

研究責任者名 Name	北沢 正清 Kitazawa Masakiyo	所属機関 Affiliation	大阪大学
受理番号 Proposal No.	大型 13/14-T04 大型 13/14-25	研究課題名 Program title	gradient flow を用いた有限温度 QCD の研究

研究を終了しましたので、下記の通り報告します。

成果の概要

Abstract

(和文)

Yang-Mills ゲージ場に対し gradient flow と呼ばれる連続変換を施し、変換された場の上で定義されたエネルギー運動量テンソルを用いると、もとのゲージ理論上における繰り込まれたエネルギー運動量テンソルが定義できることが、Luscher、鈴木らによって最近指摘された。本研究では、このように定義されたエネルギー運動量テンソルを用いて有限温度ゲージ理論の熱力学量、およびエネルギー運動量テンソルの相関関数などの測定を行った。エネルギー密度および圧力の解析により、このような解析手法が実用上極めて有効であることが確認された。さらに、エネルギー運動量テンソルの相関関数を測定も進行中であり、エネルギー運動量保存則の確認やエネルギーゆらぎの測定などに関する興味深い結果が得られつつある。

(英文)

It was recently pointed out that an appropriately renormalized energy-momentum tensor operator in Yang-Mills gauge theory can be defined using the gradient flow which is a continuous transformation of the gauge field. Using this novel approach, we have performed the measurements of bulk thermodynamics and the correlation functions of the energy momentum tensor in Yang-Mills gauge theory on the lattice at nonzero temperature. Our results on the measurements of energy density and pressure suggest that this method can obtain these quantities quite effectively on the lattice. The analysis of the correlation functions of the energy-momentum tensor is also ongoing. In particular, we are performing the check of the energy-momentum conservation and the analysis of the fluctuation of energy.

研究成果を公開しているホームページアドレス

研究成果の 公表	口頭研究発表 件数	査読つきの 学術論文数	プロシーディング 論文数	その他 (投稿中を含む)
	14	1	0	0

成果の公表リスト（それぞれの枠に番号をつけて記入願います。）

口頭研究発表 Presentations at scientific meetings concerning the program									
<p>1. 鈴木博、「Lattice energy-momentum tensor from the Yang-Mills gradient flow」、第3回計算基礎科学連携拠点 (JICFuS) セミナー、大阪大学、2013年10月16日 (招待講演)</p> <p>2. 鈴木博、「Lattice energy-momentum tensor from the Yang-Mills gradient flow」、計算基礎科学連携拠点 (JICFuS) 研究会「Lattice QCD at finite temperature and density」、高エネルギー加速器研究機構、2014年1月22日 (招待講演)</p> <p>3. 伊藤悦子、「Gradient flow を用いた SU(3)ゲージ理論の熱力学量の測定」、日本物理学会第69回年次大会、東海大学、2014年3月28日</p> <p>4. 北沢正清、「Gradient Flow を用いた SU(3)ゲージ理論の有限温度相関関数の測定」、日本物理学会第69回年次大会、東海大学、2014年3月28日</p> <p>5. T. Hatsuda, “New approach to lattice QCD thermodynamics from Yang-Mills gradient flow”, XXIV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions (Quark Matter 2014), Darmstadt, Germany, 20 May 2014</p> <p>6. M. Kitazawa, “Thermodynamics of SU(3) gauge theory from gradient flow”, Extreme QCD (XQCD2014), Stony Brook, USA, 21 June 2014</p> <p>7. M. Kitazawa, “Thermodynamics of Gauge Theory from Gradient Flow”, The 32nd International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE2014), Columbia University, USA, 30 June 2014 (招待講演)</p> <p>8. H. Suzuki, "Energy-momentum tensor on the lattice from the gradient flow", Conceptual advances in lattice gauge theory (LGT14), CERN, Switzerland, 2014年7月21日 (招待講演)</p> <p>9. M. Kitazawa, “Energy-Momentum Tensor and Thermodynamics of Lattice Gauge Theory from Gradient Flow”, The 5th Asian Triangle Heavy Ion Conference (ATHIC2014), Osaka, Japan, 7 August 2014 (招待講演)</p> <p>10. 北沢正清、「格子 QCD 上でエネルギー運動量テンソルを測定する新しい試み」、高エネルギーQCD・核子構造勉強会、京都大学、2014年8月18日 (招待講演)</p> <p>11. 北沢正清、「Gradient Flow とエネルギー運動量テンソル」、熱場の量子論とその応用、理研、2014年9月4日</p> <p>12. 鈴木博、「gradient flow による格子上のエネルギー運動量テンソル」、研究会「離散的手法による場と時空のダイナミクス」、慶應義塾大学、2013年9月14日</p> <p>13. 鈴木博、「格子場の理論における Yang-Mills/Wilson gradient flow の応用」、日本物理学会2014年秋季大会、佐賀大学、2014年9月18日 (企画講演)</p> <p>14. M. Kitazawa, “Gradient Flow and Energy-Momentum Tensor on Lattice Gauge Theory”, 4th joint meeting of the nuclear physics divisions of the American physical society and the physical society of Japan (Hawaii2014), Waikoloa, Hawaii, Oct. 11, 2014</p>									
<p>査読つきの学術論文(雑誌名等には 巻、頁、発表年を記載) (*) 不足する場合には追加願います。</p>									
<p>Refereed Journal Articles (name of journal, volume, page, year)</p>									
1	<table border="1"> <tr> <td>著者名 Author</td> <td>Masayuki Asakawa, Tetsuo Hatsuda, Etsuko Itou, Masakiyo Kitazawa, and Hiroshi Suzuki (FlowQCD Collaboration)</td> </tr> <tr> <td>タイトル title</td> <td>Thermodynamics of SU(3) gauge theory from gradient flow on the lattice</td> </tr> <tr> <td>雑誌名 name of journal</td> <td>Phys. Rev. D90 011501(R) (2014)</td> </tr> <tr> <td>URL</td> <td>http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.90.011501</td> </tr> </table>	著者名 Author	Masayuki Asakawa, Tetsuo Hatsuda, Etsuko Itou, Masakiyo Kitazawa, and Hiroshi Suzuki (FlowQCD Collaboration)	タイトル title	Thermodynamics of SU(3) gauge theory from gradient flow on the lattice	雑誌名 name of journal	Phys. Rev. D90 011501(R) (2014)	URL	http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.90.011501
著者名 Author	Masayuki Asakawa, Tetsuo Hatsuda, Etsuko Itou, Masakiyo Kitazawa, and Hiroshi Suzuki (FlowQCD Collaboration)								
タイトル title	Thermodynamics of SU(3) gauge theory from gradient flow on the lattice								
雑誌名 name of journal	Phys. Rev. D90 011501(R) (2014)								
URL	http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.90.011501								
<p>プロシーディング論文(雑誌名等には 巻、頁、発表年を記載) (*) 不足する場合には追加願います。</p>									
<p>International Conference Proceedings (name of journal, volume, page, year)</p>									
<p>その他 (学位論文、紀要、投稿中の論文を含む) (著者、タイトル、論文種別、URL を記載) Others (thesis for a degree, bulletin, papers to be published, etc.)</p>									
<p>特記 (本研究に関係した、新聞記事・著作、受賞など) (過去に遡っても構いません。) Special Notes (newspaper article, literary works, awards, etc.)</p>									

gradient flow を用いた有限温度 QCD の研究

1 研究組織

- 北沢正清 (きたざわまさきよ)
大阪大学大学院理学研究科、助教 (研究責任者)
- 浅川正之 (あさかわまさゆき)
大阪大学大学院理学研究科、教授
- 初田哲男 (はつだてつお)
理化学研究所仁科加速器研究センター、主任研究員
- 入谷匠 (いりたにたくみ)
京都大学基礎物理学研究所、ポスドク研究員
- 伊藤悦子 (いとうえつこ)
高エネルギー加速器研究機構素核研、特任助教
- 鈴木博 (すずきひろし)
九州大学理学研究院、教授

2 当該期間の実施報告

2.1 概要

エネルギー運動量テンソル (EMT) は、物理学におけるもっとも基本的な観測量の一つである。ところが、格子 QCD 上では一般座標変換不変性がないため、この変換の生成子であるエネルギー運動量テンソルを測定することはこれまで一般的に困難であった。ところが最近、2009 年に M.Luescher 氏が提案した「Yang-Mills gradient flow」という手法を用いると、格子上で非摂動的に正しく繰り込まれた EMT を定義し、かつ期待値や相関関数の測定を高精度で行うことができることが発見された [1, 2]。我々は、格子 QCD 数値シミュレーションにおいて、このように定義された EMT を用いて期待値や相関関数の測定を行う研究を行ってきた。

2.2 gradient flow と微小時間展開

ここで、gradient flow とは、

$$\frac{dA_\mu}{dt} = -\frac{\partial S_{\text{YM}}(t)}{\partial A_\mu} = \partial_\nu D_\nu G_{\nu\mu}, \quad (1)$$

という微分方程式によるゲージ場の連続変換である。ただし、 $S_{\text{YM}}(t)$ は Yang-Mills 作用であり、 $t = 0$ の初期条件には通常のゲージ理論が採用される。また、 t はフロー時間と呼ばれるパラメータである。式 (1) は、tree level において、

$$\frac{dA_\mu}{dt} = \partial_\nu \partial_\nu A_\mu + (\text{gauge dependent terms}). \quad (2)$$

と変形することができる。式 (2) は 4 次元空間の拡散方程式と同じ構造をしており、この式から、gradient flow による $t > 0$ の変換は場を smearing する操作に対応することが分かる。

Gradient flow による EMT の定義は、微小時間展開 [1] を用いて行われる。微小時間展開とは、有限のフロー時刻 $t > 0$ における演算子 $\tilde{O}(t, x)$ の、 $t \rightarrow 0^+$ の極限での展開

$$\tilde{O}(t, x) \rightarrow \sum_i c_i(t) O_i^R(x), \quad (3)$$

である。ただしここで $O_i^R(x)$ は $t = 0$ におけるもとのゲージ理論でのくりこまれた演算子で、 i は異なる演算子を表す添字である。また係数 $c_i(t)$ は、 t が小さいときには原理的には摂動的に解析することができる。微小時間展開を用いて EMT を構成するため、文献 [2] において鈴木は、演算子

$$U_{\mu\nu}(t, x) = G_{\mu\rho}(t, x)G_{\nu\rho}(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}(t, x)G_{\rho\sigma}(t, x), \quad (4)$$

$$E(t, x) = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}(t, x)G_{\mu\nu}(t, x), \quad (5)$$

の微小時間展開を行うことを提案した。このとき、展開の結果はゲージ不変性などを考慮すると

$$U_{\mu\nu}(t, x) = \alpha_U(t) \left[T_{\mu\nu}^R(x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}T_{\rho\rho}^R(x) \right] + O(t), \quad (6)$$

$$E(t, x) = \langle E(t, x) \rangle_0 + \alpha_E(t) T_{\rho\rho}^R(x) + O(t), \quad (7)$$

となる。このとき式 (6)、(7) に現れる係数は、MSbar 法で、

$$\alpha_U(t) = \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \left[1 + 2b_0\bar{s}_1\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right], \quad (8)$$

$$\alpha_E(t) = \frac{1}{2b_0} \left[1 + 2b_0\bar{s}_2\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right], \quad (9)$$

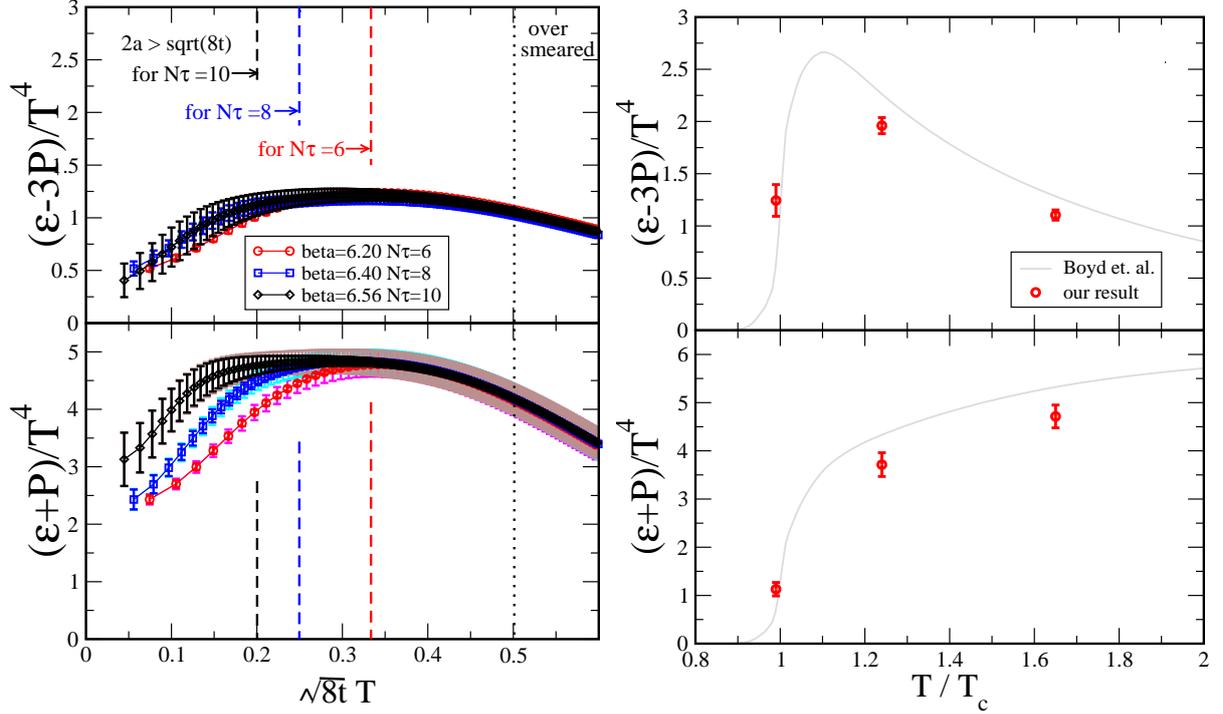


図 1: 左 : Gradient flow を用いて測定された $\varepsilon - 3P$ と $\varepsilon + P$ のフロー時間 t に対する依存性。右 : Gradient flow 法により測定された $\varepsilon - 3P$ と $\varepsilon + P$ の値の、先行研究との比較。

N_τ	6	8	10	T/T_c
β	6.20	6.40	6.56	1.65
	6.02	6.20	6.36	1.24
	5.89	6.06	6.20	0.99

表 1: シミュレーションパラメータ $\beta = 6/g^2$ および N_τ 。

となる [2]。ただし $\bar{s}_1 = \frac{7}{16} + \frac{1}{2}\gamma_E - \ln 2 \simeq 0.032960651891$ 、 $\bar{s}_2 = \frac{109}{176} - \frac{b_1}{2b_0^2} = \frac{383}{1936} \simeq 0.19783057851$ 、 $b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} N_c$ 、 $b_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{34}{3} N_c^2$ である。式 (6)、(7) を逆解きすることで、EMT の表式

$$T_{\mu\nu}^R(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha_U(t)} U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{\delta_{\mu\nu}}{4\alpha_E(t)} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle_0] \right\}, \quad (10)$$

が得られる。

2.3 数値解析結果

本申請期間にはまず、クエンチ QCD の熱力学量に関して $32^3 \times N_t$ という比較的小さな格子上で、上で求めた EMT を用いた解析を行い、このアイデアが定性的に正しく、ま

た実用的にも有用な手法であることを確認した [3]。この研究では、エネルギー密度 ε および圧力 P が EMT の期待値として

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (11)$$

$$P = \langle T_{ii} \rangle, \quad (12)$$

のように与えられることを用いて、gradient flow で定義された EMT の期待値を直接測定することで ε および P を求める解析を行った。熱力学量の数値解析では、通常 ε と P それぞれではなく、

$$\varepsilon - 3P, \quad \varepsilon + P, \quad (13)$$

の組み合わせが解析対象となることが多い。ここで $\varepsilon - 3P$ はトレースアノマリへの有限温度効果であり、 $\varepsilon + P$ はエントロピー密度 S と、 $ST = \varepsilon + P$ なる関係を持つ。図 1 左に、gradient flow を用いて得られた $\varepsilon - 3P$ と $\varepsilon + P$ のフロー時間 t に対する依存性を示す [3]。この結果は Wilson Plaquette 作用を用いて行われたもので、それぞれの解析の具体的なパラメータは図 1 に示してある。この図から、 t 依存性が平坦になる t の領域が存在することが分かる。熱力学量の値はこのプラトー領域から読み取ることができる。こうして読み取った熱力学量の値を図 1 右に示す。この図では、熱力学量の値を積分法と呼ばれる我々とは全く異なる手法で測定した場合の結果 [4] と比較しているが、両者の結果は誤差の範囲内で一致している。また、我々の解析では使用したゲージ配位の数 が 300 個と、積分法と比べ桁以上少ない統計量で実用的な解析が遂行できたことも特筆に値する。この結果は、gradient flow で定義された EMT が正しく機能し、かつこの EMT を用いた解析は実用的にも有効であることを示している。

我々は更に、格子間隔を約 2 倍に細かくした、 $64^3 \times N_t$ の格子上で同様な解析を行い、熱力学量の連続極限への外挿の安定性や、相関関数の解析などを行っている。熱力学量の解析においては、連続極限が安定して取れることが示された。また、相関関数の解析においても興味深い結果が得られつつある。一例として、エネルギーの相関関数

$$C(\tau) = \int d^3x \langle T_{00}(\tau, x) T_{00}(0, 0) \rangle, \quad (14)$$

をいくつかのフロー時間 t について解析したものを図 2 に示す [5]。図 2 では、虚時間 τ が小さい領域では相関関数が増大しているのが分かる。これは、gradient flow によりゲージ場が smearing されたため、演算子がオーバーラップしてしまったこと由来すると理解できる。実際、この領域では相関関数が t に依存して変化している。一方、 τ が gradient flow の拡散長よりも大きい領域では相関関数は t に依存しなくなり、この領域の相関関数の値は gradient flow に依存しない物理量であると解釈できる。このような τ の領域において、エネルギー相関関数 $C(\tau)$ は τ に依存しない定数値を取る振る舞いをするのが図 2 から見て取れる。このような $C(\tau)$ の振る舞いは単純にエネルギー保存則

$$\frac{d}{d\tau} \int d^3x T_{00}(\tau, x) = 0, \quad (15)$$

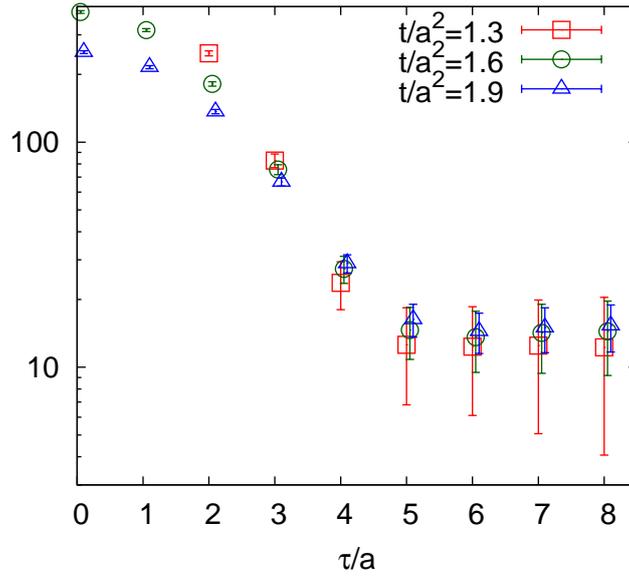


図 2: エネルギー相関関数 $C(\tau)/T^5$ の虚時間 τ に対する依存性。三つの異なるフロー時間 $t/a^2 = 1.3, 1.6, 1.9$ の結果が示されている。

の帰結であり、この結果は我々の数値解析がエネルギー保存則を正しく再現していることを示唆するものである。また、 $C(\tau)$ の定数値はエネルギーゆらぎ $\langle \delta E^2 \rangle$ であるが、エネルギーゆらぎは

$$\frac{c_V}{T^3} = \frac{\langle \delta E^2 \rangle}{VT^5} \quad (16)$$

なる関係式により比熱 c_V と対応している。この関係式を用いた比熱の測定も進めている。現在これらの結果を論文としてまとめる作業に取りかかっている。

参考文献

- [1] M. Luscher, JHEP **1008** (2010) 071 [arXiv:1006.4518 [hep-lat]]; M. Luscher and P. Weisz, JHEP **1102**, 051 (2011) [arXiv:1101.0963 [hep-th]].
- [2] H. Suzuki, PTEP **2013**, no. 8, 083B03 (2013) [arXiv:1304.0533 [hep-lat]].
- [3] M. Asakawa *et al.* [FlowQCD Collaboration], arXiv:1312.7492 [hep-lat].
- [4] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Petersson, Nucl. Phys. B **469**, 419 (1996) [hep-lat/9602007].
- [5] M. Kitazawa (for FlowQCD Collaboration) “Thermodynamics of Gauge Theory from Gradient Flow”, talk at 32nd International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE2014), Columbia University, USA, 30 June 2014.