

研究責任者名 Name	谷口 裕介 TANIGUCHI Yusuke	所属機関 Affiliation	筑波大学
受理番号 Proposal No.	大型 14/15-19	研究課題名 Program title	カノニカル法による有限密度格子 QCD の研究

研究を終了しましたので、下記の通り報告します。

成果の概要

Abstract

(和文)

有限密度 QCD は中性子星の構造や超新星爆発の過程で重要な役割を担う系であり、その精密な研究は喫緊の課題である。しかし、この系の作用は一般的に複素数となってしまう、零密度の系に対して大きな成功を収めた格子定式化によるモンテカルロ数値計算がそのままの形では適用できないことがよく知られている。我々はこの複素作用の問題を回避するための手段としてカノニカル法を採用した。これはクォーク数が固定されたカノニカル分配関数を数値計算から直接的に求める方法であり、クォーク質量が重い場合には hopping parameter 展開と呼ばれる手法を用いて低コストで実行できることがわかっている。我々はこの手法を、 $m_\pi/m_\rho \sim 0.8$ 程度の比較的クォーク質量が重い領域に適用した。格子サイズは $8 \times 8 \times 8 \times 4$ を採用した。低コストの利点として、零密度系の相転移温度 T_c と比較して $0.65T_c < T < 3.62T_c$ という非常に広い温度領域の探索を行うことができたことが挙げられる。物理現象を捉えるための観測量としては、有限密度系の圧力、クォーク数密度とその高次のキュムラント、カイラル凝縮を主に計測した。その結果、 T_c 以下の温度においては、クォーク数の 2 次以上のキュムラントに有限密度相転移の痕跡と思われる著しい現象が現れることが判明した。更に 3 次以上の高次キュムラントの研究からこの現象はハドロンからクォークガスへの相転移現象であることが示唆されている。

(英文)

We study the finite density phase transition in the lattice QCD at real chemical potential. We adopt a canonical approach and the canonical partition function is constructed for $N_f=2$ QCD. After derivation of the canonical partition function we calculate observables like the pressure, the quark number density, its second and higher cumulant and the chiral condensate as a function of the real chemical potential. We covered a wide range of temperature region starting from the confining low to the deconfining high temperature; $0.65T_c < T < 3.62T_c$. We see a possible signal of the deconfinement and the chiral restoration phase transition at real chemical potential below T_c starting from the confining phase.

研究成果を公開しているホームページアドレス

事務局にて使用	論文 査読有	論文 査読無	講義・発表	招待講演	その他
	1	0	13	4	2

実施報告書

1 研究組織

研究責任者

谷口裕介（たにぐちゆうすけ）筑波大学、数理物質科学研究科、講師

共同研究者

中村 純（なかむらあつし）大阪大学、核物理研究センター、共同研究員

酒井 俊太郎（さかいしゅんたろう）京都大学、理学研究科、D3

福田 龍太郎（ふくだりゅうたろう）東京大学、理学系研究科、D2

岡 将太郎（おかしょうたろう）立教大学、理学研究科、D1

鈴木遊（すずきあそぶ）筑波大学、数理物質科学研究科、D1

2 研究の概要

格子ゲージ理論による有限密度 QCD の研究は未だ未開拓のフロンティアであり続けている。応用の観点からは、太陽質量の 2 倍に近い中性子星の発見など観測の大きな進展がある。日本の J-PARC、RIKEN-RIBF、ドイツの GSI-FAIR では、核内密度 ρ_0 からその数倍の密度までのデータが取れる可能性があり、さらに高密度では非閉じ込め相やカラー超伝導相など QCD は豊富な相を持つことが予想されている。そのため、有限密度核物質の信頼度の高い研究の重要性がいっそう高まっている。このような状況で、第一原理計算である格子 QCD からの有限密度の情報が強く求められているが、零密度に比べていまだ多くの試行が行われている段階である。その最大の理由としては、クォークのグランドカノニカル分布の経路積分表示には複素作用の問題があり、Monte Carlo 法による数値シミュレーションが非常に困難になってしまうという事実が挙げられる。我々はこの問題に対して、カノニカル法と呼ばれる手法を採用して、研究を行った。

統計力学的にはカノニカル分布とグランドカノニカル分布による記述は完全に等価であり、グランドカノニカル分配関数から fugacity 展開によっ

て定義されるカノニカル分布の経路積分表示は格子 QCD においても複素作用の問題を持たない事が古くから議論されてきた。その一方で fugacity 展開を数値的に実行しようとする、正負の量の激しい相殺が起きて、分配関数は実質的には求まらなくなるという問題が知られており、複素作用の問題が sign problem に形を変えて現れたものと解釈されていた。

この研究では $N_f = 2$ flavors QCD において fugacity 展開を時間方向へのクォークループの巻き付き数の展開として表現する。具体的にはクォーク質量を重い領域に限定する事で、クォークループの巻き付き数の展開を hopping parameter 展開として解析的に実行する。解析的に行われた fugacity 展開においては正負の量の相殺はコントロールされており、数値的に現れていた sign problem を回避できている。我々のグループはこの手法を $m_\pi/m_\rho \sim 0.8$ 程度の比較的クォーク質量が重い領域に適用した。格子サイズとしては $8^3 \times 4$ を採用し、カノニカル分配関数をクォーク数にして 90 個程度分の領域まで求める事に成功した。更にカノニカル分配関数を係数とする fugacity 展開を再実行する事で、**任意の実化学ポテンシャルに対するグランドカノニカル分配関数を再構成できた**。グランドカノニカル分配関数を用いた具体的な物理現象の探索として、次の 3 種の観測量を用いて有限密度相転移の研究を行った。

1. クォーク数密度
2. 感受率を含むクォーク数密度の高次のキュムラント
3. chiral condensate

hopping parameter 展開を用いるこの手法の優れている点として、計算コストを低く抑えることができることが挙げられる。その利点を生かして、我々は $0.65T_c < T < 3.62T_c$ という非常に広い温度領域の探索を行うことができた (ただし、 T_c は零密度系での相転移温度である)。その結果、 T_c 以下の温度においては、クォーク数の 2 次以上のキュムラントに有限密度相転移の痕跡と思われる著しい現象が現れることが判明した。更に 3 次以上の高次キュムラントの研究からこの現象はハドロンからクォークガスへの相転移現象であることが示唆されている。

3 研究成果の詳細

我々は 2 節に述べた hopping parameter 展開を利用したカノニカル法を有限密度 QCD に適用した。探索を行った温度領域を表 1 にまとめた。

我々はまず、カノニカル法において最も重要な量であるカノニカル分配関数を高精度で求めるためのプログラム開発を行った。カノニカル分配

β	κ	T/T_c	m_π/m_ρ	#conf
0.9	0.137	0.65	0.8992(45)	200
1.1	0.133	0.69	0.9056(45)	300
1.3	0.138	0.72	0.809(12)	100
1.5	0.136	0.83	0.755(13)	100
1.7	0.129	1	0.776(13)	500
1.9	0.125	1.77	0.726(15)	600
2.1	0.122	3.62	0.839(31)	500

表 1: 数値シミュレーションを行ったパラメータである β と κ . 対応する温度と m_π/m_ρ の値を載せている.

関数は、グランドカノニカル分配関数を純虚数化学ポテンシャルについてフーリエ変換することにより、計算することができる。フーリエ変換は振動関数の積分であり、特にバリオン数が高いところでは激しいキャンセレーションが生じるため、カノニカル分配関数を精度よく求めることが難しい。岡は、多倍長精度計算を用いて、フーリエ変換のプログラム内部で生じる桁落ち誤差を詳細に分析し、桁落ちが何桁生じているか調査した。また、その結果から、カノニカル分配関数を十分な精度で求めるためには変数の有効桁数が何桁必要になるか見積もった。

結果として、カノニカル分配関数を倍精度（10 進数で 16 桁）で、バリオン数 50 まで計算するためには、臨界温度より高温側では 70 桁以上、低温側では 110 桁以上の有効桁数で計算を行う必要があることが分かった。なお、ここで挙げた桁数は、数値計算のセットアップに依存する。たとえば、我々の研究では smear されたゲージ配位を使用しているが、smear を使わない場合は、高温側で 90 桁以上、低温側で 130 桁以上もの桁が必要になる。セットアップによって必要な桁数が増減することを考慮し、またこれより高いバリオン数での数値計算を目指すために、我々の研究では、変数の有効桁数を 400 桁に設定して計算を行うことにした。

この方法で先ず最初に求めるべき量はカノニカル分配関数 $Z_C(n, T, V)$ である。図 1 に示したように、分配関数は大きなクォーク数まで安定して求めることができ、高温側では Gauss 分布とほぼ一致する一方で、低温側では Gauss 分布からのズレが際立つという温度による振舞いの違いも観測されている。

一度カノニカル分配関数 $Z_C(n, T, V)$ が求まったら、実化学ポテンシャル μ に対して fugacity 展開の和を実行してやることができる。こうして実化学ポテンシャルにおけるグランドカノニカル分配関数 $Z_G(\mu, T, V)$ が

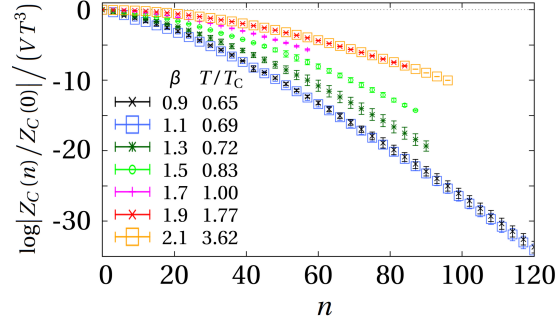


図 1: 各温度におけるカノニカル分配関数 $\log |Z_C(n)/Z_C(0)|/(VT^3)$. 横軸 n はクォーク数。グラフの色は温度による違いを表している。パラメータの対応は図中の対応表を参照のこと。上のシンボルほど高温領域。

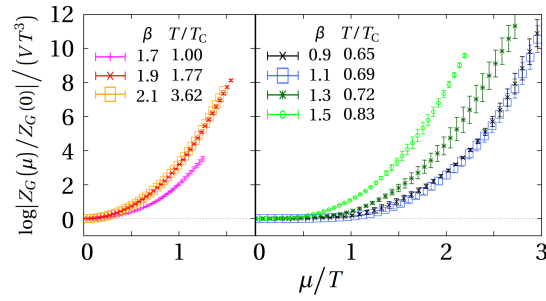


図 2: グランドカノニカル分配関数 $\log |Z_G(\mu, T, V)/Z_G(0, T, V)|/(VT^3)$ をクォークの化学ポテンシャル μ/T の関数として描いたもの。この量はグランドカノニカル分布における圧力に対応するもの。色による違いは図 1 と同じ。

計算できる

$$Z_G(\mu, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) \xi^n, \quad \xi = e^{\mu/T}. \quad (3.1)$$

図 2 はこの分配関数を加工してグランドカノニカル分布における圧力

$$\frac{1}{T^4} (P(\mu/T) - P(0)) = \frac{1}{VT^3} \log \left| \frac{Z_G(\mu, T, V)}{Z_G(0, T, V)} \right| \quad (3.2)$$

として描いている。

クォーク数の k 次のモーメントは

$$\langle \hat{N}^k \rangle = \frac{1}{Z_G(\mu, T, V)} \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} n^k Z_C(n, T, V) \xi^n \quad (3.3)$$

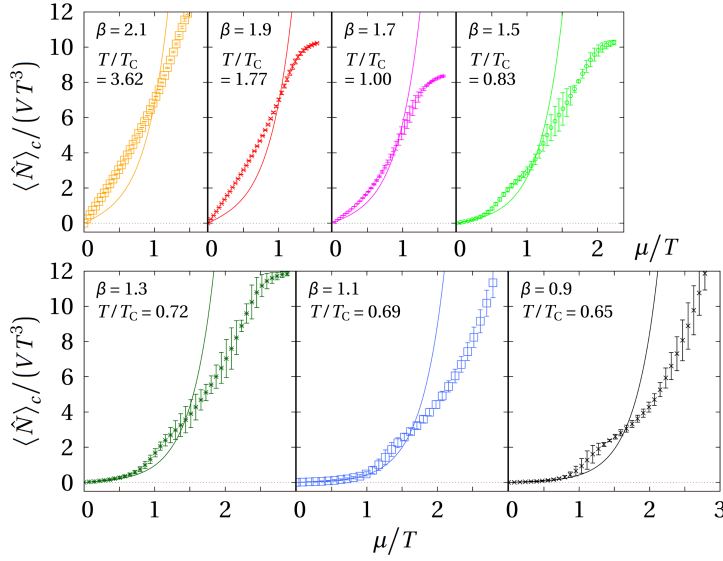


図 3: クォーク数密度 $\langle \hat{N} \rangle_c / (VT^3)$ をクォークの化学ポテンシャル μ/T の関数として描いたもの。色による違いは図 1 と同じ。

で定義される量であり、そこから

$$\langle \hat{N}^k \rangle_c = \left(\frac{\partial}{\partial(\mu/T)} \right)^k Z_G(\mu, T, V) \quad (3.4)$$

で与えられる k 次のキュムラントは相転移現象を捉えるための指標として非常に役に立つものである。図 3 は $k = 1$ に対応するクォーク数密度を描いたものである。実線は Hadron resonance gas model による結果であり、低温低密度の領域をうまく説明できていることがわかる。一方、高温または高密度側の振る舞いとは矛盾しており、これらの領域が非閉じ込め状態にあることを示唆している。図 4 はクォーク数の 2 次のキュムラントを描いたものであり、そこに現れるピークは相転移と関係することが知られている。ただし、カノニカル法では fugacity 展開 (3.1) の和を有限で打ち切ってしまうため、人工的なピークが常に現れている。その一方で低温側では常に 2 個以上のピークが現れており、その内の第一ピークは和の打ち切り数を変化させても、ほとんど影響を受けないことが判明した。そのことから、これらの第一ピークは物理的な現象を捉えたものであり、閉じ込め—非閉じ込め相転移に対応すべきもの出ることが示唆される。このピークの位置を $\mu - T$ 平面上に描画すると、QCD の相図が得られる。そのプレリミナリーな結果を与えたのが図 5 である。

更に、クォーク数密度とその高次のキュムラントの計算を行った。これらのハドロン量の計算はカノニカル分配関数から直ちに行われ、また自由ガス模型での計算も容易であるという点から、今回我々が用いた hopping parameter 展開を用いる手法が有限密度系に対しどの程度有効であるかを推し量る材料ともなることが期待される。具体的には、variance、skewness、kurtosis といった susceptibility 同士の比をとった量を実化学ポテンシ

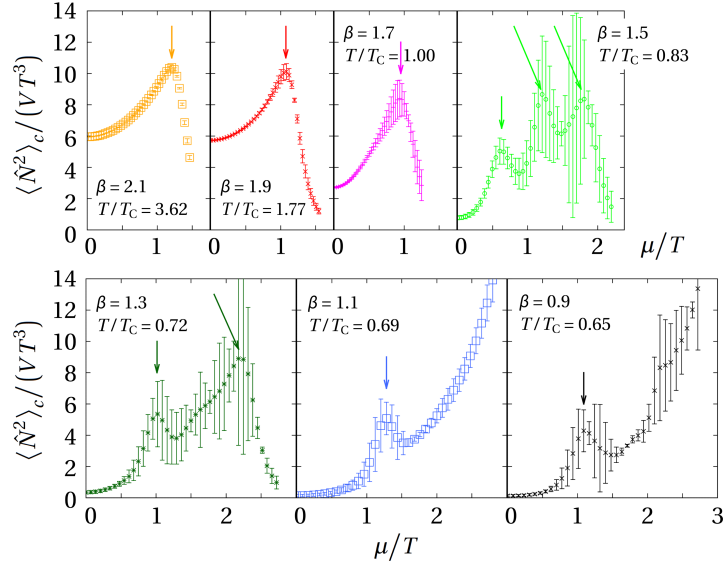


図 4: クォーク数の2次のキュムラント $\langle \hat{N}^2 \rangle_c / (VT^3)$ をクォークの化学ポテンシャル μ/T の関数として描いたもの。色による違いは図1と同じ。

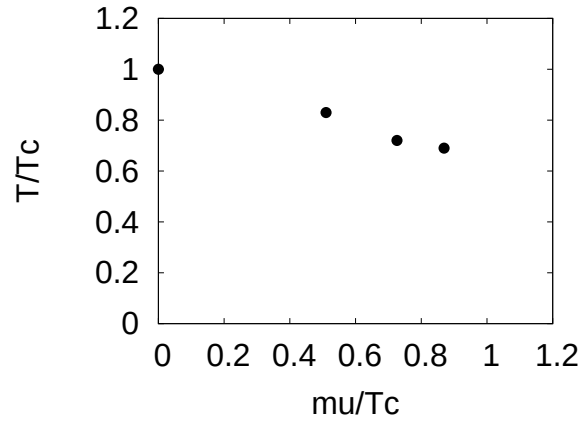


図 5: T_c 以下の低温側で現れた第一ピークの一を $\mu - T$ 平面上に図示したもの。

ルに対し数値的に計算し、ハドロンレゾナンスガス模型、クォークガス模型との比較を行った。ハドロンレゾナンスガス模型はハドロンからなる自由ガスを記述する模型であり、低温・低密度領域で有力な模型であると考えられている。一方、クォークガス模型はクォークの自由ガスを記述する模型であり、高温・高密度領域で有力な模型であるとされている。以上の計算を variance に対し行ったものを例として図 6 に示した。低温側の結

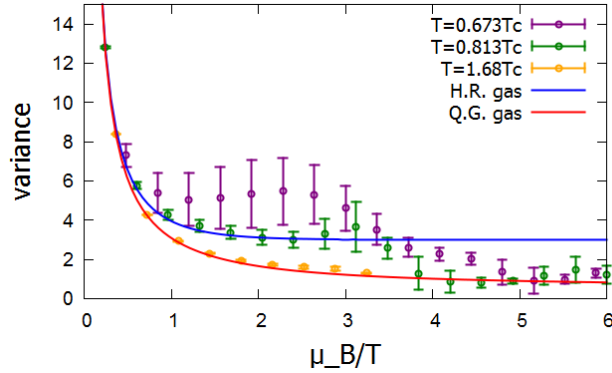


図 6: 横軸はバリオン化学ポテンシャルを温度で割ったものを、縦軸は variance を示す。プロットは上のものほど低温での結果を示し、青と赤の実線はそれぞれハドロンレゾナンスガス模型とクォークガス模型の結果を表している。

果では、化学ポテンシャルが小さい領域ではハドロンレゾナンスガス模型（青の実線）の結果を良く再現し、化学ポテンシャルを大きくしていくとクォークガス模型（赤の実線）に近づいていくという様子を見ることができた。このハドロンのガスからクォークのガスへの「転移」は、閉じ込め/非閉じ込め相転移を示唆するものであると考えられる。一方、高温側の結果では化学ポテンシャルが小さい領域であってもクォークガス模型に近い値をとっていることが見て取れる。これらは QCD の相図から予想される振る舞いを良く再現しており、今回我々が用いた手法が有限密度系に対して良く機能している結果であるといえる。

最後にカイラル対称性の回復相転移を見るための秩序変数であるカイラル凝縮の計算を行った。chiral condensate を固定クォーク数 n に対して求め、更に fugacity 展開の和を実行することでそれを実化学ポテンシャルの関数として表示したものが図 7 右である。subtraction を行っていない結果ではあるが、低温では低い化学ポテンシャルで値を持っていた chiral condensate が密度が上がると減少し、高温では chiral condensate が大きな値を持つ領域が減少していく振舞いが見て取れる。これは密度を上げる

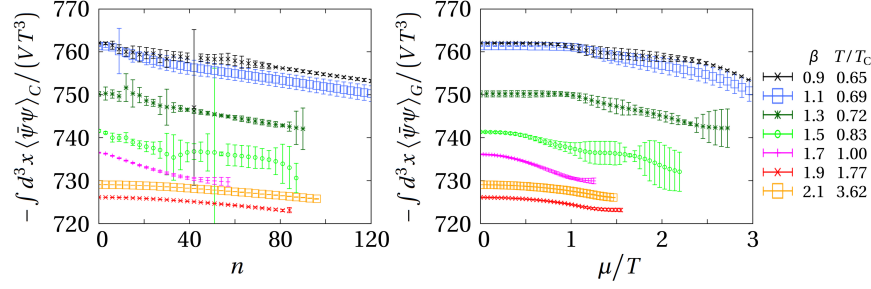


図 7: 左図はカノニカル分布におけるカイラル凝縮 $-\int d^3x \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c / (VT^3)$. 右図はグランドカノニカル分布における同量。色による違いは図1と同じ。

ことによってカイラル対称性の自発的破れが回復し、温度が高いところではより低い密度でその回復が起こるという状況を格子計算で捉えたものである。

4 結論

有限密度 QCD に対する研究手法として、カノニカル法は有望視できるものと思われる。我々はこの手法をやや重めのクォーク質量かつ小さな格子サイズの系に適用し、有限密度相転移を示唆する興味深い結果を得た。今後は、よりクォーク質量が軽く、より格子サイズの大きな系への適用を目指して研究を続けていく方針である。

参考文献

- [1] A. Nakamura, S. Oka and Y. Taniguchi, “Canonical approach to the finite density QCD with winding number expansion,” PoS LATTICE **2014** (2015) 198. [arXiv:1504.04096 [hep-lat]].
- [2] A. Nakamura, S. Oka and Y. Taniguchi, “QCD phase transition at real chemical potential with canonical approach,” arXiv:1504.04471 [hep-lat].
- [3] Ryutaro Fukuda, Atsushi Nakamura, Shotaro Oka, Shuntaro Sakai, Asobu Suzuki and Yusuke Taniguchi, “Beating the sign problem in finite density lattice QCD”, PoS(LATTICE 2015)208

- [4] Shotaro Oka for Zn-Collaboration, “Exploring finite density QCD phase transition with canonical approach - Power of multiple precision computation -”, PoS(LATTICE2015) 166, arXiv:1511.04711 [hep-lat]