

研究責任者名 Name	北沢 正清 KITAZAWA Masakiyo	所属機関 Affiliation	大阪大学 Osaka University
受理番号 Proposal No.	大型 14/15-08	研究課題名 Program title	Gradient flow を用いた有限温度 QCD の研究 QCD at nonzero temperature with gradient flow

研究を終了しましたので、下記の通り報告します。

成果の概要

Abstract

(和文)

本研究では、gradient flow を用いた格子 QCD 数値解析に関する様々な研究を行っている。本申請期間は主に、gradient flow を用いた Wilson ゲージ作用の格子間隔の測定と、微少フロー時間展開により得られたエネルギー運動量テンソルを用いた熱力学量の測定という二つの課題に重点的に取り組んだ。格子間隔の測定においては、gradient flow を用いて定義した $w_{\{0.4\}}$ と呼ばれる参照スケールを用いることで、離散化誤差と有限体積効果を除去しつつ、従来の研究と比べて広いパラメータ領域における格子間隔の精密測定を行った。熱力学量の測定については、クエンチ QCD の熱力学量解析を従来のものより約 2 倍格子間隔の小さい設定で実行中のほか、新たにフル QCD の熱力学量の測定にも取り組んでいる。

(英文)

In this study we perform numerical analyses of lattice gauge theory on the basis of the gradient flow. In particular, we have concentrated on two subjects in this period; (1) measurement of lattice spacing of Wilson gauge action, and (2) measurement of thermodynamics with energy-momentum tensor defined by small flow-time expansion. We have defined a reference scale called $w_{\{0.4\}}$ on the basis of the gradient flow, and determined the lattice spacing of Wilson gauge action with this reference scale over a wide range of parameter. As for the measurement of thermodynamics, we are performing numerical analyses on about twice finer lattices compared with our previous study. We have newly started the analysis of thermodynamics of full QCD in the same method.

研究成果を公開しているホームページアドレス

事務局にて使用	論文 査読有	論文 査読無	講義・発表	招待講演	その他
	0	1	3	(*)5	0

gradient flow を用いた有限温度 QCD の研究

1 研究組織

- 北沢正清 (きたざわまさきよ)
大阪大学大学院理学研究科、助教 (研究責任者)
- 浅川正之 (あさかわまさゆき)
大阪大学大学院理学研究科、教授
- 初田哲男 (はつだてつお)
理化学研究所仁科加速器研究センター、主任研究員
- 入谷匠 (いりたにたくみ)
京都大学基礎物理学研究所、ポスドク研究員
- 伊藤悦子 (いとうえつこ)
高エネルギー加速器研究機構素核研、特任助教
- 鈴木博 (すずきひろし)
九州大学理学研究院、教授

2 当該期間の実施報告

2.1 概要

近年、格子 QCD 分野で gradient flow と呼ばれる場の変換が注目され、広く研究されている [1, 2, 3]。gradient flow とは、ゲージ場に対しては

$$\frac{dA_\mu}{dt} = -\frac{\partial S_{\text{YM}}(t)}{\partial A_\mu} = D_\nu G_{\nu\mu}, \quad (1)$$

という微分方程式による連続変換である。ただし、 $S_{\text{YM}}(t)$ は Yang-Mills 作用であり、 $t = 0$ の初期条件には通常のゲージ理論が採用される。また、 t はフロー時間と呼ばれるパラメータである。式 (1) は、tree level において、

$$\frac{dA_\mu}{dt} = \partial_\nu \partial_\nu A_\mu + (\text{gauge dependent terms}), \quad (2)$$

β	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0	7.2	7.4	7.5
N_s	64	64	64	64	64	64	64	96	96	128	128
N_{conf}	30	100	49	100	30	100	30	60	53	40	60

表 1: 本研究で用いたシミュレーションパラメータ。ゲージ結合定数 $\beta = 6/g_0^2$ 、格子サイズ N_s 、および配位数 N_{conf} [4]。

と変形することができる。式 (2) は 4 次元空間の拡散方程式と同じ構造をしており、このことから、gradient flow による $t > 0$ の変換は場を smearing する操作に対応し、 $\sqrt{8t}$ が smearing 半径を表すことが分かる。フェルミオン場に対する gradient flow も、4 次元空間の拡散方程式のゲージ不変な拡張として同様に定義される。

Gradient flow が格子 QCD 数値解析で広く有用性を見出される理由のひとつとして、gradient flow の smearing 的な性質により、 $t > 0$ の場に対し物理量の観測を行った場合、紫外ゆらぎに由来する観測量の統計誤差が大幅に低減されることが挙げられる。また、 \sqrt{t} が格子間隔と比べて十分大きいとき、ゲージ場は格子正則化を「忘れた」場と見なすことができるのも重要な特徴である。一方で、gradient flow により変換された $t > 0$ の場はもとのゲージ場とは異なるものであり、この量を用いてもとの理論の観測量を論じる際には注意が必要である。

本研究課題では、gradient flow を用いた格子 QCD 上の数値解析を行っている。本申請期間中は、以下に挙げるような研究成果を挙げた。

2.2 Wilson ゲージ作用の格子間隔の測定

前述のように、有限の t におけるゲージ場はもとの理論の場とは異なるものだが、そこで定義された観測量は正則化に依存しないという特徴を持つ [1]。このことから、格子ゲージ理論上で有限の t における無次元量の期待値を測定した場合、この期待値は t のみの関数であり、離散化誤差を除いて格子間隔依存性を持たないという主張ができる。文献 [1] では、gradient flow が持つこの性質を、格子間隔の測定に用いる提案がなされた。本研究では、この測定法に基づいて Wilson ゲージ作用の格子間隔を $6.3 \leq \beta \leq 7.5$ という広いパラメータ領域で測定した [4, 5]。

本研究では、無次元観測量として、

$$E(t) = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(t) G_{\mu\nu}^a(t), \quad (3)$$

から構成される、 $t^2 E(t)$ [1] と、 $t \frac{d}{dt} t^2 E(t)$ [6] を用いた。これらの無次元量が特定の値 X を取る t の値

$$t^2 \langle E(t) \rangle \Big|_{t=t_X} = X, \quad (4)$$

および

$$t \frac{d}{dt} t^2 \langle E(t) \rangle \Big|_{t=t_X} = X, \quad (5)$$

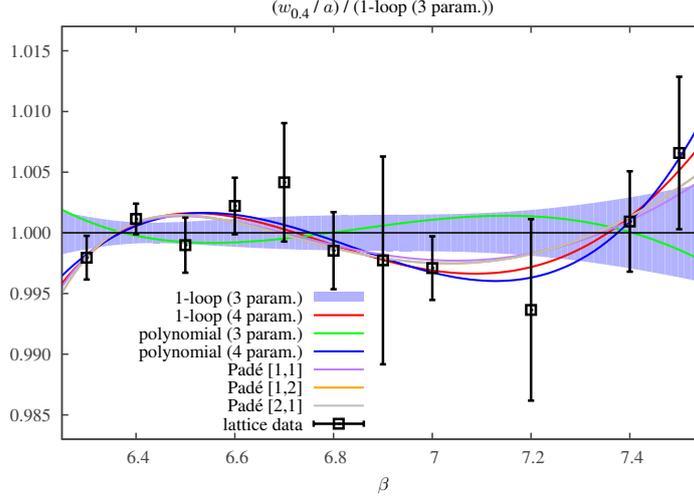


図 1: 式 (6) で決めたフィット関数による、格子間隔データ $w_{0.4}/a$ のプロット [4]。データ点は格子上で得られた $w_{0.4}/a$ 。

により定義される t_X と w_X を、図 1 に示したシミュレーションパラメータで測定した [4]。それぞれのパラメータで用いた配位数 N_{conf} は下段に示してある。

この解析で得られた数値解析結果を調べた結果、格子間隔を決めるスケールとして $w_{0.4}$ を採用することにした。この場合に、格子離散化誤差と有限体積効果が十分抑制されていることを確認した [4]。また、今回得られた $w_{0.4}/a$ の測定値を元に、数値解析を行ったパラメータ領域で有効な $w_{0.4}/a$ のフィット関数

$$\frac{w_{0.4}}{a} = \exp\left(\frac{4\pi^2}{33}\beta - 8.6853 + \frac{37.422}{\beta} - \frac{143.84}{\beta^2}\right) [1 \pm 0.004(\text{stat.}) \pm 0.007(\text{sys.})] \quad (6)$$

を得た。図 1 に、式 (6) の値で規格化した $w_{0.4}/a$ の数値解析結果を示す [4]。

2.3 Gradient flow とエネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソル (EMT) は、物理学におけるもっとも基本的な観測量の一つである。ところが、格子 QCD 上では一般座標変換不変性がないため、この変換の生成子であるエネルギー運動量テンソルを測定することはこれまで一般的に困難であった。一方、gradient flow を用いると、格子上で非摂動的に正しく繰り込まれた EMT を定義し、かつ期待値や相関関数の測定を高精度で行うことができることが最近発見された [1, 7]。我々は、格子 QCD 数値シミュレーションにおいて、このように定義された EMT を用いて期待値や相関関数の測定を行う研究を行っている [8, 9, 5, 10]。

Gradient flow による EMT の定義は、微小時間展開 [1] を用いて行われる。微小時間展開とは、有限のフロー時刻 $t > 0$ における演算子 $\tilde{O}(t, x)$ の、 $t \rightarrow 0^+$ の極限での展開

$$\tilde{O}(t, x) \rightarrow \sum_i c_i(t) O_i^R(x), \quad (7)$$

である。ただしここで $O_i^R(x)$ は $t = 0$ におけるもとのゲージ理論でのくりこまれた演算子で、 i は異なる演算子を表す添字である。また係数 $c_i(t)$ は、 t が小さいときには原理的には摂動的に解析することができる。微小時間展開を用いて EMT を構成するため、文献 [7] において鈴木は、演算子

$$U_{\mu\nu}(t, x) = G_{\mu\rho}(t, x)G_{\nu\rho}(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}(t, x)G_{\rho\sigma}(t, x), \quad (8)$$

$$E(t, x) = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}(t, x)G_{\mu\nu}(t, x), \quad (9)$$

の微小時間展開を行うことを提案した。このとき、展開の結果はゲージ不変性などを考慮すると

$$U_{\mu\nu}(t, x) = \alpha_U(t) \left[T_{\mu\nu}^R(x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}T_{\rho\rho}^R(x) \right] + O(t), \quad (10)$$

$$E(t, x) = \langle E(t, x) \rangle_0 + \alpha_E(t)T_{\rho\rho}^R(x) + O(t), \quad (11)$$

となる。このとき式 (10)、(11) に現れる係数は、MSbar 法で、

$$\alpha_U(t) = \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \left[1 + 2b_0\bar{s}_1\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right], \quad (12)$$

$$\alpha_E(t) = \frac{1}{2b_0} \left[1 + 2b_0\bar{s}_2\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right], \quad (13)$$

となる [7]。ただし $\bar{s}_1 = \frac{7}{22} + \frac{1}{2}\gamma_E - \ln 2 \simeq -0.086358$ 、 $\bar{s}_2 = \frac{21}{44} - \frac{b_1}{2b_0^2} = \frac{27}{484} \simeq 0.055785$ 、 $b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} N_c$ 、 $b_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{34}{3} N_c^2$ である。式 (10)、(11) を逆解きすることで、EMT の表式

$$T_{\mu\nu}^R(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha_U(t)} U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{\delta_{\mu\nu}}{4\alpha_E(t)} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle_0] \right\}, \quad (14)$$

が得られる。

EMT からエネルギー密度 ε および圧力 P を得るためには、EMT 対角成分の期待値を取れば良い：

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (15)$$

$$P = \langle T_{ii} \rangle. \quad (16)$$

本研究では、gradient flow で定義された EMT の期待値を直接測定することで ε および P を求める解析を行った。熱力学量の数値解析では、通常 ε と P それぞれではなく、

$$\varepsilon - 3P, \quad \varepsilon + P, \quad (17)$$

の組み合わせが解析対象となることが多い。ここで $\varepsilon - 3P$ はトレースアノマリへの有限温度効果であり、 $\varepsilon + P$ はエントロピー密度 S と、 $ST = \varepsilon + P$ なる関係を持つ。

本申請期間には、我々が以前に行った $32^3 \times N_t$ という比較的小さな格子上でのクエンチ QCD の熱力学量の測定 [8] を、格子間隔の小さな格子上に拡張する解析を行った。図 2

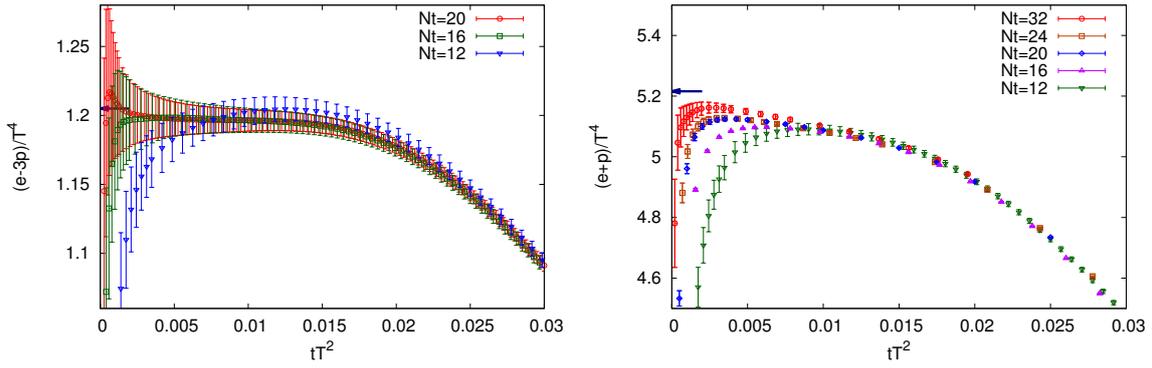


図 2: Gradient flow を用いて測定された $(e - 3p)/T^4$ (左) および $(e + p)/T^4$ (右) のフロー時間 t に対する依存性。温度は $T = 1.66T_c$ に固定して、幾つかの格子間隔に対する結果が示されている。

N_t	12	16	20	24	32
β	6.719	6.941	7.117	7.256	7.500

表 2: $T = 1.66T_c$ での熱力学量の測定 (図 2) に用いたシミュレーションパラメータ。

に、 $T = 1.66T_c$ において gradient flow を用いて得られた $\varepsilon - 3P$ と $\varepsilon + P$ のフロー時間 t に対する依存性を示す [5]。この結果は Wilson plaquette 作用を用いて行われたもので、この解析に用いたシミュレーションパラメータは図 2 に示してある。この図から、 $\varepsilon - 3P$ には t 依存性が平坦になる t の領域が存在することが分かる。熱力学量の値はこのプラトー領域から読み取ることができるが、プラトーの値は縦軸上に矢印で示した先行研究の結果とよく一致している。一方、 $\varepsilon + P$ にはプラトー領域が出現せず、直線的な振る舞いを示すことがわかった。この振る舞いの起源は式 (14) で省略した高次元演算子によるものであると考えられる。熱力学量は、直線的振る舞いを $t \rightarrow 0$ に外挿することで得られるが、その場合の外挿値は縦軸上に矢印で示した先行研究の結果とよく一致しているように見える。これらの結果は、gradient flow で定義された EMT が正しく機能し、かつこの EMT を用いた解析は実用的にも有効であることを示している。

さらに、本申請期間には新たに、フル QCD の熱力学量を gradient flow を用いて測定する研究も開始している [10]。

参考文献

- [1] M. Luscher, JHEP **1008** (2010) 071 [arXiv:1006.4518 [hep-lat]]; M. Luscher and P. Weisz, JHEP **1102**, 051 (2011) [arXiv:1101.0963 [hep-th]].

- [2] Reviewed in, M. Lüscher, PoS LATTICE **2013**, 016 (2014) [arXiv:1308.5598 [hep-lat]].
- [3] A. Ramos, PoS LATTICE **2014**, 017 (2015) [arXiv:1506.00118 [hep-lat]].
- [4] M. Asakawa, T. Iritani, M. Kitazawa and H. Suzuki, arXiv:1503.06516 [hep-lat].
- [5] M. Kitazawa, M. Asakawa, T. Hatsuda, T. Iritani, E. Itou and H. Suzuki, arXiv:1511.05235 [hep-lat].
- [6] S. Borsanyi, *et al.*, JHEP **1209**, 010 (2012) [arXiv:1203.4469 [hep-lat]].
- [7] H. Suzuki, PTEP **2013**, no. 8, 083B03 (2013) [arXiv:1304.0533 [hep-lat]].
- [8] M. Asakawa *et al.* [FlowQCD Collaboration], arXiv:1312.7492 [hep-lat].
- [9] M. Kitazawa, M. Asakawa, T. Hatsuda, T. Iritani, E. Itou and H. Suzuki, PoS LATTICE **2014**, 022 (2014) [arXiv:1412.4508 [hep-lat]].
- [10] E. Itou, *et al.* PoS, LATTICE **2015**, 303 (2015) [arXiv:1511.03009 [hep-lat]].