

実施報告書

研究課題名：格子 QCD による K 中間子崩壊振幅の研究

(Calculation of K meson decay amplitude from lattice QCD)

筑波大学 数理物質系 准教授

石塚成人

2012 年 11 月 30 日

1 研究組織

- 研究責任者
石塚成人 (いしづか なるひと) 筑波大学 数理物質系 准教授
- 研究従事者
石川 健一 (いしかわ けんいち) 広島大 大学院理学研究科 准教授
吉江 友照 (よしえ ともてる) 筑波大 数理物質系 准教授
谷口 裕介 (たにくち ゆうすけ) 筑波大 数理物質系 講師
宇川 彰 (うかわ あきら) 筑波大 副学長

2 研究目的と内容

本研究の研究目的は、 K 中間子崩壊振幅を格子 QCD により数値計算し、未解決問題である K 中間子系における $\Delta I = 1/2$ 則の研究、および CP 非保存パラメータ (ϵ'/ϵ) を理論から求めることである。その目的のため、数値計算上最大の問題である非連結 diagram を含むハドロン伝搬関数の計算方法の開発を、より問題が簡単な一ハドロン問題である η' の質量の問題 (U(1) 問題) から始める。次に、そこで開発された計算方法を多ハドロン状態へ発展させ、 K 中間子崩壊振幅の計算を行う。

計算は研究は以下のパラメータの元で行った。

$$\begin{aligned} \text{格子間隔} & a = 0.09 \text{ fm} \\ \text{格子サイズ} & L = 3 \text{ fm} \\ \pi \text{ 中間子質量} & m_\pi = 300 \text{ MeV} \\ K \text{ 中間子質量} & m_K = 600 \text{ MeV} \end{aligned} \tag{1}$$

このパラメータは、 K 中間子が、二つの運動量ゼロの π 中間子に壊れる場合、崩壊の前後でエネルギーが保存する ($m_K = \sqrt{s} = 2m_\pi$) ように選んだものである。クォークの作用として、改良された Wilson fermion を用いた。

本研究では、物理量を十分な統計精度で得るために、多くのゲージ配位を必要とする。そのため、PACS-CS グループが (1) のパラメータの元で生成したゲージ配位から、更にそれを種にしてゲージ配位を生成した。最終的に配位数を 4 倍まで増やした。

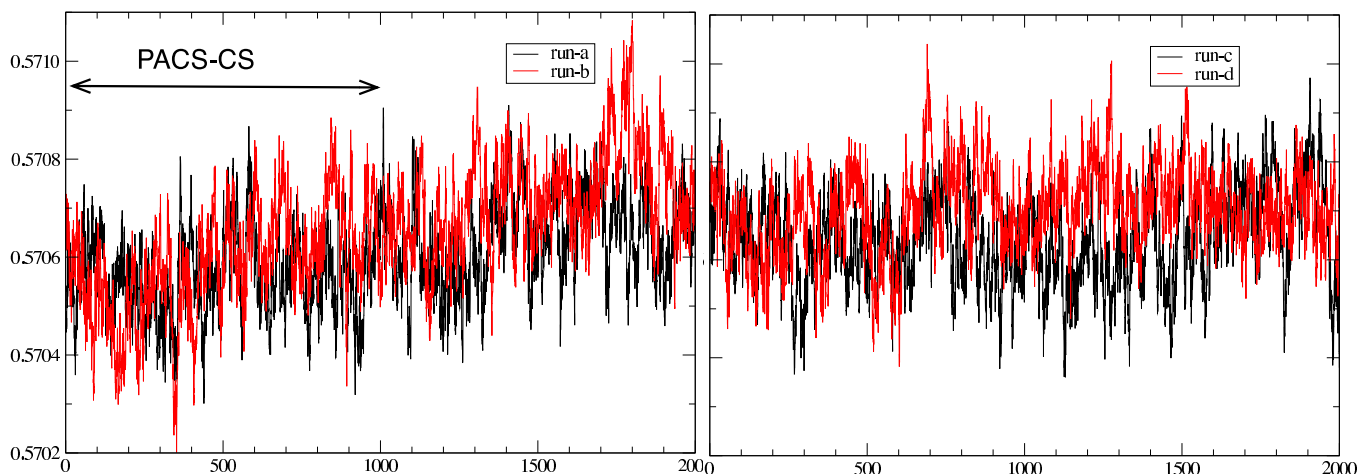


図 1: Plaquet 履歴

本研究の計算は、以下の各所の計算機を用いて行った。

- | | | |
|------------------|--------------------------------------|-----|
| (1) ゲージ配位生成 | T2K Tsukuba (筑波大), SR16000 (東大) | |
| (2) 主なハドロンの質量の計算 | SR16000 (4 node) (KEK), SR16000 (東大) | (2) |
| (3) η' の質量 | T2K Tsukuba (筑波大), TSUBAME2 (東工大) | |
| (4) K 中間子崩壊振幅 | T2K Tsukuba (筑波大) | |

KEK の計算機 (SR16000,4node) は「(2) 主なハドロンの質量の計算」に使った。この計算部分は、新たに生成したゲージ配位の基本的な性質を調べ、基本パラメータの精密決定のためのものであり、このゲージ配位を使って物理量を計算する上で欠くことのできない重要な部分である。

現在、本研究は (3) まで終了し、(4) の計算を行っている。

3 研究成果

3.1 ゲージ配位生成と 主なハドロンの質量の計算

前節で述べた様に、本研究では、物理量を十分な統計精度で得るために、多くのゲージ配位を必要とする。そのため、(1) のパラメータの元でゲージ配位を新たに生成し、配位数を 4 倍に増やした。

図.1 に、simulation step (MD step) でのゲージ場の plaquet の値をプロットした。配位生成は、独立な二本の鎖 (Mrkov chain) で行っており、図の黒線と赤線がそれらに対応する。図では、MD step= 2000 で左図と右図に分けてプロットしたが、連続した Mrkov chain である。PACS-CS グループが生成した元々の配位は、MD step = 0 – 1000 の部分であり、図中に矢印で示されている。

この 4 倍に増やした配位で、主なハドロンの (中間子の 8 重項, バリオンの 8 重項と 10 重項) の質量を計算した。ハドロンの質量に関しては、統計誤差がほぼ統計数と共にスケールしており、統計数が十分であることを確認された。また、格子間隔を、元々の半分の統計誤差で決めることができた。今回生成された新しいゲージ配位は JLDG 上で公開予定である。

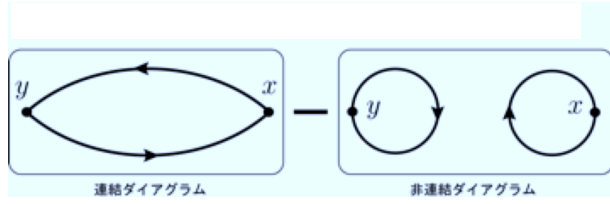


図 2: η' の quark diagram

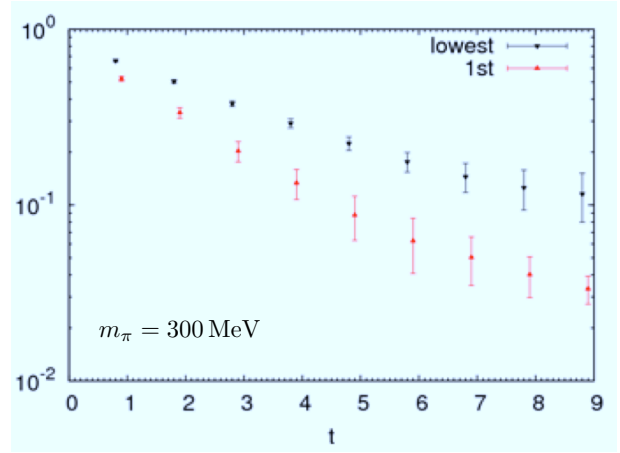


図 3: η (黒) と η' (赤) の時間相関関数

3.2 η' の質量の問題

前述の 4 倍に増やした配位で η' の質量を計算した。計算方法は以下である。以下の 2×2 の時間相関関数行列を計算する。

$$G_{ij} = \langle 0 | \mathcal{O}_i^C(t) \mathcal{O}_j^S(0) | 0 \rangle \quad (3)$$

ここで、 $\mathcal{O}_i^C(t)$, $\mathcal{O}_i^S(t)$ ($i = 1, 2$) は以下で定義される演算子である。

$$\mathcal{O}_1^C(t) = \sum_{\vec{x}} (\bar{u}(\vec{x}, t) \gamma_5 u(\vec{x}, t) + \bar{d}(\vec{x}, t) \gamma_5 d(\vec{x}, t)) / \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\mathcal{O}_2^C(t) = \sum_{\vec{x}} \bar{s}(\vec{x}, t) \gamma_5 s(\vec{x}, t) \quad (5)$$

$$\mathcal{O}_1^S(t) = \sum_{\vec{x}} (\bar{U}(\vec{x}, t) \gamma_5 U(\vec{x}, t) + \bar{D}(\vec{x}, t) \gamma_5 D(\vec{x}, t)) / \sqrt{2} \quad (6)$$

$$\mathcal{O}_2^S(t) = \sum_{\vec{x}} \bar{S}(\vec{x}, t) \gamma_5 S(\vec{x}, t) \quad (7)$$

上式で、 $q(\vec{x}, t)$ ($q = u, d, s$) は位置 $x = (\vec{x}, t)$ での (u,d,s) quark の演算子である。 $Q(\vec{x}, t)$ ($Q = U, D, S$) は位置 $x = (\vec{x}, t)$ での smearing された演算子であり、quark 演算子 q から以下で定義される。

$$Q(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{y}} A \cdot e^{-B|\vec{x}-\vec{y}|} q(\vec{y}, t) \quad (A = 1.2, B = 0.09) \quad (8)$$

時間関数は、図.2 で示される quark diagram を計算することによって得られる。図の第二項目が非連結 diagram である。本研究では、この diagram を stochastic noise 法を用いて計算した。それは、直交する乱数を用いて閉じた quark loop を計算する方法である。

(3) の相関関数行列 $G(t)$ を対角化することによって、 η と η' の時間相関関数が得られる。結果を図.3 にプロットした。 η' は統計誤差が大きいものの有意なデータが得られている。それぞれの相関関数から 指数関数 fit によって求められた質量の結果は以下である。

$$m_\eta = 593 \pm 44 \text{ MeV} \quad , \quad m_{\eta'} = 850 \pm 68 \text{ MeV} \quad (9)$$

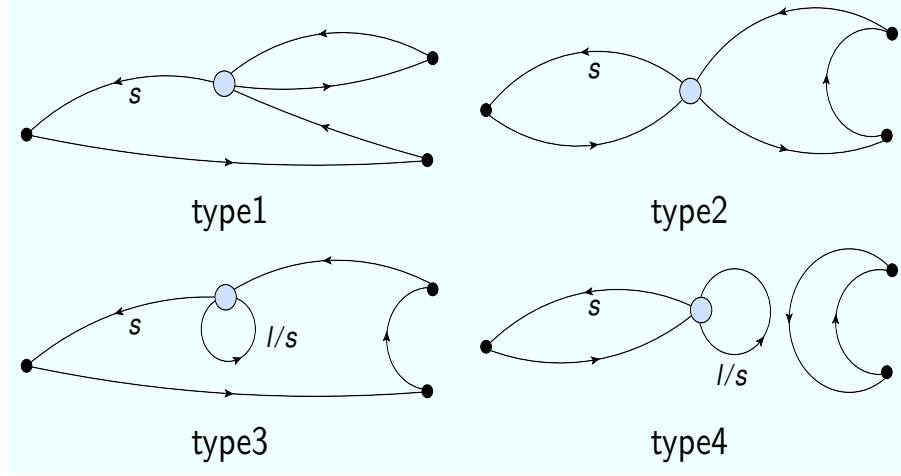


図 4: K 中間子崩壊振幅の quark diagram

これらは、実験値 ($m_{\eta} = 548$, $m_{\eta'} = 958$ MeV) を再現している。しかし、これは $m_{\pi} = 300$ MeV での重いクォーク質量での結果であり、将来の課題として、現実のクォーク質量での計算が残された。今回の結果は近く論文発表する予定である。

3.3 K 中間子崩壊振幅の計算

K 中間子系における $\Delta I = 1/2$ 則の研究、および CP 非保存パラメータを理論から求めるには、four fermion 演算子 Q_j ($j = 1, \dots, 10$) による K 中間子崩壊振幅 $A_j^I \equiv \langle K | Q_j | \pi\pi; I \rangle$ を計算する必要がある。ここで、 I は 2 体 π 中間子の iso-spin であり、 $I = 0, 2$ をとる。演算子 Q_j は以下であたえられる。

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= (\bar{s}d)_L(\bar{u}u)_L & Q_7 &= (\bar{s}d)_L(\bar{u}u - \bar{d}d/2 - \bar{s}s)_R \\
 Q_3 &= (\bar{s}d)_L(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)_L & Q_9 &= (\bar{s}d)_L(\bar{u}u - \bar{d}d/2 - \bar{s}s)_L \\
 Q_5 &= (\bar{s}d)_L(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)_R
 \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、 $(\bar{q}_1 q_2)_L(\bar{q}_3 q_4)_L$, $(\bar{q}_1 q_2)_L(\bar{q}_3 q_4)_R$ を以下で定義した。

$$\begin{aligned}
 (\bar{q}_1 q_2)_L(\bar{q}_3 q_4)_L &= \sum_{\mu} (\bar{q}_1 \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) q_2) (\bar{q}_3 \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) q_4) \\
 (\bar{q}_1 q_2)_L(\bar{q}_3 q_4)_R &= \sum_{\mu} (\bar{q}_1 \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) q_2) (\bar{q}_3 \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) q_4)
 \end{aligned} \tag{11}$$

また、演算子 $Q_j = \{Q_2, Q_4, Q_6, Q_8, Q_{10}\}$ は、(10) の演算子 Q_{j-1} から quark color をクロスさせることによって定義される。

four fermion 演算子 Q_j による K 中間子崩壊振幅 $A_j^I \equiv \langle K | Q_j | \pi\pi; I \rangle$ の quark diagram を図.4 に表した。ここで、各 type で中央の大きい丸は Q_j を意味し、左側の小さい丸は K 中間子を、右側の小さい丸は π 中間子を表す。 $I = 2$ の場合は「type 1」だけ寄与し、 $I = 0$ の場合は全て寄与する。「type 4」が非連結 diagram である。 η' の場合に登場した quark loop (演算子からはじまって同じ演算子に戻ってくる diagram) は、この「type 4」だけでなく「type 3」にも現れる。この二つのダイアグラムは、 η' の場合と同様に stochastic noise 法を用いて計算した。

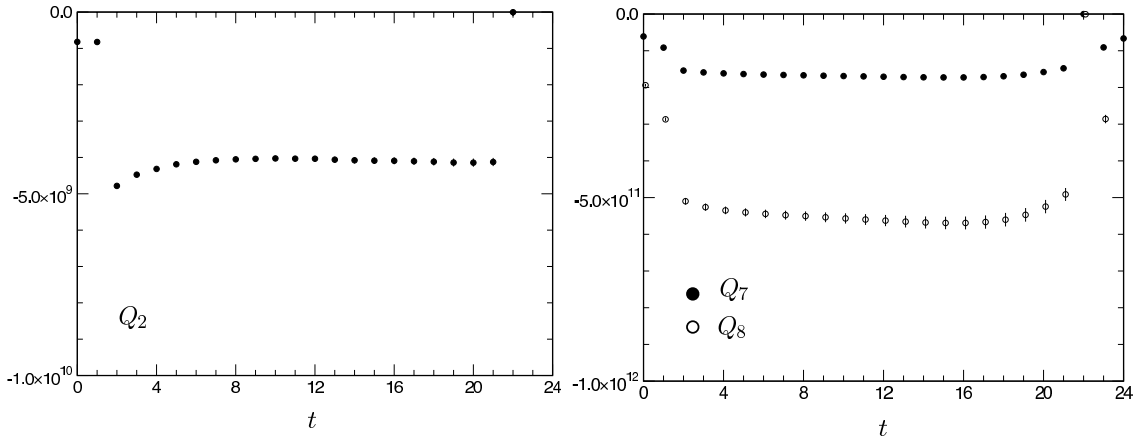


図 5: $I = 2$ の $K \rightarrow \pi\pi$ 時間相関関数

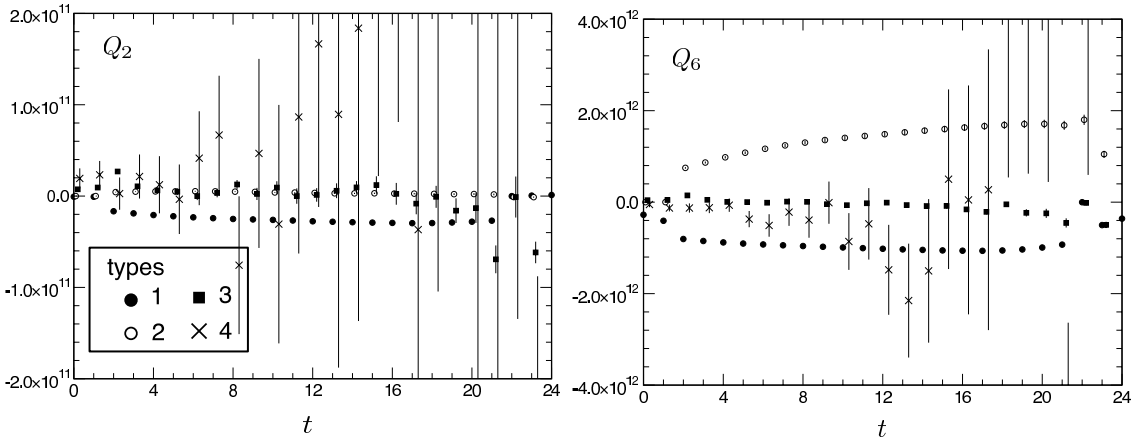


図 6: $I = 0$ の Q_2 と Q_6 による $K \rightarrow \pi\pi$ 時間相関関数

崩壊振幅を計算するため、以下の $K \rightarrow \pi\pi$ 時間相関関数を計算した。

$$G_j^I(t) = \langle 0 | (\pi\pi; I)(t_\pi) Q_j(t) K(t_K) | 0 \rangle \quad (12)$$

ここで、 $(\pi\pi; I)(t_\pi)$ は iso-spin= I の 2 体 π 中間子の演算子であり、 $K(t_K)$ は K 中間子の演算子である。以後の計算では全て $t_\pi = 0$, $t_K = 22$ に固定し、 t を動かした。我々のパラメータでは $m_K \sim 2m_\pi$ を満たすことより、この相関関数は $t_\pi \ll t \ll t_K$ の領域で、 t によらずほぼ一定値 (= (規格化定数) \times (崩壊振幅)) をとると予想される。

はじめに $I = 2$ の場合について見る。この場合、 Q_2, Q_7, Q_8 の三つの演算子のみが線形独立な崩壊振幅をあたえる。これらの演算子による相関関数の計算結果を図.5 にプロットした。小さい統計誤差で相関関数が得られており、 $t_\pi \ll t \ll t_K$ で、予想通りほぼ一定値をとっていることが分かる。これは、 $I = 2$ の場合の崩壊振幅は容易に計算できるを意味する。

$I = 0$ の場合、全ての演算子が寄与する。ここでは $\Delta I = 1/2$ 則と、 CP 非保存パラメータ (ϵ'/ϵ) に対し、主要な寄与をあたえる二つの演算子 Q_2 と Q_6 について相関関数を見ることにする。図.6 では、相関関数の各 4 つの quark diagram (type 1 ~ 4) からの寄与をプロットした。全ての寄与を足し合わせたものがその演算子の相関関数であるが、この図ではプロットしていない。図から分かるように、type 4 以外は、両方の演算子について高い統計精度で計算ができています。 Q_6 では、type 4 の統計精度が悪いものの、 $t < 12$ の領域までは有意なデータがとれる。しかし、 Q_2 の type 4 は、統計誤差が極端に大きく、他の diagram からの寄与を全て洗い流してしまい、このままで

は崩壊振幅の計算は難しい。

type 4 diagram の計算では、以下の真空期待値を引き算を行う。

$$\text{type 4} = C(t) - V(t) \quad (13)$$

$$C(t) = \langle (\pi\pi; I)(t_\pi) Q_j(t) K(t_K) \rangle_C \sim e^{-m_K \cdot (t-t_K)} \quad (14)$$

$$V(t) = \langle (\pi\pi; I)(t_\pi) \rangle \cdot \langle Q_j(t) K(t_K) \rangle \sim e^{-m_K \cdot (t-t_K)} \quad (15)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle_C$ は connected diagram を意味する。 $C(t)$, $V(t)$ 共に K 中間子の pole の寄与を含み、上の式のように指数関数的に振る舞う。従って、この diagram では、指数関数同士の強烈な相殺が起こり、中心値がほとんどゼロになり、その結果 統計誤差を大きくしてしまうのである。

現在、type 4 diagram の統計誤差を抑える方法として以下の二つを考え、試験計算を行っている。

- quark loop からの統計誤差を抑えるために、hopping parameter 展開を考え、展開の4次まで厳密に扱う。残りを stochastic noise 法を用いて計算する。現在の計算でも、この方法を用いているが、展開は2次までしか行っていない。0次と2次を比べると、2次展開によって同じ配位数で、統計誤差を半分にできるとが分かった。よって、展開次数を上げることによって更に誤差を小さくできると期待される。
- 系全体に運動量を持たせた場合、すなわち、運動量 $p \neq 0$ をもった $K(p) \rightarrow \pi(p)\pi(0)$ 過程を考える。この場合、(14) で $V(t) = 0$ となり、指数関数同士の相殺が起こらない。よって、誤差を抑えられると期待される。

4 まとめ

本研究の研究目的は、 K 中間子崩壊振幅を格子 QCD により数値計算し、未解決問題である K 中間子系における $\Delta I = 1/2$ 則の研究、および CP 非保存パラメータ (ϵ'/ϵ) を理論から求めることである。しかし、現在のところ統計精度が悪く、物理結果を得るに至っていない。現在、前節でのべた二つの統計精度向上させる方法の試験計算を行っている。