共形超空間による 4D N=1 超重力理論の定式化入門

横倉諒 (慶應大)

2017. 5. 31. SUGRA 勉強会 @ KEK

この講義では断りなしに超重力理論と言ったら 4D N=1 超重力理論を指すことにします

Reduced Planck mass を 1 にとります: $M_{\mathrm{Pl}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 1$

1回目の目次

- SUGRAの定式化のこれまで
  ・歴史、定式化の方針、技術的欠点
  ・SUGRAの定式化の改良: Conformal SUGRA, superspace

- SUGRA の定式化の現在: Conformal superspace (この講義のメイン)
  ・準備1: Gravity from conformal gravity
  ・準備2: Covariant approach to super-Yang—Mills theories
  (global SUSY)

2回目（6/14,13:30-）は conformal superspace によるSUGRAの構成をやります

SUGRAの定式化の
これまで

4D N=1超重力理論(SUGRA)

Higher dim. SUGRA

↓ UV理論の有効理論

4D N=1 SUGRA

↓ beyond SM, Einstein 重力

Realistic model

SUGRAの定式化の歴史

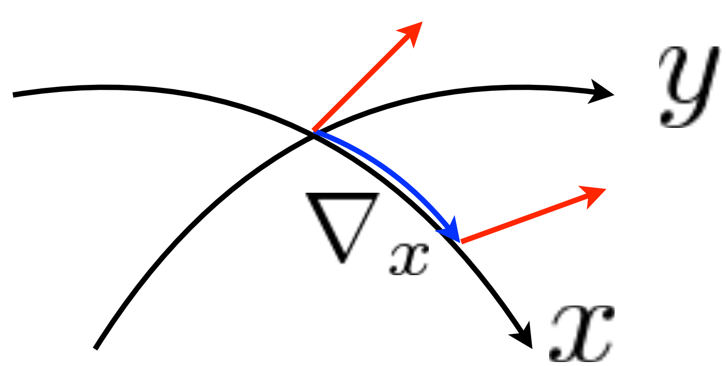
- 1974: Global supersymmetric (SUSY) Lagrangian [Wess, Zumino]
- 1976: Pure SUGRA Lagrangian
  [Freedman, et al.], [Deser, Zumino]
- 1977: Superspace formalism [Wess, Zumino]
- 1978: SUGRA from conformal SUGRA [Kaku, Townsend]
- 1978: Matter coupled Lagrangian [Cremmer, et al.]
- 1983: Yang—Mills (YM)-matter coupled SUGRA
  [Cremmer, et al.], [Kugo, Uehara], [Bagger]
- **2010: Conformal superspace [Butter]**

SUGRAの定式化(その1)

SUGRA = 超Poincaré 対称性のゲージ理論

$$\nabla_a \sim \mathrm{tr}(\sigma_a \{Q, Q^\dagger\})$$

- 超対称性　$P_a \propto \mathrm{tr}(\sigma_a \{Q, Q^\dagger\})$
- 一般相対論 = Poincaré 対称性のゲージ理論



$$P_a = -i\partial_a \to -i\nabla_a$$

共変微分

[Freedman et al.(1976); Deser, Zumino (1976)]

SUGRAの定式化(その2)

Lagrangian:

[Cremmer, et al. (1983); Kugo, Uehara (1983); Bagger (1983)]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}R - g_{ij^*}\partial^m A^i \partial_m \bar{A}^{j^*} - e^K\left(|D_i W|^2 - 3|W|^2\right) + \cdots\right)$$

EH項　　スカラーの運動項　　スカラー・ポテンシャル

Global SUSY と同じ3つの input:

Kähler potential K　superpotential W　gauge kinetic function H

(YM-matter SUGRAの場合)

SUGRAの定式化の技術的欠点：Lagrangian の導出とそれ自体が非常に複雑

- Local SUSY 変換則の導出
- カノニカルなEinstein—Hilbert (EH) 項の導出のためのリスケール

SUGRAの定式化の改良

重力部分を改良したい

Conformal SUGRA
Component formalism

SUSY部分を改良したい

SUGRA
Superspace formalism

超共形対称性の
ゲージ固定

超場の成分展開

最終的に得たい

SUGRA
Component formalism

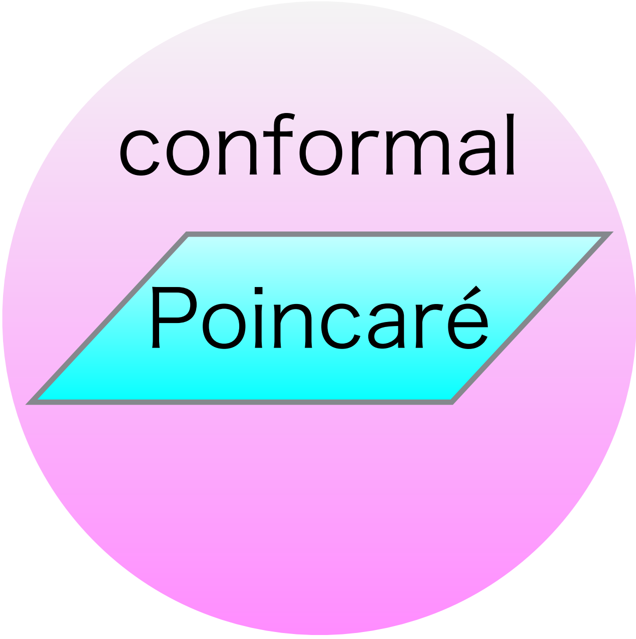
Conformal SUGRA

(component formalism)

[Kaku, Townsend (1978)]

超重力理論 ＝ 共形超重力理論のゲージ固定

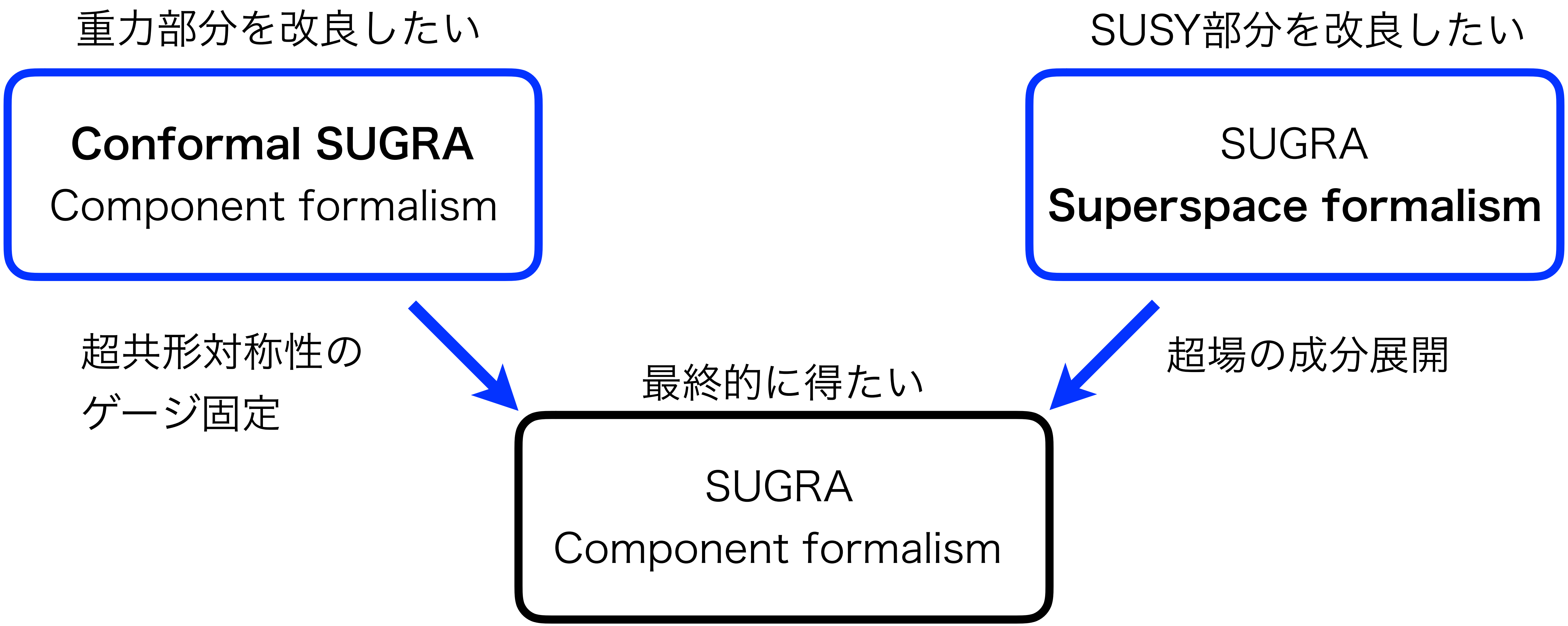
- 共形超重力理論 ＝ 超共形対称性のゲージ理論
- 超共形対称性 ＝ 超対称性＋共形対称性 (等角変換の対称性)
- カノニカルなEH 作用をゲージ固定で直接得られる
  [Kugo, Uehara (1983)]
- 実用的：従来の場の理論の言葉で定式化する



歴史コメント: Superconformal tensor calculus (超共形テンソル算法)と呼ばれている

勝手に宣伝: 今年の夏の学校で九後さんが conformal SUGRA の講義をします

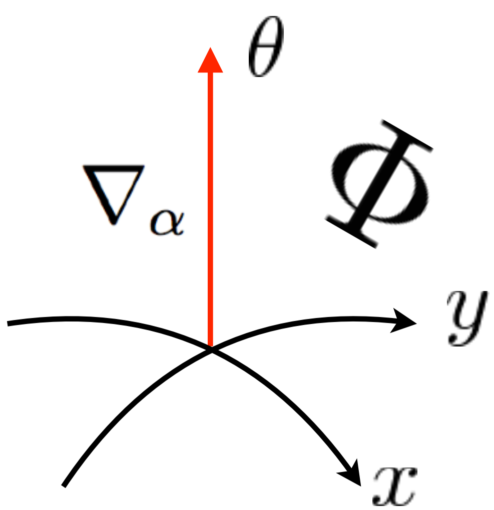
SUGRAの定式化の改良



Superspace formalism

[Wess, Zumino (1977)]

超重力理論 = 超空間の幾何学



(想像図)

SUSY = Grassmann 座標への並進

$$P_a \propto \mathrm{tr}(\sigma_a\{Q, Q^\dagger\})$$

- 明白な超対称性をもつ
- Local SUSY変換 = スピノル共変微分
- Component formalism は超場の成分展開で得られる

2つの定式化で長所が異なる

両方の定式化を自由に行き来できる定式化が欲しい

実用的に優れている

Conformal SUGRA
Component formalism

対称性が一見異なる

対応が複雑

明白な超対称性をもつ

SUGRA
Superspace formalism

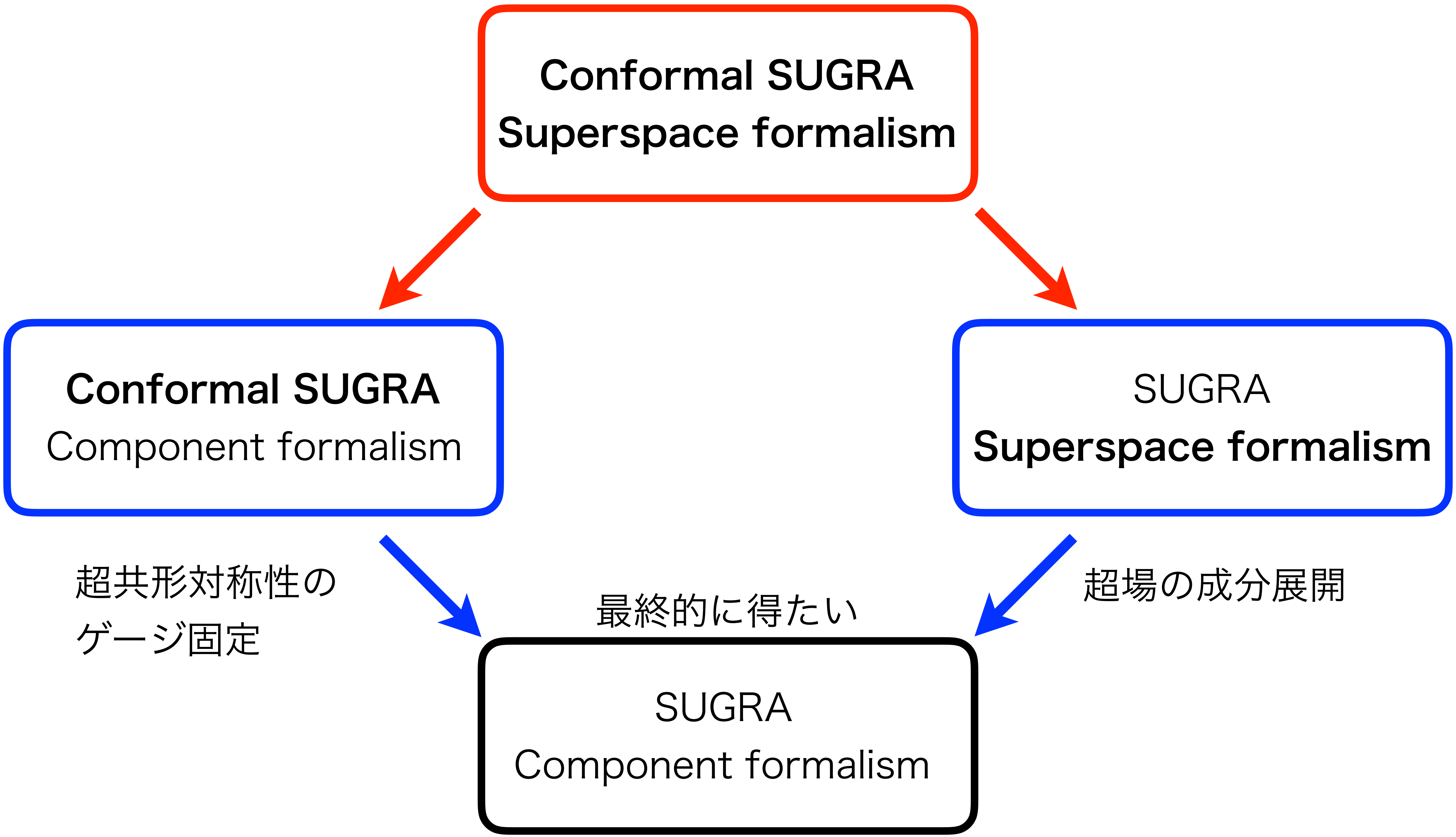
超共形対称性の
ゲージ固定

最終的に得たい

超場の成分展開

SUGRA
Component formalism

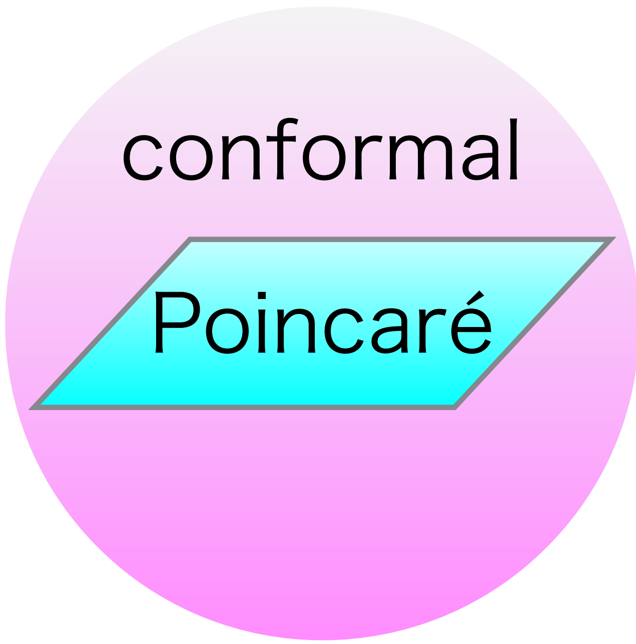
Conformal superspace



SUGRAの定式化の現在
Conformal superspace

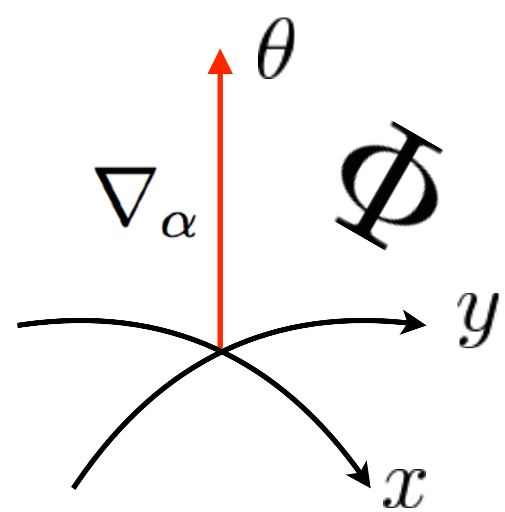
Conformal superspace は SUGRAの簡潔な定式化である

[Butter 2010]



重力の複雑さを改良

+



明白な超対称性

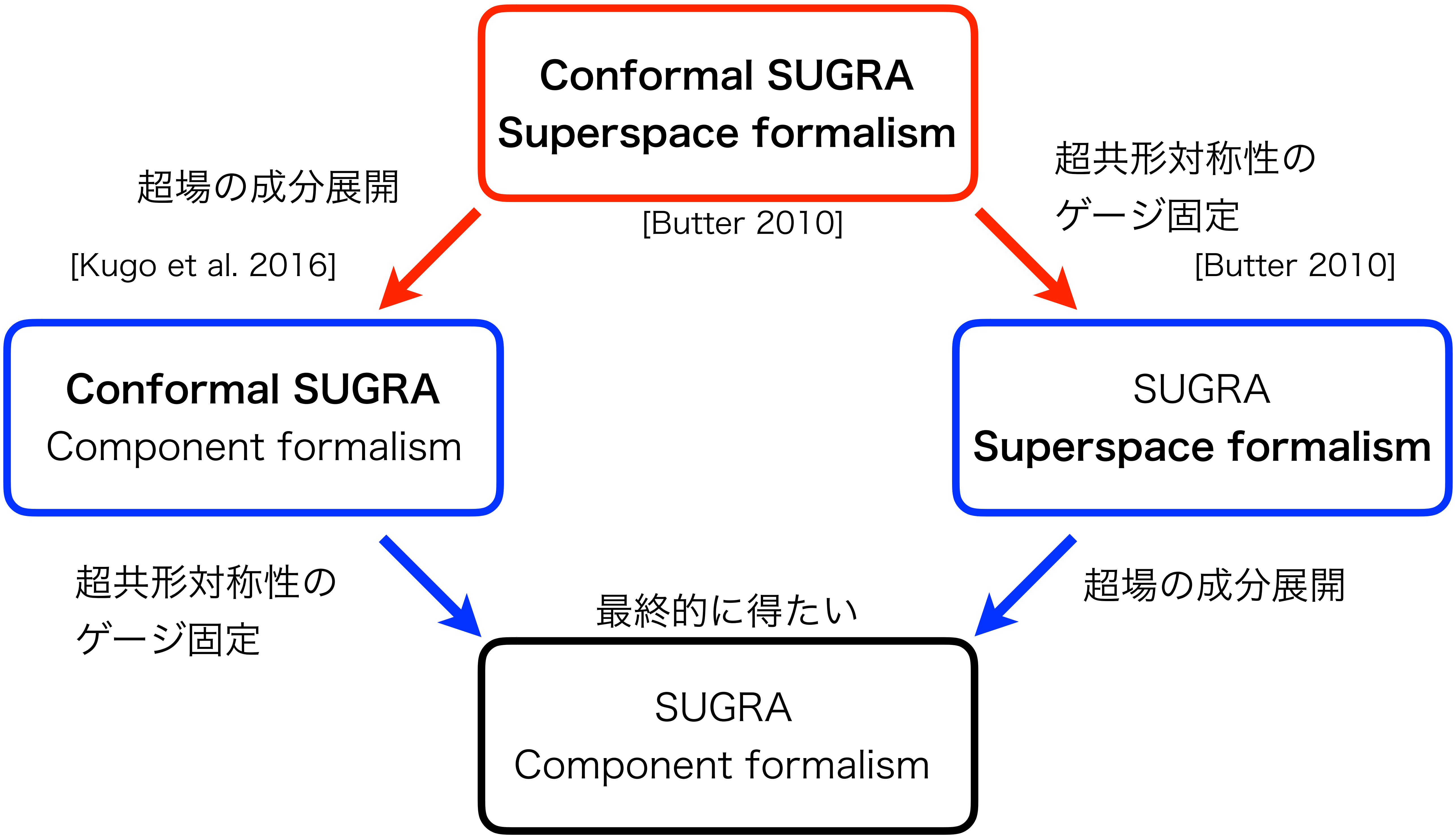
=

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

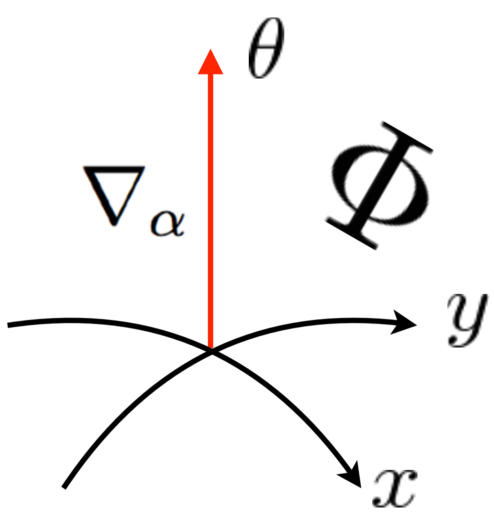
$$\{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}\} = -2i(\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}}\nabla_a$$

Global SUSY と同じスピノル共変微分の代数！

Conformal superspaceから従来の定式化へ

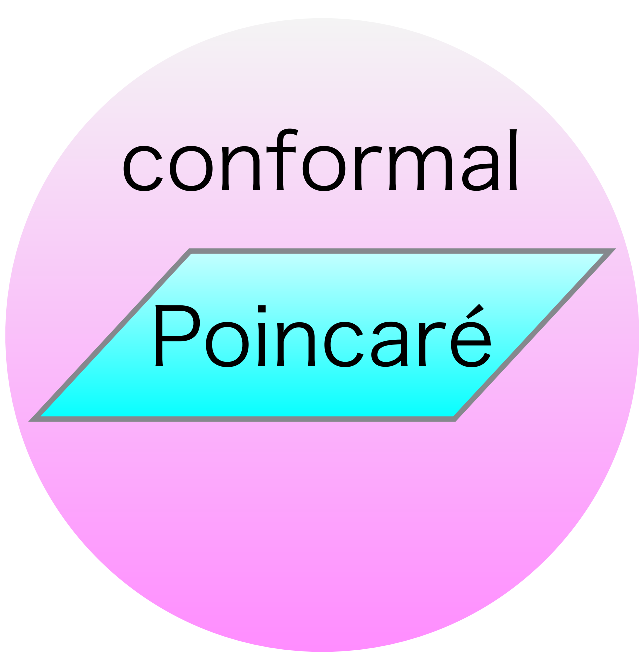


この講義の目標：
共形超空間で SUGRA を定式化する



1. 共形超空間で共形超重力理論の既約超場を導く

Global SUSY の Super-YM の covariant approach
とだいたい同じ手続き　(Wess, Bagger XIII 章)



2. 共形超重力理論でゲージ固定をする

Conformal gravity とだいたい同じ手続き
(Freedman, Van Proeyen 15章)

Conformal superspace の講義の流れ

- 準備1 (conformal sym.) : Conformal gravity とゲージ固定
- 準備2 (superspace) : Global SUSY の SYM の covariant approach
- メイン : Conformal superspace での SUGRA の定式化 (次回)

準備1
Conformal gravity

参考文献：

Freedman and Van Proeyen, “Supergravity” 15章

共形対称性とは？

角度（形）を変えない変換 (=相似変換) の対称性のこと

共形対称性＝ 並進 (P) ＋回転 (M) ＋拡大 (D) ＋ conformal boost (K)

ざっくりとした説明： 複素平面でのメビウス変換

拡大(D)・回転(M)　　　並進(P)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

conformal boost (K)

反転並進のこと

cf. ポアンカレ対称性 = 合同変換の対称性

$$f(z) = e^{i\theta} z + b$$

(共形対称性)

なぜ時空対称性のゲージ理論？

or なぜmetric を直接用いないか？

超対称性と相性が良いから　$P_a \propto \mathrm{tr}(\sigma_a \{Q, Q^\dagger\})$

のちに gravitino を SUSY のゲージ場として導入したい

Graviton も時空のゲージ場として導入すると、SUGRA への拡張が自然にできる

スピン接続 (M ゲージ場) をもちいてフェルミオンと重力を結合させることができる

歴史コメント

SUGRA の定式化は最初は metric も用いていた [Freedman et al. (1976)]

Conformal gravity でやりたいこと

重力理論 ＝ 共形重力理論のゲージ固定

を詳しく見る

EH 作用 = Compensator の運動項

$$-\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R \qquad -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\phi\nabla^a\nabla_a\phi$$

Compensator とは?

リッチ・スカラー = conformal boost (K) ゲージ場 ${f_m}^a$

$$R = -12{f_a}^a$$

どこからでてくる?

Conformal gravity でやること

1. 空間に共形対称性を内部対称性として導入する

2. 一般座標変換とゲージ場を用いた共形変換を同一視する

3. 共形変換で共変な曲率を定義する

4. 曲率に拘束条件を置く

5. EH 作用を含む作用をもとめ、共形対称性をゲージ固定する

以降は板書でやります