

# H22年度 KEK 大型シミュレーション研究 実施報告書

## Wilson フェルミオンによる有限密度 QCD の研究

### 1 研究組織

中村 純 (なかむら あつし) 広島大学情報メディアセンター・教授

永田 桂太郎 (ながた けいたろう) 東京大学理学系研究科・研究員  
(H23年4月より広島大学・研究員)

### 2 当該期間の実施報告の詳細

有限密度・有限温度にまで拡張した世界では、QCD の閉じ込めは破れ、カイラル対称性も回復し、豊富な相構造を持つことが期待されている。有限温度では、RHIC の超高エネルギー重イオン反応実験によって、閉じ込め/非閉じ込め相転移温度を超える温度が実現され、LHC ではより高エネルギーでの重イオン実験が進められ最初の結果が報告されている。

重イオン反応のデータは、エネルギーを下げることでより高密度状態が実現していることがほぼ確実になっている。また、中性子星中心部では高密度状態が実現しており、重い原子核内部は真空に比べてはるかに高いバリオン密度となっている。これらの研究のためには、格子 QCD による非摂動的かつ第 1 原理計算の結果が強く求められている。

しかし、有限密度では、経路積分に現れるフェルミオン行列式が複素数になり、そのために「符号問題」が発生し、シミュレーションは非常に難しいものになっている。これまで、Reweighting 法、カノニカル法、虚数化学ポテンシャル法などが提唱され、少しずつ有限密度 QCD の様相が明らかになりつつある [1]。

これまでに行われた有限密度 QCD のシミュレーションは、その大部分が Staggered 型フェルミオン作用を使うものであった。これは、計算資源が比較的少なくすむことが主な理由であるが、Staggered フェルミオンはそのままでは 4 フレーバーに対応し、それ以外のフレーバー数の計算を行うときは 4 乗根を取る必要がある。このときに、正しいリーマン面を選択しているかという疑問が提唱されており、その問題は特に有限密度では深刻になる可能性が指摘されている。

有限密度格子 QCD 計算では、しばしばフェルミオン行列式を直接的に扱う必要がある。大規模疎行列に対する線形方程式の解法に関しては、共役勾配法系のアルゴリズムが効率が高いが、行列式の計算はそのような手法が見つかっておらず、演算量は  $N \times N$  行列に対し、

$$O(N^3) \tag{1}$$

となる。

Staggered フェルミオンに対しては、

$$\det(\Delta) = \det(Q + e^{-\mu/T}) \times e^{3V_s N_t \mu}, \tag{2}$$

という式が知られている。ここで  $\Delta$  は  $(N_c N_x N_y N_z N_t) \times (N_c N_x N_y N_z N_t)$  のサイズの元のフェルミオン行列で、 $Q$  はサイズが  $(2N_c N_x N_y N_z) \times (2N_c N_x N_y N_z)$  に圧縮された行列である。 $Q$  の固有値を  $\lambda_k$  とすれば、

$$\det \Delta(\mu) = e^{N_t V_s \mu} \prod_{i=1}^{6V_s} (\lambda_i + e^{-\mu/T}), \quad (3)$$

となり、化学ポテンシャル  $\mu$  の任意の値に対して、行列式の値が得られる。

同様の式は、Wilson fermions に対しては知られていなかったが、1年ほどにおよぶ試行錯誤の末、我々は以下の式を構築することができた [2]。

$$\det \Delta = (ab)^{-N/2} (e^\mu)^{-N/2} \left( \prod_{t_i=1}^{N_t} \det(\alpha_{t_i}) \right) \det(e^{\mu/T} + Q). \quad (4)$$

Staggered フェルミオンの場合と同様に、 $Q$  の固有値を  $\lambda_k$  とすれば、

$$\det(e^{\mu/T} + Q) = \prod_k (e^{\mu/T} + \lambda_k). \quad (5)$$

ここでフェルミオン行列  $\Delta$  のサイズは  $(N_c N_x N_y N_z N_t) \times (N_c N_x N_y N_z N_t)$  で、圧縮された行列は  $Q$  はサイズが  $(4N_c N_x N_y N_z) \times (4N_c N_x N_y N_z)$  にであり、圧縮率は  $1/N_t$  である。Wilson フェルミオンは、Dirac スピナーの自由度 4 だけフェルミオン行列のサイズが大きいが、圧縮率が Staggered フェルミオンの場合に比べて 2 倍高いために、固有値を求めるべき行列のサイズ (ランク) は 2 倍に収まっている。

式 (5) をフガシティの多項式に展開すれば、その係数はカノニカル分配関数に相当する。

### 3 結果

式 (5) を使って行列式の値を求め、また、カノニカル法に必要な Fugacity 展開の係数が、どこで生じ、意味のある結果を得るためには必要な精度について調べた。さらに、虚数化学ポテンシャルによる計算を行った。虚数化学ポテンシャルによる結果を実化学ポテンシャルに解析接続すれば、相転移線等が求まる。

### References

- [1] 中村純、日本物理学会誌 Vol66, Nov.1, 2011, pp6-12.、解説、「有限密度での格子 QCD 計算」
- [2] Keitaro Nagata and Atsushi Nakamura, "Wilson Fermion Determinant in Lattice QCD", Phys.Rev.D82:094027,2010, arXiv:1009.2149
- [3] Keitaro Nagata and Atsushi Nakamura, "Imaginary Chemical Potential Approach for the Pseudo-Critical Line in the QCD Phase Diagram with Clover-Improved Wilson Fermions", arXiv:1104.2142. To appear in Phys. Rev. D.

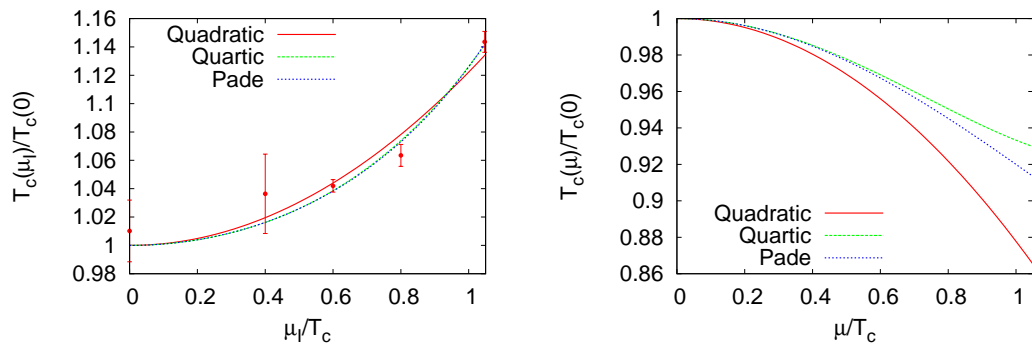


Figure 1: The pseudo-critical line  $\beta_{pc}$  in the imaginary (left panel) and real(right panel) region.