べたように、どちらが現実の束縛状態に近いのか、即ち、どれだけ分子状態か、それともテトラクォーク状態かという問いかけが、本来の望まれるべきものである。束縛状態が本当に存在したと仮定すると、この問題に対する回答は、その波動関数の空間分布を調べることで得られるであろう。しかし本研究は、現時点ではそこまで達してはいない。

### 1.2.3 有効質量

次のセクション以降で主に議論の対象となるのは、相関関数から引き出されるエネルギー固有値である。パイ中間子散乱の議論と同様に、以下で定義される有効質量がエネルギー固有値を決定する上で非常に重要な指標となる。ラップアラウンド効果を考慮しなければ、有効質量  $m_{\text{eff}}(t)$  は1粒子状態・2粒子状態ともに下式で定義される。

$$m_{\text{eff}}(t) \equiv \ln \left( R(t) + \sqrt{R(t)^2 - 1} \right) \quad (1.2.24)$$

$$R(t) \equiv \frac{C(t+1) + C(t-1)}{2C(t)} \quad (1.2.25)$$

このように関数形を選んだのは、ラップアラウンド効果と励起状態の寄与が無視出来れば  $C(t) \propto \cosh(-m(t - T/2))$  と振舞うため、

$$R(t) = \cosh(-m) \quad (1.2.26)$$

$$\rightarrow m_{\text{eff}}(t) = \ln(\cosh(-m) + \sinh(-m)) \quad (1.2.27)$$

$$= m \quad (1.2.28)$$

となるからである。ラップアラウンド効果が存在していても同様に有効質量が定義できるが、その場合やや煩雑な形式になるので、パイ中間子散乱の議論においては、ニュートン法による数値計算から有効質量を決めたのである。まずは上式で定義した  $m_{\text{eff}}(t)$  の振る舞いを各チャンネル・各クォーク質量について調べ、その上でラップアラウンド効果の影響が非常に大きいようであればパイ中間子散乱の議論と同様の手段でこれを処理することにする。

## 1.3 結果と解析

### 1.3.1 有効質量

図 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 に各チャンネルの 4 点の相関関数 (式 1.2.14 の対角成分) の有効質量をまとめた。シンク側の内挿場は 2 つの中間子の空間座標  $\vec{x}, \vec{y}$  それぞれについて独立に和が取られている。各図において左一列が  $V = 24^3$ , そして右一列が  $V = 16^3$  の場合のプロットとなっていて, 1 行目から下って行くにつれて,  $\kappa = 1.52, 1.525, 1.528, 1.531$  と, よりクォーク質量が小さい場合の有効質量に対応している。各図において藍色のプロット “4 point function” が 4 点の相関関数の有効質量に対応する。また, 桃色のプロット “mass thresholds” が相互作用が無い場合の 2 粒子の有効質量の和を意味し, 例えば図 1.2.14 では  $D_1$  と  $D^*$  をそれぞれ格子ボックス中に単独で置いた場合の有効質量の和  $m_{\text{eff}, D_1}(t) + m_{\text{eff}, D^*}(t)$  を与えたものとなる。そして赤線の “fit line” は 4 点の相関関数のフィットの結果を与える。詳しい議論は次のセクションで行うが, 4 点の相関関数の有効質量と “mass thresholds” を比較することで, 各チャンネルに引力が作用していることがわかる。特に  $D$  中間子の系では, クォーク質量についての依存性が有意に伺える。それぞれの図を見ると, パイ中間子散乱の際に与えた有効質量と比べて, ラップアラウンド効果はほとんど見られないことがわかる。 $\chi_{c1}(1P)\rho$  に対して,  $t \sim 20$  辺りようやく 4 点の相関関数の有効質量がカーブを描くのが見える程度である。 $D_1 D^*$ ,  $D D_0^*$  のチャンネルについても同様の振る舞いが見えるが, “mass threshold” のプロットと比較すると, 各々の 1 中間子の有効質量がプラトーが崩れたことに起因するものと有意には区別できないことが判る。 $J/\psi a_1$  に関しては, かなり早い時間でプラトーが崩れてしまうので, ラップアラウンド効果を議論できる状況ではない。従って以後の議論においては, これらのチャンネルについてはラップアラウンド効果を特に考慮しないことにする。

それぞれの有効質量のプロットにおいて, 基底状態に十分な精度で達していると推定できて, かつプラトーが崩れていない時間範囲を, フィット範囲 (fit range) とする。そして, それらの範囲で各々の相関関数に  $\chi^2$  フィットを施す。その際には, 励起状態に由来する系統誤差の影響をなるべく抑制するために, 4 点の相関関数と, それに対応する 1 中間子状態を記述する 2 種のハドロンの 2 点の相関関数を, 全て共通のフィット範囲でフィットすることに注意した。

まず,  $L \cdot T = 24^4 \cdot 48$  を見ると,  $D_1 D^*$ ,  $D D_0^*$  のチャンネルの有効質量が, かなり早い時間で基底状態に達している。しかし,  $t \sim 20$  前後ではプラトーが完全に崩れているので, その領域はなるべく避けてフィット範囲を決定した。 $\chi_{c1}(1P)\rho$  のチャンネルについては, ラップアラウンド効果の影響が有意に現れる領域を避けるようにフィット範囲を選んだ。 $J/\psi a_1$  は非常に早い時間でプラトーが崩れてしまっているため, 崩れていない時間領域でフィットを行った。この場合, 基底状態に達しているとは非常に考えにくいので, 相関関数のフィットから得られる全ての物理量に, 有意な励起状態に起因する系統誤差が含まれていると考えなくてはならない。各チャンネル・各クォーク質量についてのフィット範囲をどう選んだのかについては次のセクションで与える表 1.3 にまとめた。今回はパイ中間子散乱同様に基底状態のみを考えるので, 時間方向の周期的境界条件から

$$C_{ii}(t) = A \cosh(-m_{ii}(t - T/2)) \quad (1.3.1)$$

の関数形でフィットすれば良い。この関数形によって得られた各状態のエネルギー固有値についての議論は次のセクションで行う。

次に,  $L \cdot T = 16^3 \cdot 48$  で計算された相関関数から計算された有効質量に関しては,  $\chi_{c1}(1P)\rho$  のチャンネルを例外として, 非常に短時間でプラトーが崩れており,  $L = 24$  と同じフィット範囲でエネルギー固有値を読み取ることは大変難しい。そのため  $D_1 D^*$ ,  $D D_0^*$  の  $D$  中間子系の相関関数については,  $L \cdot T = 24^4 \cdot 48$  の場合と全くオーバーラップを持たない, 十分に基底状態に達してはいないと推測される領域でフィットを行わざるを得なかった。これによって,  $L \cdot T = 16^4 \cdot 48$  で計算された相関関数から引き出されたエネルギー固有値のうち,  $D$

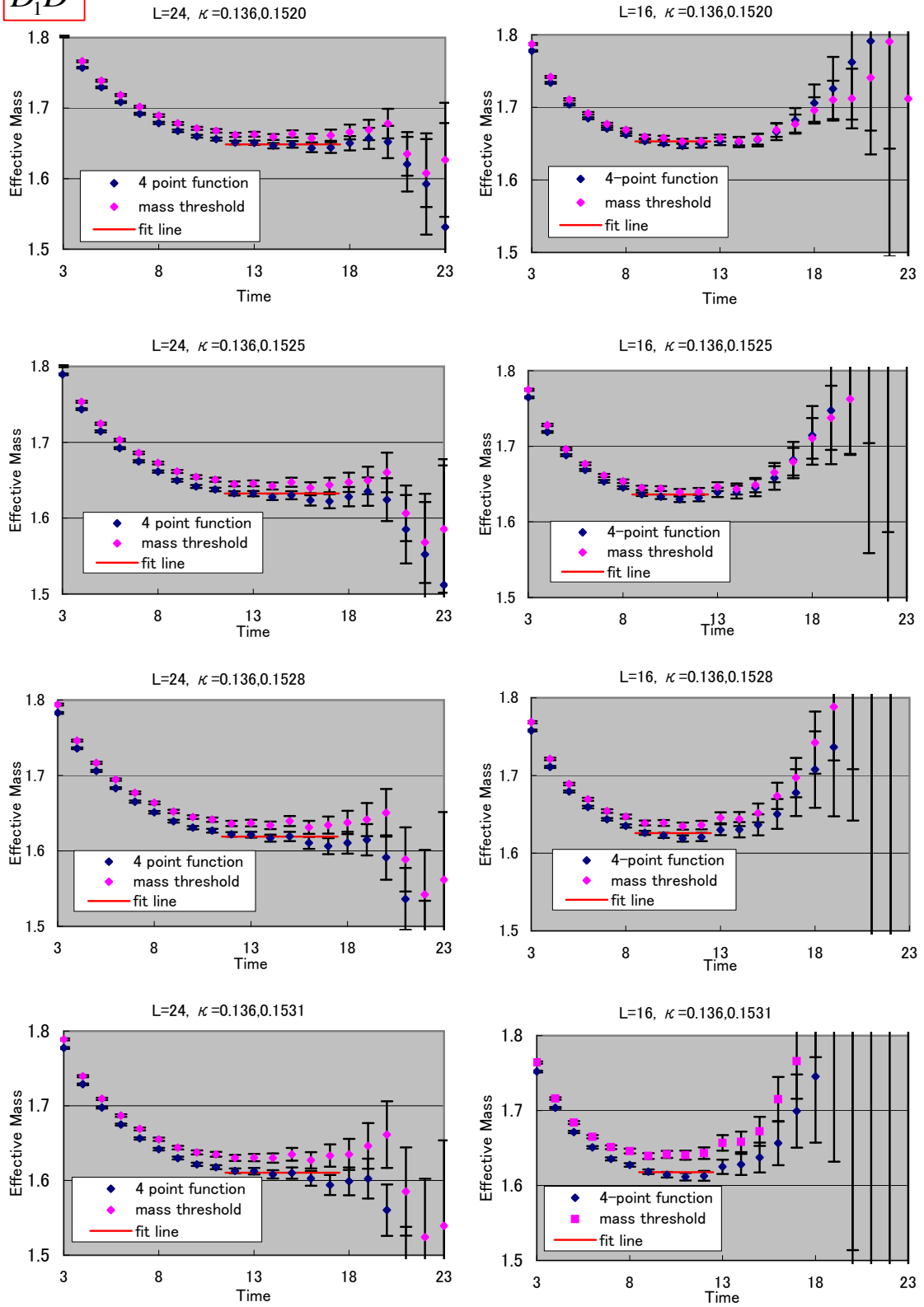
$D_1 D^*$ 

図 1.4:  $D_1 D^*$  の 4 点の相関関数の有効質量：図の読み方は本文中で説明する

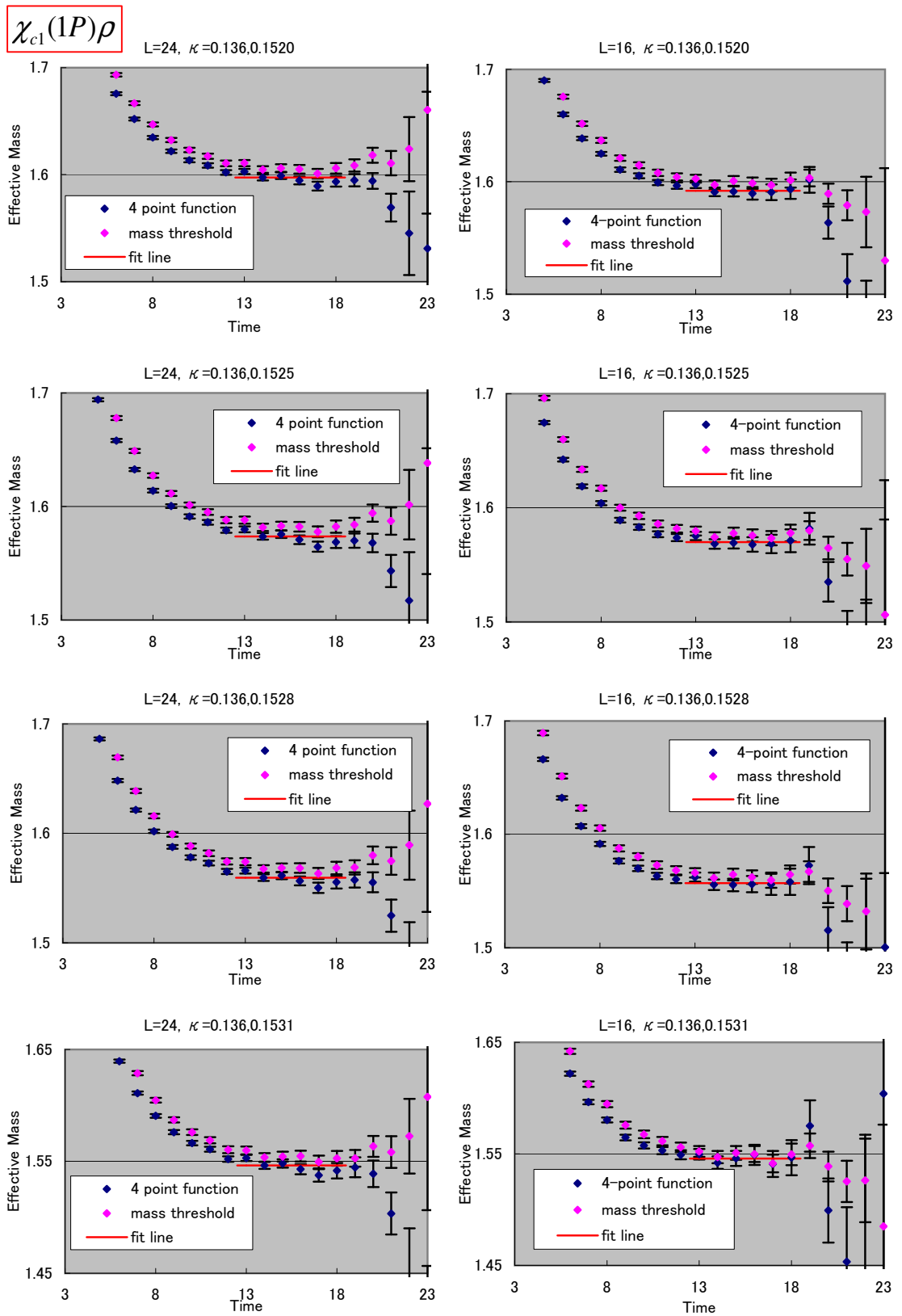


図 1.5:  $\chi_{cl}(1P)\rho$  の 4 点の相関関数の有効質量：図の読み方は本文中で説明する

$$J/\psi a_1$$

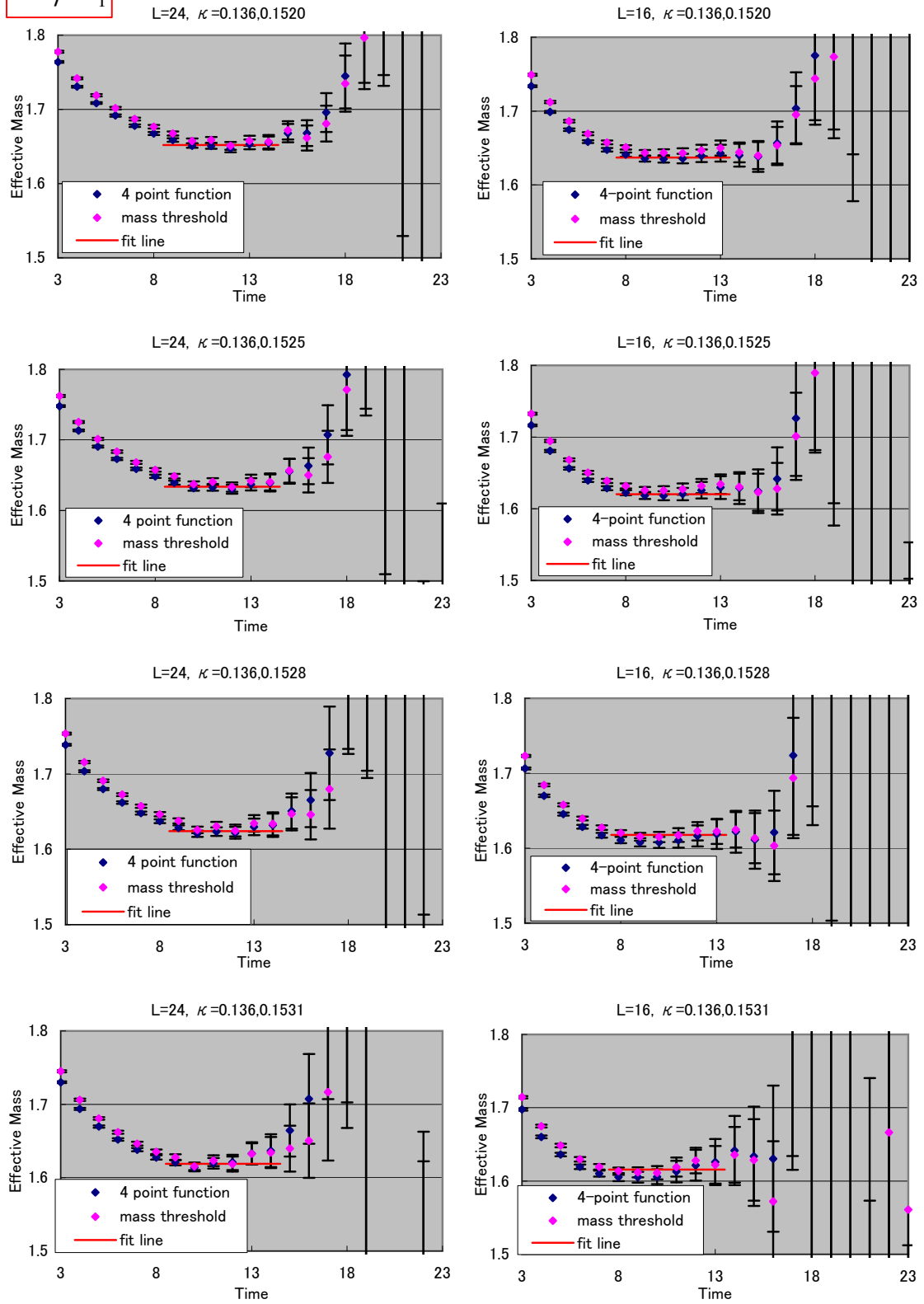


図 1.6:  $J/\psi \otimes a_1$  の 4 点の相関関数の有効質量：図の読み方は本文中で説明する

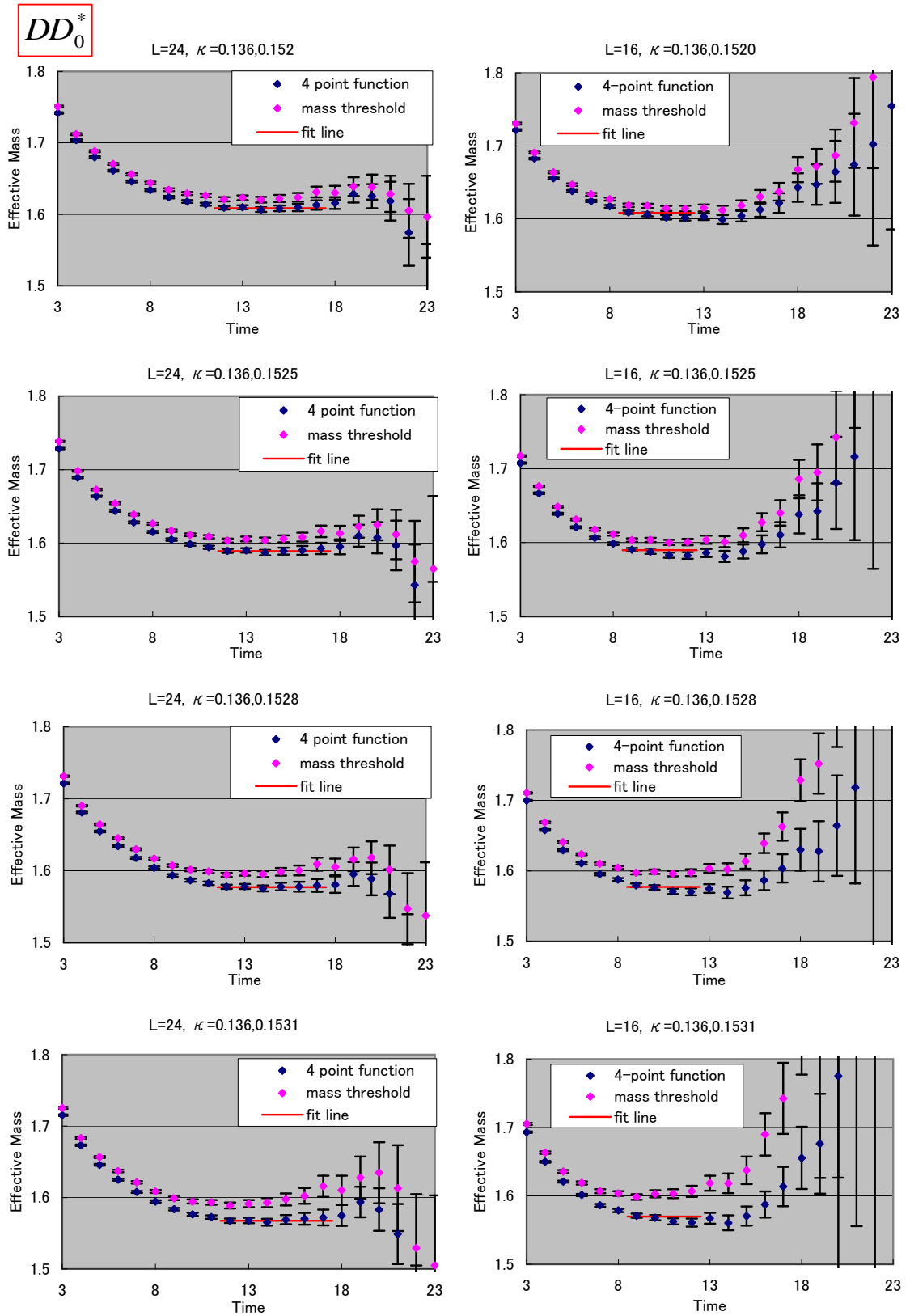


図 1.7:  $DD_0^*$  の 4 点の相関関数の有効質量：図の読み方は本文中で説明する

中間子散乱のチャンネルにおいては、 $L = 24$  で計算された固有値よりも励起状態の情報が有意に寄与している可能性が強い。それゆえ、物理長の体積依存性を議論する際には結果の不整合が生じる可能性が存在する。したがって、以下の議論においては、特に明記が無い限りは、 $L = 24$  で得られた結果に対する議論とする。

### 1.3.2 エネルギー固有値の解析

表 1.3 に、 $L = 24$  の場合の各チャンネル・各クォーク質量における統計数、2 中間子系のエネルギー、中間子単体の質量、そして中間子間の相互作用の強さの目安となる  $\delta E$  と  $\eta$  の値をまとめた。表中で、エネルギーの次元を持つ物理量は、格子単位系で記されている ( $m \rightarrow ma$ )。  $\delta E$  の定義は、パイ中間子散乱の場合と同様、4 点の相関関数から導き出される有限の箱の中に 2 粒子を置いたときのエネルギーより、2 点の相関関数より得られる 2 粒子の質量を引いた値 ( $\delta E \equiv m_{h_1 h_2} - m_{h_1} - m_{h_2}$ ) に他ならない。また  $\eta$  とは、

$$\eta \equiv q^2 = \frac{L^2 p^2}{4\pi^2} = \frac{L^2 \mu \delta E}{2\pi^2} \quad (1.3.2)$$

と定義される、有限体積中でのハドロン散乱とハドロン間の相互作用を理解する上で重要なパラメータである。上式で、 $\mu$  とは 2 粒子の換算質量、 $\mu \left( \equiv \frac{m_{h_1} \cdot m_{h_2}}{m_{h_1} + m_{h_2}} \right)$  である。  $\delta E$  についてはさらに図 1.8 に、各々の値を示した。図において、横軸はクォーク質量の目安となる  $1/\kappa$  であり、カイラル極限は  $1/\kappa_c$  に相当する。

有効質量を与えた際にも少し触れたが、まず図表より、全てのチャンネルにおいて引力が見えることが直ちに判る。特に  $D$  中間子  $D_1 D^*$ 、 $D D_0^*$  間には比較的強い引力が働いており、カイラル極限に近づいて行くにつれてさらに強くなるというクォーク質量依存性が明瞭に見える。一方で、 $\rho \chi_{c1}(1P)$ 、 $J\psi a_1$  のチャーモニウムと軽い中間子間に働く相互作用は、 $D$  中間子間よりもずっと弱い引力であり、クォーク質量依存性もほとんど見られないことが窺える。

チャーモニウム・中間子散乱のチャンネルと、 $D$  中間子散乱のチャンネルの相互作用振る舞いの違いは、前のセクションで図 1.3 を用いて議論したように、相関関数をクォーク伝搬関数で展開したときに含まれるプロセスを用いて説明することが出来る。つまり、前者のチャンネルに於いては、2 粒子はグルーオンの交換を通じて相互作用を行うが、グルーオンとクォークの結合の強さはクォークの質量とは独立な量であるから、相互作用の強さの指標である  $\delta E$  もクォーク質量についての依存性は持たないのである。一方で、後者の  $D$  中間子散乱のチャンネルにおいてはグルーオンの交換を通じた相互作用に加えて、中間子の入れ替えを通じた相互作用の項が現れる。後者の相互作用は、異なるディラック構造を持った 2 種の 2 粒子状態の間の結合に由来する効果であり、クォーク質量に陽に依存する相互作用である。それぞれのチャンネルの相互作用をクォーク質量の依存性という観点から比較したときに、有意な差が現れるのはこれが主たる理由であり、 $D$  中間子散乱のチャンネルにおいてはこの項に由来する効果が引力をより強める方向に働いている。

格子シミュレーションによる散乱長の計算には、散乱長  $a_0$  と箱の大きさ  $L$  の比  $a_0/L$  についての展開形で与えられる以下のルシャールの公式がしばしば用いられる。

$$\delta E = -\frac{2\pi a_0}{\mu L^3} \left\{ 1 + c_1 \frac{a_0}{L} + c_2 \frac{a_0^2}{L^2} + O\left(\frac{a_0^3}{L^3}\right) \right\} \quad (1.3.3)$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\pi} Z_{00}(1,0) = -2.837297 \\ c_2 = \frac{1}{\pi^2} \{Z_{00}(1,0)^2 - Z_{00}(2,0)\} = 6.375183 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

しかし、式 (1.3.3) の収束半径は、 $\delta E$  が負の側では斥力側と比べて非常に小さいため、引力の解析には必ずしも適切とは言えない。本計算においては、得られた  $\delta E$  が負で大きいことから、 $\eta$  は式 (1.3.3) の収束半径の外



表 1.3:  $V \cdot T = 24^3 \cdot 48$  の解析結果

Channel	$\kappa$	N	fit range	$m_{h_1 h_2}$	$m_{h_1}$	$m_{h_2}$	$\delta E$	$\eta$
$D_1 D^*$ ( $h_1 = D^*$ ) ( $h_2 = D_1$ )	0.1520	2000	12-17	1.6486(30)	0.73390(41)	0.9271(28)	-0.0124(10)	-0.148(12)
	0.1525	2000	12-17	1.6301(35)	0.72383(44)	0.9204(33)	-0.0141(14)	-0.167(16)
	0.1528	1999	12-17	1.6190(39)	0.71784(46)	0.9177(38)	-0.0165(17)	0.194(20)
	0.1531	1993	12-17	1.6103(47)	0.71168(50)	0.9188(48)	-0.0201(25)	-0.236(30)
$\chi_{c1} (1P)\rho$ ( $h_1 = \rho$ ) ( $h_2 = \chi_{c1}$ )	0.1520	2000	13-18	1.5973(22)	0.37197(66)	1.2338(17)	-0.00846(84)	-0.0706(70)
	0.1525	2000	13-18	1.5736(23)	0.34889(81)	1.2338(17)	-0.0090(10)	-0.0717(80)
	0.1528	1993	13-18	1.5596(24)	0.33490(96)	1.2338(17)	-0.0091(12)	-0.0697(93)
	0.1531	1993	13-18	1.5464(27)	0.3207(12)	1.2337(17)	-0.0080(16)	-0.059(12)
$J/\psi a_1$ ( $h_1 = a_1$ ) ( $h_2 = J/\psi$ )	0.1520	2000	9-12	1.6522(32)	0.59178(31)	1.06673(31)	-0.00632(66)	-0.0702(73)
	0.1525	2000	9-12	1.6338(40)	0.57351(38)	1.06673(31)	-0.00641(82)	-0.0697(89)
	0.1528	1993	9-12	1.6240(47)	0.56368(46)	1.06673(31)	-0.00638(99)	-0.069(11)
	0.1531	1993	9-12	1.6191(59)	0.55619(59)	1.06671(31)	-0.0038(17)	-0.041(19)
$D D_0^*$ ( $h_1 = D$ ) ( $h_2 = D_0^*$ )	0.1520	2000	12-17	1.6085(27)	0.71036(35)	0.9115(28)	-0.01329(96)	-0.155(11)
	0.1525	2000	12-17	1.5890(31)	0.69952(37)	0.9054(34)	-0.0159(13)	-0.183(15)
	0.1528	1993	12-17	1.5773(35)	0.69310(39)	0.9033(39)	-0.0191(16)	-0.218(18)
	0.1531	1993	12-17	1.5676(41)	0.68659(42)	0.9066(49)	-0.0256(23)	-0.292(26)

表 1.4:  $V \cdot T = 16^3 \cdot 48$  の解析結果

Channel	$\kappa$	N	fit range	$m_{h_1 h_2}$	$m_{h_1}$	$m_{h_2}$	$\delta E$	$\eta$
$D_1 D^*$ ( $h_1 = D^*$ ) ( $h_2 = D_1$ )	0.1520	3000	9-12	1.6507(24)	0.73260(55)	0.92430(20)	-0.0062(11)	-0.0328(57)
	0.1525	2999	9-12	1.6337(27)	0.72277(59)	0.92013(24)	-0.0092(14)	-0.0484(72)
	0.1528	2995	9-12	1.6232(29)	0.71693(62)	0.92061(28)	-0.0144(17)	-0.0752(89)
	0.1531	2777	9-12	1.6152(35)	0.71094(69)	0.92934(38)	-0.0251(26)	-0.131(14)
$\chi_{c1} (1P)\rho$ ( $h_1 = \rho$ ) ( $h_2 = \chi_{c1}$ )	0.1520	3000	13-18	1.5921(34)	0.3693(12)	1.2302(18)	-0.0075(22)	-0.0275(81)
	0.1525	2999	13-18	1.5699(28)	0.3463(15)	1.2301(18)	-0.0066(27)	-0.0231(94)
	0.1528	2995	13-18	1.5570(42)	0.3330(18)	1.2303(18)	-0.0062(31)	-0.021(11)
	0.1531	2777	13-18	1.5458(52)	0.3194(24)	1.2301(19)	-0.0037(41)	-0.012(14)
$J/\psi a_1$ ( $h_1 = a_1$ ) ( $h_2 = J/\psi$ )	0.1520	3000	9-12	1.6355(46)	0.5822(41)	1.06158(32)	-0.0083(11)	-0.0403(52)
	0.1525	2999	9-12	1.6189(58)	0.5652(52)	1.06158(32)	-0.0079(14)	-0.0379(65)
	0.1528	2995	9-12	1.6085(68)	0.5549(62)	1.06161(32)	-0.0081(16)	-0.0381(73)
	0.1531	2777	9-12	1.6071(94)	0.5535(86)	1.06171(33)	-0.0081(25)	-0.0382(12)
$D D_0^*$ ( $h_1 = D$ ) ( $h_2 = D_0^*$ )	0.1520	3000	9-12	1.6062(23)	0.70963(48)	0.9071(21)	-0.01056(92)	-0.0545(48)
	0.1525	2999	9-12	1.5876(26)	0.69904(51)	0.9033(25)	-0.0147(12)	-0.0753(63)
	0.1528	2995	9-12	1.5762(28)	0.69265(54)	0.9047(30)	-0.0211(16)	-0.1072(82)
	0.1531	2777	9-12	1.5678(34)	0.68615(61)	0.9152(41)	-0.0336(26)	-0.171(13)

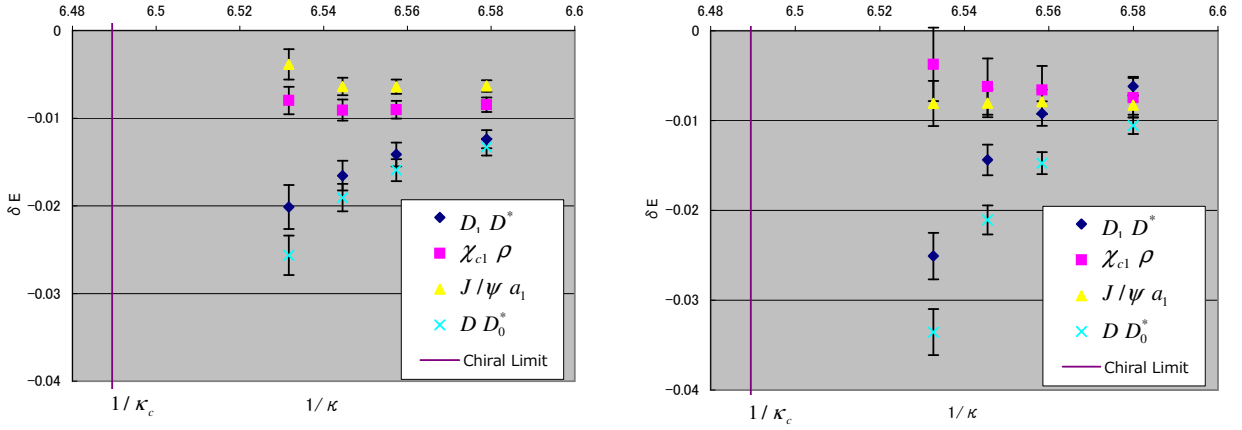


図 1.8: 各チャンネルにおける  $\delta E$  の大きさとそのクォーク質量依存性：縦軸は  $\delta E$  の大きさ、横軸は  $1/\kappa$  を意味し、左図と右図はそれぞれ、 $L = 24$  と  $L = 16$  で得られた  $\delta E$  に相当する。プロットの色はチャンネルに対応し、横軸と垂直な直線  $1/\kappa_c$  はカイラル極限である。

に存在している可能性が非常に強いため、 $a_0/L$  について展開する前の式

$$p \cot \delta_0(p) = -\frac{1}{\pi L} S(\eta) \quad (1.3.5)$$

$$\eta \equiv \frac{L^2 p^2}{4\pi^2} \quad (1.3.6)$$

を用いる必要がある。 $S(\eta)$  のグラフより、一般に引力側では斥力側よりも、 $\delta E$  の統計誤差に由来する  $a_0/L$  の誤差は大きくなるため、相関関数の数値計算には高い統計精度が要求されることが読み取れる。

散乱長  $a_0$  及び、高次の散乱パラメータ  $r_i$  と、相互作用による位相差とを結びつける関係式

$$p \cot \delta_0(p) = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (r_i^2 p^2)^i \quad (1.3.7)$$

を合わせると

$$\frac{a_0}{\pi L} = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \frac{1}{-S\left(\frac{p^2 L^2}{4\pi^2}\right) + \frac{1}{2} 2\pi^2 \frac{2\pi r_0}{L} \left(\frac{pL}{2\pi}\right)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi r_i}{L}\right)^2 \left(\frac{pL}{2\pi}\right)^2\right]^i} \quad (1.3.8)$$

$$= \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \frac{1}{-S(\eta) + \pi^2 \frac{2\pi r_0}{L} \eta \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi r_i}{L}\right)^2 \eta\right]^i} \quad (1.3.9)$$

$$\sim \frac{1}{-S(\eta)} \quad (1.3.10)$$

を得る。ゆえに散乱パラメータ  $r_i$  に対して  $L$  が十分に大きく、かつ  $\eta$  が小さければ、 $S(\eta_c) = 0$  を満たす  $\eta_c$  と散乱長が発散する  $\eta$  を同一視することが可能となる。従って、 $\eta$  の値と散乱長の値を関係付けることによって、それぞれの状態を

1. 斥力的な散乱状態
2. 引力的な散乱状態

### 3. 束縛状態

に分類することが可能となる。そこで、格子シミュレーションによって計算された相関関数より得られた  $\eta$  と、 $a_0/L \sim (\frac{1}{\pi}S(\eta))^{-1}$  のグラフの交点を図 1.9 にまとめた。図において、曲線が  $a_0/L$  の  $\eta$  についての振る舞いを示し、 $\eta_c$  は先ほど与えた散乱長が発散する特異点を示す。図中のプロットは、各チャンネル・各クォーク質量における相関関数の解析から得られた  $\eta$  であり、上図は全てのチャンネルの情報を一つにまとめた図であり、下の4図は各チャンネルについて抜粋したものである。各プロットの誤差は、相関関数の統計誤差に由来するものである。

図より、 $\chi_{c1}(1P)\rho$ ,  $J/\psi a_1$  のチャーモニウムと軽い中間子の弱い引力が働くチャンネルに関しては、 $\eta_c > \eta > 0$  という引力的な散乱状態であることがわかる。これらについては、式 (1.3.10) を用いて各クォーク質量における散乱長の計算を行った。値の提示、及び考察については次のサブセクションで行う。

一方で  $D_1 D^*$  と  $D D_0^*$  の  $D$  中間子散乱の比較的強い引力が働くチャンネルにおいては、全てのクォーク質量について  $\eta > \eta_c$  を満たすことが直ちにわかる。これは、 $D_1 D^*$  と  $D D_0^*$  がそれぞれ束縛状態であることを示唆する。

一般に、束縛状態は有限体積中で、 $\eta > \eta_c$  において現れる。すなわち、 $\eta \sim \eta_c$  が丁度束縛状態を作るエネルギーで、このときが束縛エネルギー  $E_b = 0$  に対応する。従って、有限体積中で測定された相関関数から読み取られる  $\delta E$  そのものが、無限体積中での束縛エネルギーにはならない。また、 $\eta_c$  の値自体は箱の大きさに顕著に依存する量であるから、「体積を変化させていったときに、エネルギー固有値が変化しない状態が束縛状態である」という主張は、厳密には正しくない。メソンやバリオンの1粒子状態のように、硬く強く束縛しているか、箱の大きさが非常に大きい場合には  $\delta E \sim E_b$  とみなすことが出来る。しかし2つのメソンの束縛状態のような緩く弱い相互作用を扱う場合や、箱の大きさがそれほど大きいわけではない場合には、有意に影響が出ると考えられる。

無限体積と有限体積で、束縛エネルギーにどの程度の差が出るかについては、式 (1.3.6) と束縛条件を作る条件  $\gamma + p \cot \delta_0(p)|_{p^2=-\gamma^2} = 0$  より与えられる。

$$-\gamma = \frac{1}{\pi L} S(\eta) \quad (1.3.11)$$

右辺の  $\eta = \frac{\mu \delta E}{2\pi^2}$  が有限の箱で測定された相関関数から引き出される物理量で、左辺の運動量  $\gamma$  が束縛状態での運動量を与える。この関係を用いると、束縛エネルギーと格子上で測定されるエネルギーとの関係を与えることが可能となり、

$$\eta_b \equiv -\frac{L^2}{4\pi^2} \gamma^2 \quad (1.3.12)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^4} S(\eta)^2 \quad (1.3.13)$$

$$E_b \equiv -\frac{\gamma^2}{2\mu} \quad (1.3.14)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 L^2 \mu} S(\eta)^2 \quad (1.3.15)$$

等の関係式が得られる。図 1.11 に、上式 (1.3.15) で記述される、格子上で測定された2粒子間の相互作用の大きさと、無限体積での束縛エネルギーとの関係を与える。左図が、 $E_b$  を  $\eta$  の関数として  $L$  に陽に依存しない関数形でグラフを書いた場合で、右図は  $a^{-1} \sim 2.8[\text{GeV}]$ ,  $\mu \sim 0.4(D_1 D^*$  の換算質量に相当) を代入し、箱の大きさを  $L = 16 (\sim 1.1[\text{fm}])$  と  $L = 24 (\sim 1.7[\text{fm}])$ , そして比較のために箱の大きさを  $L = \infty (E_b = \delta E)$  と  $L = 32 (\sim 2.1[\text{fm}])$  に設定された、体積依存性を露わに入れた場合のグラフである。どちらの図も、横軸が格子上で測定された物理量  $\eta$ ,  $\delta E$  に相当し、縦軸がそれを無限体積へと焼き直した値に相当する。

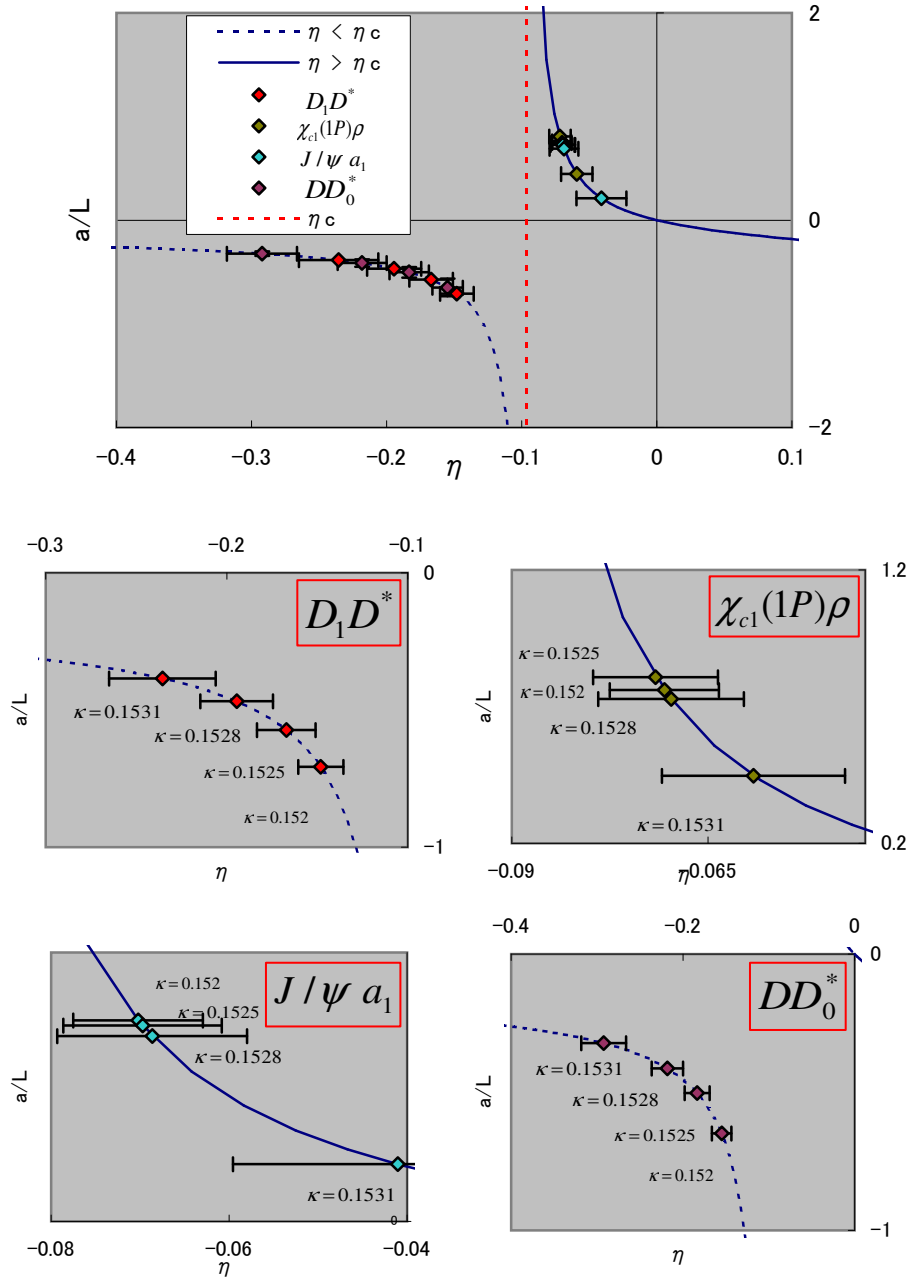


図 1.9:  $\eta$  の値による各状態の分類 ( $L = 24$ )

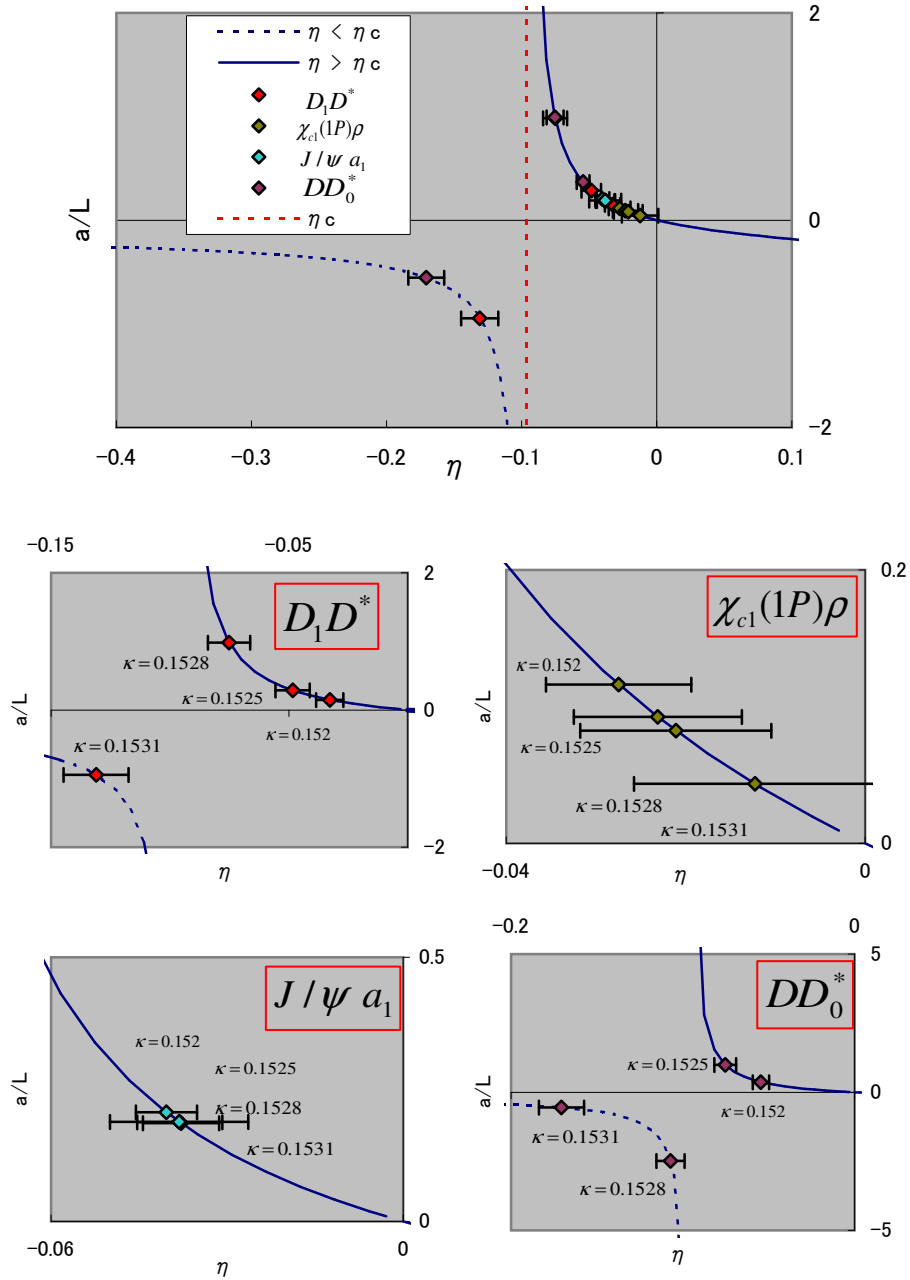


図 1.10:  $\eta$  の値による各状態の分類 ( $L = 16$ )

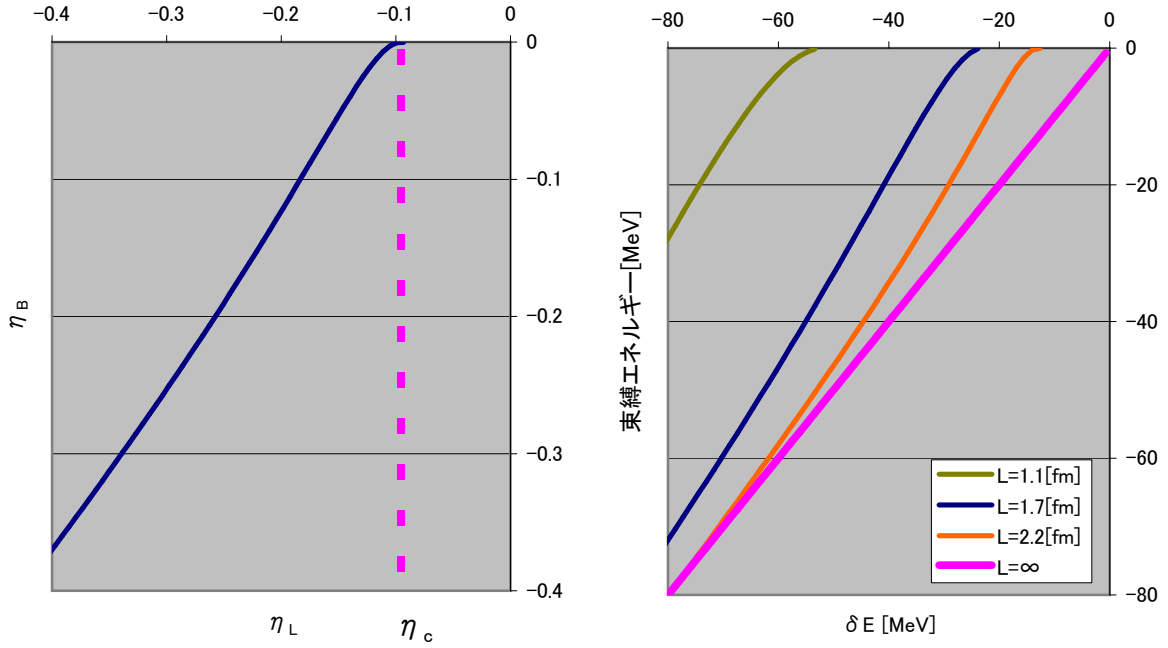


図 1.11: 束縛エネルギー  $E_b$  と格子上で測定される  $\delta E$  の比較：左図が陽に箱の大きさ  $L$  に依存しない形で書かれたグラフで、横軸が  $\eta(L)$ 、縦軸が  $\eta_b$  である。右図は  $L$  に依存する形で書かれたグラフで、横軸が  $\delta E$ 、縦軸が束縛エネルギー  $E_b$  である。

グラフより、有限体積効果に起因する束縛エネルギーのずれは、先に議論したように相互作用の大きさ  $\gamma$  と箱の大きさ  $L$  が小さい場合に、大きく寄与することがわかる。

$L = 24$  については、 $\delta E \sim 100$  [MeV] 近傍までいけば、束縛エネルギー  $E_b$  と  $\delta E$  は有意な差が出ないことがわかる。しかし、得られた  $\delta E$  の値は、 $D_1 D^*$  についても、それよりも引力がやや強い  $DD_0^*$  のチャンネルの場合においてもなお、 $\delta E = -30 \sim -60$  [MeV] 程度であるから、有限体積効果は正しく考慮しなければならない。

$L = 16$  に関しては有限体積効果が非常に大きいため、仮に束縛状態が見えたとしても、相関関数から得られる  $\delta E$  と  $E_b$  の値には大きくずれが生じることがわかる。 $L = 32$  になれば、 $\delta E$  はより速く  $E_b$  に収束するが  $\delta E = -0.005 \sim -0.01$  ( $-15 \sim -30$  [MeV]) の領域では、無視できない影響が生じる。

D 中間子の分子状態は、2つの中間子を結ぶ束縛エネルギーが、数 MeV 程度の状態であると考えられている。もしそのような状態が正しく格子上で観測されたとすれば、それは図 1.11 の右図においてほとんど x 軸の近傍に位置するため、 $\eta_c$  の体積依存性を露わに受けることになる予想される。したがってこのとき格子上で測定される  $\delta E$  は体積の変化に対して

$$\delta E \propto \frac{1}{L^2} \quad (1.3.16)$$

と振舞うと考えるのが自然である。

### 1.3.3 系統誤差の評価と結果の議論

2.4 節で提示されたように、格子シミュレーションから得られた物理量を現実世界へと外挿するためには幾つかの考慮すべき系統誤差が存在する。

- 格子空間のサイズが有限であることに起因する系統誤差
- クォーク質量が現実世界の値よりも重いことに由来する系統誤差

パイ中間子散乱のように、相互作用が系の対称性等から決定されていれば、これらの系統誤差を評価することが出来る。しかし、この系における相互作用の振る舞いは非自明であるため、上で挙げた系統誤差の内、前者については体積を変えた計算を行うことによって、その影響を調査し、後者については簡単な関数形を仮定することによって評価を行った。

そして最終的に得られた結果について簡潔に議論を行った。

#### 体積依存性

散乱長を計算するためのルシャールの公式 (1.3.6) や、前セクションで与えた有限体積におけるエネルギー固有値の束縛エネルギーへの変換公式 (1.3.15) の箱の大きさ  $L$  依存性より明らかなように、格子シミュレーションより得られた物理量の体積依存性の議論は、4 点の相関関数の計算によって同定された状態を理解するうえで非常に重要な役割を果たす。

これまでの議論に於いても度々触れられてきたが、我々は物理量の体積依存性を調べるために、 $L^3 \cdot T = 24^3 \cdot 48$  だけではなく  $L^3 \cdot T = 16^3 \cdot 48$  についても同様の計算を行った。有効質量の結果については図 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 の右図に、各チャンネル毎に与えた。有効質量の振る舞いについては、既に述べたように、特に  $D$  中間子散乱のチャンネルにおいて、非常に早い時間でプラトーが崩れているため、エネルギー固有値を正しく見積もることが大変難しくなっている。

そしてフィットの結果については表 1.4,  $\delta E$  については表 1.8 の右に、 $\delta E$  から計算された  $\eta$  と  $S(\eta)$  の交点は図 1.10 にまとめた。これらの結果を見ると上で述べた  $D$  中間子散乱のチャンネルはもちろんのこと、 $L^3 \cdot T = 16^3 \cdot 48$  においても比較的安定なプラトーを見いだせた  $\chi_{c1}(1P)\rho$  のチャンネルにおいても尚、整合性が取れていないことがわかる。ここでいう整合性とは、

- 体積を変化させても、各チャンネルの散乱長と束縛エネルギー  $E_b$  の値は不変で無ければならない

ということである。束縛エネルギー  $E_b$  や散乱長は本来体積に依存しない物理量であるから、これは非常に最もらしい主張と言える。ルシャールの公式の展開式 (1.3.3) の主要項や、束縛エネルギーの公式 (1.3.15) から、 $\delta E$  は、

$$\delta E \propto \frac{1}{L^3} \quad (\text{散乱状態}) \quad (1.3.17)$$

$$\delta E \propto \frac{1}{L^2} \quad (\text{束縛状態}) \quad (1.3.18)$$

と振舞うはずである。すなわち、散乱状態であろうが束縛状態であろうが

$$\delta E(L=24) < \delta E(L=16) \quad (1.3.19)$$

は必ず満たされなければならない。 $\frac{24^3}{16^3} \sim 3$ ,  $\frac{24^2}{16^2} \sim 2$ であるから、散乱状態ならば  $\delta E$  は3倍程度ずれ、束縛状態ならば  $\delta E$  はおおよそ2倍ずれる。しかし、表 1.4 と表 1.3 より格子シミュレーションによって得られた  $\delta E$  を比較すると、ほぼ全チャンネルに渡って  $\delta E(L=24) \geq \delta E(L=16)$  となっており、不等式 (1.3.19) は全く満たされていないことが直ちに分かる。その結果として、図 1.10 と図 1.9 を比べると、一方の体積では束縛状態であったものが体積を変えることで散乱状態へとシフトしたり、同じ散乱状態であっても散乱長の値はまるで食い違うといった問題が生じる。先ほど述べたように、 $D$  中間子散乱のチャンネルについては、 $L=16$  で計算された4点の相関関数のフィットを、有効質量がプラトーに達する以前の、励起状態の寄与が無視できないと予測される領域で行った。ゆえに、フィットにより得られた固有エネルギーから計算される  $\delta E$  が、1.3.19 で期待される体積依存性を示さない理由を、有意に残された励起状態に求めることが出来るように思える。しかし、 $L=16$  においても安定したプラトーが有効質量に見られた、 $\chi_{cl}(1P)\rho$  のチャンネルにおいても、同様に体積依存性についての問題が存在する。その安定したプラトーから、 $\chi_{cl}(1P)\rho$  には励起状態の寄与はほとんど無視できるか、存在したとしても  $L=24$  と  $L=16$  で有意な差があるとは考えにくい。したがって、物理量が期待される体積依存性を示さない理由を、励起状態の寄与に求めるのは困難である。

この不整合の原因を考察すると、可能性としてまず考えられることは、ループ積分に由来する有限体積効果である。しかし中間子の質量に対する補正項も、ルシャールの公式そのものに対する補正項も、どちらもそれぞれ指数関数的に働く補正項であり、観測量に対してせいぜい数%の影響しか及ぼさないため、これが主たる要素とは考えにくい。次に考えられることは、高次の散乱パラメータの影響であるが、これだけで説明が出来るほど強くは影響しない。最後に考えられることは、体積が小さい余りそもそもルシャールの公式を用いることが出来なかったということである。ルシャールの公式を用いるに当たっては、箱の一辺の長さ  $L$  が相互作用のレンジより十分大きいことが必要とされる。しかし  $L=16(\sim 1 \text{ [fm]})$  という箱の大きさはこの条件を満たすほどの大きさでは無かったために、4点の相関関数から引き出されるエネルギー固有値に、非自明な影響が加わったのではないかと考えられる。この影響を正しく定量的に理解するためには、 $L=16, 24$  だけではなく、 $L=32, 48 \dots$  といった、より大きな空間での計算の情報が必要となる。

しかしながら、全てのチャンネルに渡って  $\eta$  の値には体積に対する系統的な依存性が窺える。図 1.12 と図 1.13 に各チャンネルで計算された  $\eta$  の値を与えた。図より、各チャンネルにおいて  $\eta(L=24) \sim \eta(L=16) + C$  ( $C$ : 負の定数) と振る舞っていることが分かる。実際のチャーム中間子間の相互作用の詳細 (中間子間の距離依存性) は、全くの未知のものであるため、定性的な議論を行うのは非常に厳しいが、少なくとも束縛状態・散乱状態を判別するパラメータである  $\eta_c$  は体積に依存しないパラメータであることと、 $C$  の符号を踏まえると、 $D$  中間子散乱の最もクォーク質量が軽い領域では、体積を無限大へと外挿してもなお、束縛状態のままではないかと推測できる。繰り返しになるが、この推測を検証するためには、さらに体積依存性を詳しく調査しなければならない。

いずれにせよ、 $L=16$  よりも  $L=24$  の計算結果の方が信頼性は高いことは間違いのないため、以後の議論においては、 $V \cdot T = 24^3 \cdot 48$  に限って議論を行うことにする。

## カイラル外挿

表 1.5 に各チャンネル・各クォーク質量で得られた  $\cot \delta_0$  ( $\delta_0$  は位相差) の値と、カイラル外挿のためのパイ中間子質量  $m_\pi$ 、散乱長  $a_{a0}$ 、そして束縛エネルギー  $E_b$  を与えた。散乱長と束縛エネルギーに関しては、後述するカイラル外挿によって得られた物理的極限  $m_\pi = 140 \text{ [MeV]}$  での値も与えている。



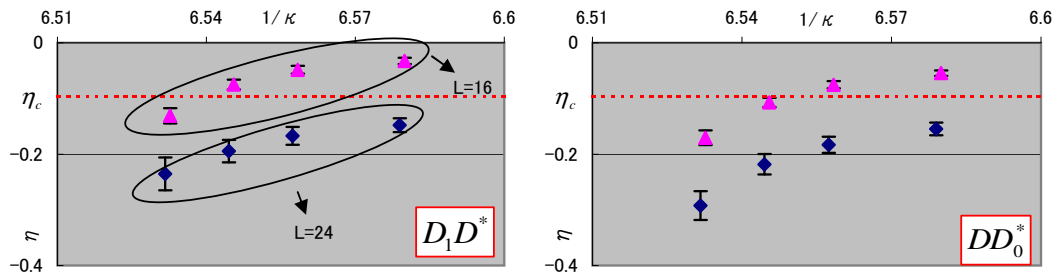


図 1.12:  $D$  中間子散乱のチャンネルにおける  $\eta$  の体積依存性：藍色の菱形のプロットが  $L = 24$  における計算で、桃色の三角形のプロットが  $L = 16$  での計算に対応する。横軸と平行な破線は  $\eta_c$  である。

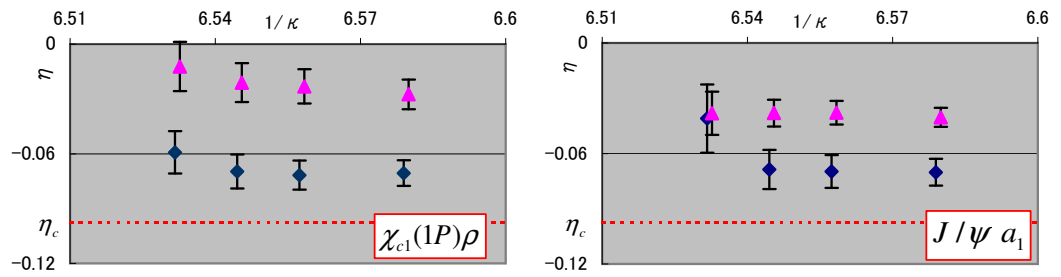


図 1.13: 中間子・チャーモニウム散乱のチャンネルにおける  $\eta$  の体積依存性：藍色の菱形のプロットが  $L = 24$  における計算で、桃色の三角形のプロットが  $L = 16$  での計算に相当する。横軸と平行な破線は  $\eta_c$  である。

## D 中間子散乱

先ほどの議論を通して得られた、有限体積で測定された相互作用から変換された無限体積での束縛エネルギーに対して、 $m_\pi \rightarrow 140[\text{MeV}]$  の物理的極限へとカイラル外挿を施す。 $D_1D^*$  と  $DD_0^*$  のどちらも、相互作用の大きさは、クォーク質量に対して強い依存性を示している。しかし、 $D$  中間子間の相互作用がクォーク質量やパイ中間子質量に対してどのように振舞うかは全く未知のものである。そこで、 $D$  中間子系については、以下で与えられる一次関数での外挿を行った。

$$E_b = c_0 + c_1 m_\pi^2 \quad (c_0, c_1 \text{ は定数}) \quad (1.3.20)$$

外挿の結果を与えるグラフを図 1.16 に示す。カイラル外挿によって、最終的に以下の束縛エネルギーを得た。

$$E_{b D_1 D^*} = -55 \pm 12 [\text{MeV}] \quad (1.3.21)$$

$$E_{b D D_0^*} = -81 \pm 11 [\text{MeV}] \quad (1.3.22)$$

おおよそ  $2[\text{GeV}]$  の質量を持った2つの  $D$  中間子に対して、これらの束縛エネルギーはその3~4%の値となる。一方で、初めに述べたように  $Z^+(4430)$  を  $D_1D^*$  の分子状態として考えたならばその束縛エネルギーはせいぜい数 MeV であるため、ここで得られた値はそれよりも、やや大きい。

しかしながら、先に述べたように、そもそもこの計算は有効距離等の高次の散乱パラメータを完全に無視した議論である。仮にそれらの寄与が有意にあるのならば、束縛状態を作る閾値の  $\eta_c$  にはずれが生じるため、束縛エネルギーもその分だけずれるか、もしくは束縛状態では無い引力的な散乱状態に分類される可能性も十分に存在する。また、この計算はクエンチ近似の下で行われているので、仮想的なクォークのループの効果は完全に削除されており、現実世界での相互作用とは食い違いが存在する。従って、この計算より得られた束縛エネルギーと、 $Z^+(4430)$  を  $D_1D^*$  の分子状態として考えた場合の実験値から計算された束縛エネルギーは決して矛盾するものではない。

重要なことは、 $Z^+(4430)$  と結合する量子数を持った2つの  $D$  中間子の間には、束縛状態を作り得るほどの引力が働くということが本研究によって判ったことである。

## チャーモニウム-中間子散乱

チャーモニウム-中間子の系についても、得られた散乱長に対してカイラル外挿を施す。 $k \cot(k) = \frac{1}{\pi L} S(\eta)$  の概形から、 $\delta E$  の誤差に対して引力の散乱状態は大きな誤差を持つことがわかる。加えて、本計算の精度ではクォーク質量に対する散乱長の依存性はほとんど見られない。従って、以下で与えられる定数での外挿を行う。

$$a_0 = c_0 \quad (c_0 \text{ は定数}) \quad (1.3.23)$$

外挿の結果を与えるグラフを図 1.14 に示す。最終的にカイラル外挿によって、以下の散乱長を得た。

$$a_{0 \chi_{c1}(1P)\rho} = 1.07 \pm 0.24 [\text{fm}] \quad (1.3.24)$$

$$a_{0 J/\psi a_1} = 0.77 \pm 0.21 [\text{fm}] \quad (1.3.25)$$

$$(1.3.26)$$

これら  $\chi_{c1}(1P)\rho$  と  $J/\psi a_1$  のチャンネルについても、束縛状態を作り得るほど強くはないが、有意な引力が見えたと言える。

表 1.5: 解析により得られた物理量

Channel	$\kappa$	$m_\pi^2$	$p \cot \delta_0(p)$	$a_0$	$E_b$
$D_1 D^*$	0.1520	0.07850(25)	-0.0589(99)	-	-0.0042(14)
	0.1525	0.05997(23)	-0.073(11)	-	-0.0065(19)
	0.1528	0.04815(23)	-0.089(11)	-	-0.0098(24)
	0.1531	0.03555(32)	-0.108(12)	-	-0.0146(33)
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	-	-0.0196(42)
$\chi_{c1}(1P)\rho$	0.1520	0.07850(25)	0.0548(20)	18.3(6.6)	-
	0.1525	0.05997(23)	0.0516(22)	19.4(8.3)	-
	0.1528	0.04815(23)	0.0572(27)	17.5(8.3)	-
	0.1531	0.03555(32)	0.093(47)	10.7(5.4)	-
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	15.3(3.4)	-
$J/\psi a_1$	0.1520	0.07850(25)	0.0558(21)	17.9(6.7)	-
	0.1525	0.05997(23)	0.0572(26)	17.5(7.9)	-
	0.1528	0.04815(23)	0.0604(32)	16.6(8.7)	-
	0.1531	0.03555(32)	0.20(16)	5.1(4.2)	-
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	10.9(3.0)	-
$D D_0^*$	0.1520	0.07850(25)	-0.0642(84)	-	-0.0052(14)
	0.1525	0.05997(23)	-0.0828(85)	-	-0.0087(18)
	0.1528	0.04815(23)	-0.1007(84)	-	-0.0129(21)
	0.1531	0.03555(32)	-0.1292(85)	-	-0.0214(28)
	$m_\pi = 140[\text{MeV}]$	0.00248	-	-	-0.0287(38)

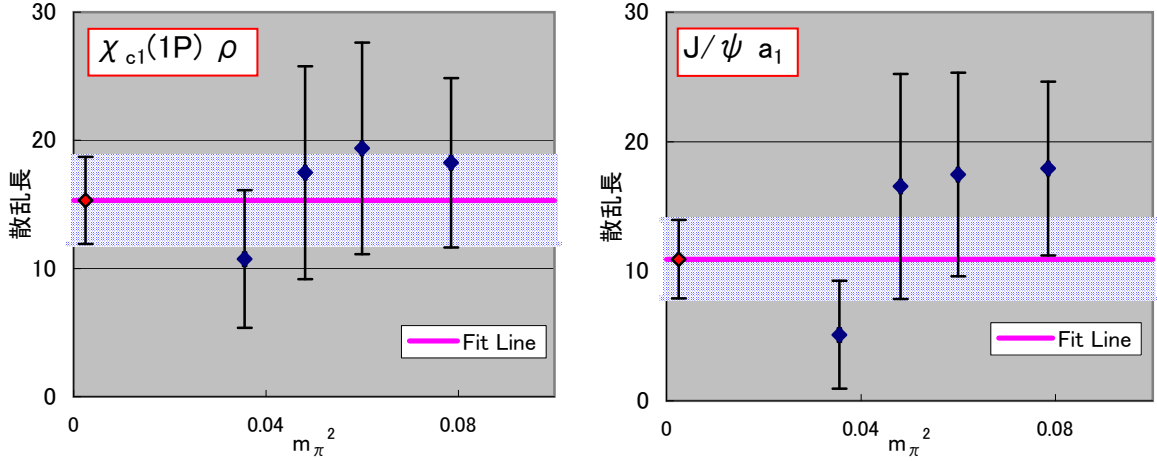


図 1.14: 散乱長  $a_0$  のカイラル外挿：横軸がパイ中間子質量  $m_\pi^2$  で縦軸が散乱長  $a_0$  である。藍色のプロットがシミュレーションによって得られた各クォーク質量における束縛エネルギーを示し、縦軸近傍の赤色のプロットが、カイラル外挿によって得られた  $m_\pi \sim 140$  [MeV] での束縛エネルギーを意味する。直線が fit line でその周辺の色の付いた部分は  $1\sigma$  の誤差を示す。

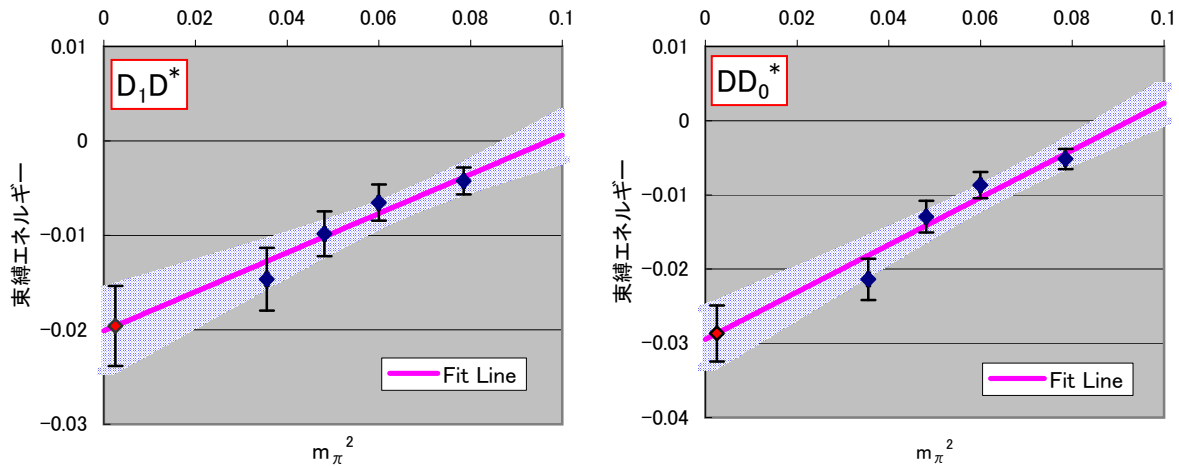


図 1.15: 束縛エネルギー  $E_b$  のカイラル外挿：横軸がパイ中間子質量  $m_\pi^2$  で縦軸が束縛エネルギー  $E_b$  である。藍色のプロットがシミュレーションによって得られた各クォーク質量における散乱長を示し、縦軸近傍の赤色のプロットが、カイラル外挿によって得られた  $m_\pi \sim 140$  [MeV] での散乱長を意味する。直線が fit line でその周辺の色が付いた部分は  $1\sigma$  の誤差を示す。

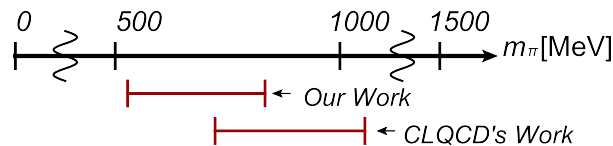


図 1.16: 我々と CLQCD グループのパイ中間子質量の領域の比較

我々が計算を行ったチャンネルのうち、特に  $D_1 D^*$  のチャンネルについては先述したように、我々と同様にクエンチ近似を課して、チャームクォーク・反チャームクォーク対の対生成・対消滅を伴う相互作用を無視する近似を施した上での散乱長の先行計算が CLQCD グループによって行われている [15]。彼らも有意な引力を見出しているが、束縛状態に至るほどの強さでは無いと結論づけている。これは我々が散乱長を計算したパイ中間子の質量領域が  $m_\pi \sim 530-780$  [MeV] であるのに対して、彼らの調査したパイ中間子の質量領域は  $m_\pi \sim 700-1100$  [MeV] と、一回り重い領域を見ているからであると考えられる (図 1.16 参照)。我々が見出した、クォーク質量と引力の強さの間に正の相関関係が顕に存在することが確かならば、重い側に外挿していけば、やがて引力的な散乱状態へと至ると予測される。従って、彼らの結論は我々の結論と必ずしも矛盾するものではない。

我々は、彼らよりもより軽いクォーク質量において散乱長の計算を行い、その質量領域において、クォーク質量と引力の強さの間に正の相関関係が存在することと、そこでは束縛状態を示唆するほどの引力であることを見出した。また  $Z^+(4430)$  の候補とされる  $D_1 D^*$  だけではなく、同様に  $Z^+(4430)$  と結合する D 中間子の組み合わせ  $DD_0^*$  においても、束縛状態を示唆する引力を見出した。これが我々が新たに得た知見である。

## 1.4 まとめ

我々は、クエンチ近似の元で生成したゲージ配位とウィルソフェルミオンを用いて、 $I^G(J^{PC}) = 1^+(0^+)$  となる S 波の  $D$  中間子の組み合わせ  $D_1 D^*$  の散乱長の計算を行った。このメソンの組み合わせは Belle 実験で見つかったエキゾチックハドロン  $Z^+(4430)$  と期待される弱い束縛状態を作ることが予想されている。また、比較のため、これと結合する  $D$  中間子散乱、そしてチャーモニウム-中間子散乱の散乱長の計算も行った。引力側では所謂ルシャーの散乱長  $a_0$  についての展開公式は破綻しているため、位相差  $\delta_0(k)$  を計算し  $k \cot \delta_0(k) \sim -\frac{1}{a_0}$  の関係より散乱長を計算した。

計算の結果、各チャンネルにおいて引力が働いており、特に  $D$  中間子間に働く相互作用はチャーモニウム-中間子散乱に働く引力よりも強く、クォーク質量依存性を持っていることがわかった。そして上述した、位相差から散乱長を求める枠組みにおいては、 $D$  中間子散乱のチャンネルに働く相互作用が、束縛条件を作る閾値を超えていることが判った。これは  $D$  中間子散乱の 2 つのチャンネルに、それぞれ束縛状態が存在していることを示唆する。特に  $D_1 D^*$  のチャンネルに束縛状態が見つかったということは、 $Z^+(4430)$  というエキゾチックハドロンが実在することを意味する。また、それが  $D_1 D^*$  の直積からなる分子状態型の内挿場から見つかったということは、 $Z^+(4430)$  が 2 つの  $D$  中間子の束縛状態から成る分子状態であることを示唆する。しかし内挿場を導入する際に述べたように、分子状態型の内挿場とダイクォーク・反ダイクォークの直積から成るテトラクォーク状態の内挿場は直行していないため、我々の結果は、 $Z^+(4430)$  がテトラクォーク状態である可能性を必ずしも排除するものではない。 $Z^+(4430)$  が分子状態的か、それともテトラクォーク状態的かを明らかにするためには、波動関数の計算やテトラクォーク型の内挿場を用いた計算が必要となる。これは今後の我々の課題の 1 つである。

$D$  中間子散乱のチャンネルを束縛状態とみなして、有限体積中で測定された  $D$  中間子間の相互作用の大きさを無限体積での束縛エネルギーへと変換し、カイラル外挿を行った結果、

$$E_{b D_1 D^*} = -55 \pm 12 \text{ [MeV]} \quad (1.4.1)$$

$$E_{b D D_0^*} = -81 \pm 11 \text{ [MeV]} \quad (1.4.2)$$

という値を得た。特に  $E_{b D_1 D^*}$  に関しては、数 MeV の束縛エネルギーで束縛しているという  $Z^+(4430)$  の  $D_1 D^*$  の分子描像を考えると、やや大きい値であるが、パイ中間子の質量が現実世界よりも重いこと、そしてクエンチ近似で行われた計算であることを踏まえると、現実の束縛エネルギーと多少の差があっても矛盾はしない。

チャーモニウム-中間子散乱のチャンネルについては、各クォーク質量で散乱長を計算し、カイラル外挿を施すことによって、

$$a_{0 \chi_{c1}(1P)\rho} = 1.07 \pm 0.24 \text{ [fm]} \quad (1.4.3)$$

$$a_{0 J/\psi \alpha_1} = 0.77 \pm 0.21 \text{ [fm]} \quad (1.4.4)$$

という結果を得た。これらのチャンネルについては、クォーク質量依存性は現在の計算精度ではほとんど見られなかった。

$D$  中間子散乱とチャーモニウム-中間子散乱の散乱長の振る舞いの違いとしては、前者には  $G$  パリティの固有状態を作る際に含まれた、2 つの異なる内挿場の結合の効果が含まれている。結合の効果が引力を強める方向に働くか、それとも斥力的に働かかは自明ではないが、クォーク質量に対する依存性をなんらかの形で有していると考えられる。この効果をより深く研究するには、結合が存在しない場合か、 $G$  パリティの値は異なる  $D$  中間子の組み合わせの散乱長の計算を行う必要がある。それに対して、両者のチャンネルに共通に含まれる、グルーオンの交換を通じた相互作用の効果は、クォーク質量についての依存性を有していないはずである。これゆえ、後者のチャーモニウム-中間子散乱の散乱長はクォーク質量依存性がほとんど見えないと考えられる。

一方で、 $V = 16^3$  の有限空間での計算と、 $V = 24^3$  の計算を比較した結果、予測された体積依存性には従わないという結果も得られた。原因として考えられることは、位相差から散乱長へ計算する際に、有効距離などの高次の散乱パラメータを完全に無視した議論であったという問題や、物理量への有限体積効果、さらにはルシャールの公式を適応するには  $V = 16^3$  は、十分な大きさでは無かったのではないかと、といった原因が考えられる。この問題について更なる理解を得るには  $V = 32^3$  や  $V = 48^3$  といった、より大きな空間での計算が求められる。また、本計算はクエンチ近似の下で行われた。より現実的な状況の計算を行うには、ダイナミカルなゲージ配位による計算が必要とされる。またテトラクォーク状態の 1 粒子状態に対応する内挿場の相関関数を含む、シンクが 1 点での 5 行 5 列の行列要素など、未解析のデータも存在する。これらの問題を解決し、QCD の第一原理計算によって、エキゾチックハドロンの物理を解き明かして行きたい。

## 引用文献

- [1] S. K. Choi *et al.* [BELLE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **100**, 142001 (2008) [arXiv:0708.1790 [hep-ex]].
- [2] S. K. Choi *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. **91**, 262001 (2003) [arXiv:hep-ex/0309032].
- [3] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **95**, 142001 (2005) [arXiv:hep-ex/0506081].
- [4] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **79**, 112001 (2009) [arXiv:0811.0564 [hep-ex]].
- [5] S. Uehara [Belle Collaboration], arXiv:0905.4313 [hep-ex].
- [6] R. Mizuk *et al.* [BELLE Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 031104 (2009) [arXiv:0905.2869 [hep-ex]].
- [7] R. Mizuk *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. D **78**, 072004 (2008) [arXiv:0806.4098 [hep-ex]].
- [8] X. Liu, Y. R. Liu, W. Z. Deng and S. L. Zhu, Phys. Rev. D **77**, 034003 (2008) [arXiv:0711.0494 [hep-ph]].
- [9] X. Liu, Y. R. Liu, W. Z. Deng and S. L. Zhu, Phys. Rev. D **77**, 094015 (2008) [arXiv:0803.1295 [hep-ph]].
- [10] S. H. Lee, A. Mihara, F. S. Navarra and M. Nielsen, Phys. Lett. B **661**, 28 (2008) [arXiv:0710.1029 [hep-ph]].
- [11] M. E. Bracco, S. H. Lee, M. Nielsen and R. Rodrigues da Silva, Phys. Lett. B **671**, 240 (2009) [arXiv:0807.3275 [hep-ph]].
- [12] S. H. Lee, K. Morita and M. Nielsen, Phys. Rev. D **78**, 076001 (2008) [arXiv:0808.3168 [hep-ph]].
- [13] T. W. Chiu and T. H. Hsieh [TWQCD Collaboration], Phys. Lett. B **646**, 95 (2007) [arXiv:hep-ph/0603207].
- [14] T. W. Chiu and T. H. Hsieh [TWQCD Collaboration], Phys. Rev. D **73**, 094510 (2006) [arXiv:hep-lat/0512029].
- [15] G. Z. Meng *et al.* [CLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 034503 (2009) [arXiv:0905.0752 [hep-lat]].
- [16] S. Prelovsek, arXiv:1004.3636 [hep-lat].
- [17] S. Prelovsek and D. Mohler, Phys. Rev. D **79** (2009) 014503 [arXiv:0810.1759 [hep-lat]].
- [18] S. Prelovsek, T. Draper, C. B. Lang, M. Limmer, K. F. Liu, N. Mathur and D. Mohler, arXiv:1005.0948 [hep-lat].
- [19] K. Yokokawa, S. Sasaki, T. Hatsuda and A. Hayashigaki, Phys. Rev. D **74**, 034504 (2006) [arXiv:hep-lat/0605009].
- [20] L. Liu, H. W. Lin and K. Orginos, PoS **LATTICE2008**, 112 (2008) [arXiv:0810.5412 [hep-lat]].

[21] L. Liu, PoS **LAT2009**, 099 (2009).

[22] T. Kawanai and S. Sasaki, arXiv:1011.1322 [hep-lat].