

研究責任者名 Name	中村 純 NAKAMURA Atsushi	所属機関 Affiliation	大阪大学核物理研究センター
受理番号 Proposal No.	大型 14/15-05	研究課題名 Program title	非可換ゲージ理論におけるエンタングルメント・エントロピーの測定

研究を終了しましたので、下記の通り報告します。

#### 成果の概要

##### Abstract

(和文)

量子系においては、たとえ十分に離れていても 2 つのシステムの間には相関が生じる。これは 1935 年に Einstein-Podolsky-Rosen パラドックスとして認識されて以来、量子力学の基本的な性質として実験的にも確認され、量子エンタングルメント（量子纏れ）として研究が進んできた。近年、物性物理学においても分析が行われ、高柳等により場の量子論での定式化も行われ、AdS/CFT 対応を応用した研究では量子的相転移の可能性が示唆されている。また、閉じこめ、非閉込め相を持つ QCD では、ハドロンとクォーク・グルーオン系とで自由度が異なるため、エントロピーは 2 つの相を区別する新しい指標となりうる。

本研究では、格子シミュレーションによりエントロピック c 関数を測定し、近距離／遠距離での異なる振舞いを観測した。予想とは異なり、2 つの間には相転移は見られなかった。格子計算に起因する不定性を調べるため、体積依存性、格子間隔依存性、レプリカ数依存性を調べ、これらの依存性は統計誤差よりも小さいことを確認した。

(英文)

In quantum system, two systems are correlated even they are far separated. This is well recognized since Einstein-Podolsky-Rosen paradox in 1935; it was confirmed by experiments, and is studied as the quantum entanglement. Recently the quantum entanglement has been actively studied in the condensed matter physics, and was successively formulated in quantum field theory by Takayanagi et al. Also there have been interesting investigation in black hole investigation using AdS/CFT. In QCD, the degrees of freedom in hadron phase and quark/gluon phase are different, and the entanglement entropy may serve as a new order parameter.

We study the entropic c-function by lattice simulations, and find very different its behavior between the short and long distances. However, contrary to standard expectation, no phase transition is observed. In order to check ambiguities due to the lattice, we check the volume dependence, the lattice spacing dependence and the replica number dependence; we found that the systematic errors due to them are smaller than the statistical errors.

研究成果を開しているホームページアドレス

事務局にて使用	論文 査読有	論文 査読無	講義・発表	招待講演	その他
	0	0	4	2	0

# 実施報告書

## 1 研究組織

研究責任者

中村 純 (なかむらあつし) 大阪大学、核物理研究センター、共同研究員  
共同研究者

伊藤 悦子 (いとう えつこ) 高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 特任助教

永田 桂太郎 (ながた けいたろう) 高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 HPCI 研究員

## 2 研究の概要

量子エンタングルメントエントロピーは、システムが量子力学的にどのように相関しているかを表す量である。このような研究は量子情報理論、物性理論で開発が始まり、量子場の理論と共形場理論への応用が進んでいる。

長さ  $l$  の部分空間  $A$  とその補空間  $B$  を考える。通常のエントロピーと異なり、エンタングルメントエントロピーは体積ではなく 2 つのシステムの間境界面に比例する。

弱電磁相互作用では摂動的記述が十分な理解を与え、観測量は局所的オペレータの行列要素に帰着する。しかし、強結合理論ではどのような記述が良いのかは明らかではない。そこでは、通常非局所的な探索針 (probe) が導入される。ウィルソンループ  $C$  はこのような例になっている。ウィルソンループは、距離  $R$  離れた重クォークのポテンシャルエネルギー  $V(R)$  を定義する。

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp(-V(R) \cdot T), \quad (1)$$

このポテンシャルは

$$V(R) \approx -\frac{c}{R} + \sigma \cdot R, \quad (2)$$

で良く記述される。Wilson 経路  $C$  は閉曲線であり、これはクォーク・反クォークが最初に接触し、後の時間まで量子的に纏れていることになる。

物性論では、エンタングルメントは量子的相転移の概念の導入を可能とした [1, 2]。ブラックホールの物理では、強く相互作用する系ではホライズンの理論にエンタングルメントが本質的であることが明らかになってきた [3]。マルダセーナによるホログラフィー理論は、物性論とブラックホールの物理を統一する手法であり [4]、場の量子論におけるエンタングルメント研究へと繋がってきた [5, 6]。

全システムがいくつかのシステムに分割されたとする。ここではもっとも簡単な場合として、 $A$ 、 $B$  2つのシステムが部分空間となるような系を考える。全システムは純粋状態にあるとして、密度関数  $\rho_{tot}$  を導入する。全ヒルベルト空間は、 $A$ 、 $B$  2つの部分空間に対応する空間の直積となる。 $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 。部分空間  $A$  のエントロピー  $S_A$  はフォン・ノイマンエントロピーとして

$$S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log(\rho_A), \quad (3)$$

となる。ここで  $\rho_A = \text{tr}_B \rho_{tot}$ 。

次のエントロピー  $C$  関数を定義する [7, 8]:

$$C(l) = \frac{l^3}{|\partial A|} \frac{\partial S_A}{\partial l}, \quad (4)$$

ここで、 $\partial A$  は、2つのシステムの2次元境界であることである。

Nishioka 等に従い、 $C(l)$  をある距離  $l = l_{cr}$  で量子相転移としておこる閉じこめの表現であると考えことにする。このように考えることにより、エンタングルメントは閉じこめの新しいアプローチとなる。

場の理論が string 理論にホログラフィックに双対になる場合には、エントロピー関数は幾何学的に評価が可能である [5]。特に  $AdS_{d+2}$  空間の境界に  $(d+1)$  次元共形場がある場合にはエンタングルメントエントロピーは

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{d+2}}, \quad (5)$$

で与えられることが Ryu らによって示された [5]。ここで  $G_N^{d+2}$  は  $AdS_{d+2}$  空間のニュートン定数に対応するものである。 $\text{Area}(\gamma_A)$  は  $d$  次元の表面  $\gamma_A$  の最小面積であり、その境界は領域  $A$  と  $B$  の境界になり、エンタングルメントエントロピー  $S_A$  の定義から  $\partial \gamma_A = \partial A$ 。ブラックホールのエントロピーに対する Bekenstein-Hawking 表現は  $S_{BH} = (\text{Area})_{horizon}/4G_N$  で与えられる。

Klebanov 等は、閉じこめを持つ理論に Takayanagi 等の議論を拡張して、 $l = l_{cr}$  で量子相転移が存在することを予言した [9]。残念ながら  $SU(N)$

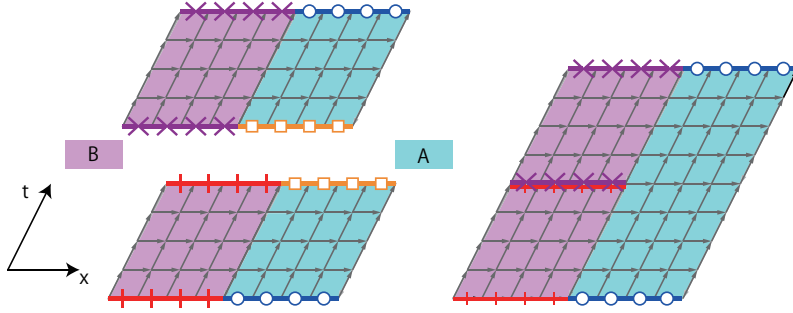


図 1: レプリカ格子とその境界条件。

純ゲージ理論の満足のいくホログラフィックな理論は存在しない。もっとも有望な候補は Witten-Sakai-Sugimoto 模型である [10]。この理論は長距離で閉じこめが実現される。しかし、双対理論としてはこの模型は強結合極限に対応し、短距離では 5d 理論に対応してしまう。

非常に短距離で相互作用しないグルーオン近似が良いと仮定すれば、 $C(l)$  は自由度に比例する。それぞれのゲージボソンの寄与を独立な 2 つのスカラール場で置き換えられるとすれば [11]

$$\lim_{l \rightarrow 0} C(l) \approx (2K) \cdot 2 \cdot (N_c^2 - 1) \approx 0.16, \quad (6)$$

となる。ここで  $K$  は自由実スカラール場のエンタングルメントエントロピーであり、 $K \approx 0.005$  である [6]。ファクター 2 はグルーオンのポーラリゼーションであり、ファクター  $(N_c^2 - 1)$  はグルーオンの数である。

エンタングルメントエントロピーの局所ゲージ不変性、及び  $A$  に対するヒルベルト空間は自明ではない。このため、格子上のいくつかのエンタングルメントエントロピーの定義がある [12, 13]。ある定義は別な定義と異なる値を与えることもある。最近、最大ゲージ不変な定義が提案された [14, 15]。また、レプリカトリックに基づく定義は同じ値を与えることも示された [16, 17]。

$l \rightarrow 0$  の極限でのエントロピック関数  $C(l)$  の振舞いについて、信頼に足る評価は存在しないようであるが、 $C(l)$  は定数に近づいていくことは期待できるであろう。また長距離では、 $C(l)$  は  $\exp(-m_{glueball} \cdot l)$  程度でゼロになると思われる [9]。ここで  $m_{glueball}$  は純 Yang-Mills 理論でのグルーボール質量である。実際、質量の無いグルーオンは閉じこめ相では遠距離まで伝搬することはできない。

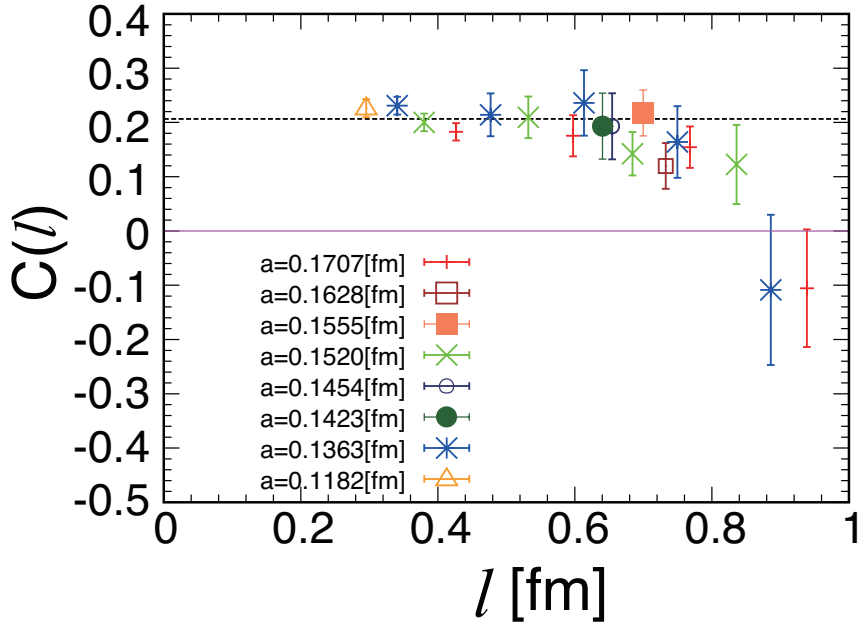


図 2: レプリカ格子  $(N_s, N_t, n) = (16, 16, 2)$  を使って得られたエントロピック  $C$  関数。破線は短距離部のベストフィット  $C = 2.06$ 。

ホログラフィックアプローチでは、 $l > l_{cr}$  で  $C(l) = 0$  となる。そしてこれまでに調べられた全ての場合について、 $l = l_{cr}$  は一次の相転移である [9, 18]。場の量子論的には、閉じ込めは非摂動的な磁気自由度の凝縮と関連している。凝縮は統計的な性質であり、この統計性が閉じ込めの線形ポテンシャルを作っている [19]。一方、統計的な場の配位はエンタングルメントを作り出すことはできず、エントロピック関数  $C(l)$  には寄与しない。格子シミュレーションは、この磁気自由度は所謂 P-ボルテックスによって飽和していることを示唆している。この P-ボルテックスは閉じ込め/非閉じ込め相転移温度  $T_{cr}$  以下では凝縮している。格子間隔  $a$  に近い非常に短距離では、この P-ボルテックスはランダムになっている。その結果、コーネルポテンシャル (2) の線形パートが短距離では小さな補正として生き残る。

この P-ボルテックスの早い段階でのランダム化の別の現れは、そのエントロピック関数  $C(l)$  への寄与がすべての距離で無くなるということである。つまり、近距離での  $C(l)$  への非摂動的補正が無いことが期待される。

以上のような考察のもと、レプリカ法によりエントロピック関数  $C(l)$  の測定を行った。レプリカ法の詳細は文献 [16, 17] を参照されたい。結果

は図 2 にまとめられている。

基本的な特徴は以下のようなものである。

- $l \lesssim 0.7fm$   $C(l) \approx 0.2$  では、評価 (6) とよく一致している。
- $0.7fm \lesssim l \lesssim 0.9fm$  に相転移領域がある。 $C(l)$  ははっきりと減少し、近似的にゼロとなる。しかし一次相転移と同定できるようなシャープな現象は見られない。
- $0.7fm$  までは、 $C(l)$  はほぼ定数である。このことは、短距離における非摂動的補正が存在しないことを示している。

詳細は文献 [20] を参照されたい。

## 参考文献

- [1] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico and A. Kitaev, Phys. Rev. Lett. **90**, 227902 (2003) [quant-ph/0211074].
- [2] P. Calabrese and J. L. Cardy, J. Stat. Mech. **0406**, P06002 (2004) [hep-th/0405152].
- [3] “An Introduction To Black Holes, Information And The String Theory Revolution: The Holographic Universe”, L. Susskind, J. Lindesay.
- [4] J. M. Maldacena, Int.J.Theor.Phys. **38** (1999) 1113, Adv.Theor.Math.Phys. **2** (1998) 231, hep-th/9711200 ;  
O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Ya. Oz, Phys.Rept. **323** (2000) 183, hep-th/9905111.
- [5] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].
- [6] S. Ryu and T. Takayanagi, JHEP **0608**, 045 (2006), [hep-th/0605073].
- [7] T. Nishioka and T. Takayanagi, JHEP **0701**, 090 (2007) [hep-th/0611035].
- [8] T. Nishioka, Sh. Ryu, T. Takayanagi, J.Phys. A**42** (2009) 504008 arXiv:0905.0932.

- [9] I. R. Klebanov, D. Kutasov and A. Murugan, Nucl. Phys. B **796**, 274 (2008) [arXiv:0709.2140 [hep-th]].
- [10] E. Witten, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 505, hep-th/9803131; T. Sakai, Sh. Sugimoto, Prog.Theor.Phys. 113 (2005) 843, hep-th/0412141 .
- [11] T. Nishioka, Sh. Ryu, T. Takayanagi, J.Phys. A42 (2009) 504008 arXiv:0905.0932
- [12] D. N. Kabat, Nucl. Phys. B 453, 281 (1995), [hep- th/9503016].
- [13] J. W. Chen, S. H. Dai and J. Y. Pang, arXiv:1503.01766 [hep-th].
- [14] S. Ghosh, R. M. Soni and S. P. Trivedi, arXiv:1501.02593 [hep-th].
- [15] S. Aoki, T. Iritani, M. Nozaki, T. Numasawa, N. Shiba and H. Tasaki, arXiv:1502.04267 [hep-th].
- [16] P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, Nucl. Phys. B 802, 458 (2008) [arXiv:0802.4247 [hep-lat]].
- [17] Y. Nakagawa, A. Nakamura, S. Motoki and V. I. Za- kharov, PoS LAT 2009, 188 (2009) [arXiv:0911.2596[hep-lat]]; PoS LATTICE 2010, 281 (2010) [arXiv:1104.1011 [hep-lat]].
- [18] Omer Ben-Ami, Dean Carmi, Jacob Sonnenschein, “Holographic Entanglement Entropy of Multiple Strips”, JHEP11(2014)144
- [19] J. Greensite, “Global Symmetry, Local Symmetry, and the Lattice”, An Introduction to the Confinement Problem, 3–19, 2011, Springer
- [20] E. Itou, K. Nagata, Y. Nakagawa, A. Nakamura and V.I. Zakharov, “Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory”, arXiv:1512.01334 [hep-th]